# TD17 : Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

## I A faire en priorité

**Exercice 1 (Primitivation directe).**

Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 2y. \end{cases}$

**Exercice 2 (Equation de transport à coefficients constants).**

A l'aide du changement de variables $\begin{cases} x = u + 2v \\ y = -v \end{cases}$, résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0,$$

d'inconnue $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

**Exercice 3 (Equation des ondes).**

Résoudre l'équation des ondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) - c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 0$, en utilisant le changement de variables $\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$ ($c > 0$ est un paramètre, c'est la vitesse de propagation de l'onde).

*On vérifiera d'abord que ce changement de variable est une bijection $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.*

**Exercice 4.**

On pose $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$. Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in U, \quad -y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

en utilisant les coordonnées polaires.

**Exercice 5 (Equation d'ordre 2).**

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 5\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x + y,$$

d'inconnue $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, en utilisant le changement de variables $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$.

**Exercice 6 (Contre-exemple au théorème de Schwarz).**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et calculer leurs valeurs.

Que nous apprend le théorème de Schwarz dans ce cas ?

**Exercice 7 (*Classe $C^0$, classe $C^1$).**

Les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$ ? De classe $C^1$ ?

1) $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
2) $g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$ si $y \neq -x$ et $g(x,-x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3) $h(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $h(0,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

**Exercice 8.**
Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, représenter graphiquement les ensembles suivants :

1. $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0 \text{ et } y \geq x\}$ ;
2. $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 1 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } y + x - 3 \leq 0\}$ ;
3. $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 3\}$ ;
4. $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \geq 1\}$ ;
5. $A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } 3y + x - 12 \leq 0 \text{ et } 3x + y - 12 \leq 0\}$ ;
6. $A_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| < 1 \text{ et } |x-y| < 1\}$ ;

Ces ensembles sont-ils bornés ? ouverts ? fermés ? ne pas justifier.

**Exercice 9.**
On pose $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ et on considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = (x-y)^3 - 6xy.$$

1. Représenter graphiquement le domaine $T$.
2. Déterminer le maximum et le minimum de $f$ sur $T$.

**Exercice 10.**
On pose $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$ et on considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

1. Représenter graphiquement le domaine $D$.
2. Déterminer le maximum et le minimum de $f$ sur $D$.

**Exercice 11 (D'après Concours national marocain 2009 – filière TSI).**
Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y^2 - 1$.

1. (a) Justifier que $h$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Justifier que $h$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de cet ensemble.
   (c) $h$ possède-t-elle des dérivées partielles premières en $(0,0)$ ?
2. (a) Montrer que $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < \sqrt{x^2+y^2} < 2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   (b) $h$ a-t-elle des points critiques dans $\mathcal{U}$ ?
   (c) Justifier que $h$ est bornée sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ et qu'elle y atteint ses bornes, puis déterminer les points de $D$ en lesquels ces bornes sont atteintes.

**Exercice 12 (Tangente à une hyperbole).**
Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équation cartésienne $x^2 + 3y^2 - 7xy + 8y - 11 = 0$.
Donner une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ en $A = (1,-2)$.

**Exercice 13.**
$(\mathcal{S})$ est la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$.

1. Préciser l'intersection de $(\mathcal{S})$ avec le plan $(xOy)$.
2. Quels sont les points singuliers de $(\mathcal{S})$ ?
3. Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $(2,1,\alpha)$ appartient à $(\mathcal{S})$.
   Etablir une équation du plan tangent à $(\mathcal{S})$ en ces points.

**Exercice 14.**
Soit $(\mathcal{S})$ la surface d'équation $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équations $\left\{ \begin{array}{l} y = 3x \\ z = -2x \end{array} \right.$
Déterminer les plans tangents à $(\mathcal{S})$ qui sont orthogonaux à $(\mathcal{D})$.

**Exercice 15.**
Soit $(\mathcal{S})$ la surface d'équation $z^3 = xy$ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équations $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$
Déterminer les plans tangents à $(\mathcal{S})$ qui contiennent la droite $(\mathcal{D})$.

**Exercice 16.**
Pour chacune des surfaces suivantes, déterminer une équation cartésienne du plan tangent au point donné, puis étudier la position de la surface par rapport à ce plan.

1. $(\mathcal{S}) : z = x^2 - y^2$ en $O = (0, 0, 0)$.
2. $(\mathcal{S}) : z = x\left(\ln^2(x) + y^2\right)$ en $A = (e^{-1}, 1, 2e^{-1})$.
3. $(\mathcal{S}) : z = xye^{-(x^2+y^2)}$ en $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2e}\right)$.

# II Exercices supplémentaires

**Exercice 17.**
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 des trois fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ :

1. $f(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$.
2. $g(x, y) = \varphi(xy)$.
3. $h(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)dt$.

**Exercice 18 (Calculs de dérivées composées).**
Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $g(x, y) = f(x + y, xy)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer que la fonction $h : x \mapsto f(x, -x)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

**Exercice 19 (Forme des solutions pour une EDP linéaire d'ordre 2).**
On considère deux fonctions $f$ et $g$ de classe $C^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et on définit sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ la fonction $\varphi$ par $\varphi(x, y) = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$.
Montrer que $\varphi$ est de classe $C^2$ et que c'est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \qquad x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

**Exercice 20 (*Equation de transport avec second membre, bis).**
Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3},$$

d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, où $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y > 0\}$.

**Exercice 21 (Equation de transport à coefficients constants, cas général).**
On souhaite résoudre $(E_{a,b})$ : $a\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + b\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ sur $\mathbb{R}^2$, où $(a, b) \neq (0, 0)$.

1. Si on considère une solution $f$ de $(E_{a,b})$, quel lien géométrique y a-t-il entre le gradient $\nabla f$ et le vecteur $(a; b)$ ?
2. Construire une base orthogonale $(u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^2$ à partir du vecteur $(a; b)$, et calculer les coordonnées $(X, Y)$ dans cette nouvelle base en fonction des coordonnées $(x, y)$ dans la base canonique $(e_1, e_2)$.
3. A l'aide du changement de variables $(x, y) \mapsto (X, Y)$, résoudre $(E_{a,b})$.

**Exercice 22 (Etude d'extrema sur un rectangle).**
Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2\} = [1, 3] \times [0, 2]$, et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 3x - 2y$. Déterminer le maximum et le minimum de $f$ sur $D$.

**Exercice 23 (Optimisation sur un trapèze).**
Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1,\ x + y \leq 2\}$,
et soit $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2y^2 + x + 7y$.
Montrer qu'il existe un seul couple $(a, b) \in E \times E$ tel que

$$\forall (x, y) \in E, \quad f(a) \leq f(x, y) \leq f(b).$$