Corrigé du TD15 : Isométries vectorielles

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1. Tout d'abord, ϕ_x est linéaire car pour tous $(y,z) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\phi_x(\lambda y + z) = \lambda y + z - \frac{2\langle x, \lambda y + z\rangle}{\|x\|^2}x = \lambda y + z - \lambda\frac{2\langle x, \lambda y\rangle}{\|x\|^2}x - \frac{2\langle x, z\rangle}{\|x\|^2}x = \lambda\phi_x(y) + \phi_x(z).$$

De plus, ϕ_x conserve la norme car pour tout $y \in E$:

$$\begin{aligned}\|\phi_x(y)\|^2 &= \left\|y - \frac{2\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}x\right\|^2 = \|y\|^2 - 2\left\langle \frac{2\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}x, y\right\rangle + \left\|\frac{2\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}x\right\|^2 \\ &= \|y\|^2 - \frac{4\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}\langle x,y\rangle + 4\frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2} = \|y\|^2,\end{aligned}$$

et donc $\|\phi_x(y)\| = \|y\|$.
Ceci montre que ϕ_x est une isométrie vectorielle.

2. Montrons que ϕ_x est une symétrie :

$$\forall y \in E, \qquad (\phi_x \circ \phi_x)(y) = \phi_x\left(y - \frac{2\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}x\right) = \phi_x(y) - \frac{2\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}\phi_x(x)$$

Or, $\phi_x(x) = y - \dfrac{2\langle x,x\rangle}{\|x\|^2}x = x - 2x = -x$, donc

$$(\phi_x \circ \phi_x)(y) = \phi_x(y) + \frac{2\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}x = y.$$

On a $\phi_x \circ \phi_x = Id$, donc ϕ_x est une symétrie.
Déterminons ses éléments caractéristiques :

- *les éléments de $Ker(\phi_x - Id)$ sont les vecteurs $y \in E$ tels que*

$$\phi_x(y) = y \iff -\frac{2\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}x = 0 \iff \langle y,x\rangle = 0.$$

  On a donc $Ker(\phi_x - Id) = \{x\}^\perp$, c'est l'hyperplan orthogonal à la droite engendrée par x, notons-le H.
- *le sous-espace $Ker(\phi_x + Id)$ est un supplémentaire de H dans E (puisque ϕ_x est une symétrie), il s'agit donc d'une droite (E étant de dimension finie). Vu que $\phi_x(x) = -x$, on a $x \in Ker(\phi_x + Id)$, et donc $Ker(\phi_x + Id) = Vect(x)$, il s'agit de la droite orthogonale à H.*

Les sous-espaces $Ker(\phi_x - Id)$ et $Ker(\phi_x + Id)$ sont des supplémentaires orthogonaux dans E, donc la symétrie ϕ_x est une symétrie orthogonale.
En conclusion, Φ_x est la réflexion par rapport à l'hyperplan $H = \{x\}^\perp$.

Remarque.
On peut faire très rapidement cet exercice si on remarque que $\phi_x = Id - 2p$, où p est la projection orthogonale sur la droite $\mathcal{D} = Vect(x)$. En effet, le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ forme une base orthonormée de $\mathcal{D}$, donc la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ a pour expression :

$$y \mapsto p(y) = \left\langle y, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \frac{x}{\|x\|} = \frac{\langle x,y\rangle x}{\|x\|^2}.$$

En notant $y = y_1 + y_2$ la décomposition d'un vecteur sur la somme directe $E = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp$, on a alors

$$\phi_x(y) = y - 2p(y) = y_1 + y_2 - 2y_1 = -y_1 + y_2,$$

ce qui est bien l'expression de la symétrie par rapport à $\mathcal{D}^\perp$ et parallèlement à $\mathcal{D}$, c'est-à-dire la réflexion d'hyperplan $\mathcal{D}^\perp$.

Corrigé de l'exercice 2. 1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. *Alors, puisque les deux colonnes forment une base orthonormée de* $\mathbb{R}^2$*, elles sont en particulier de norme* 1*, donc*

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1.$$

D'où $0 \leq a^2 \leq a^2 + c^2 = 1$*, c'est-à-dire* $a \in [-1; 1]$*, et de même pour les autres coefficients.*

2. *Soit* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. *Alors, chaque colonne* C_j *est de norme* 1*, donc*

$$\forall j \in \{1, \cdots, n\}, \qquad \|C_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1,$$

ce qui entraîne :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2, \qquad 0 \leq a_{i,j}^2 \leq \|C_j\|^2 = 1,$$

et donc $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2,\ a_{i,j} \in [-1; 1]$.

3. *D'après ce qui précède, si* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$*, alors*

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \leq \sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

donc $Tr(A) \leq n$*, et cette borne est atteinte, puisque la matrice* I_n *est orthogonale et a une trace égale à* n*. En conclusion, la trace maximale d'une matrice de* $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *est* n*.*

Corrigé de l'exercice 3.
Les techniques de calcul de valeurs propres et vecteurs propres sont détaillées dans le chapitre 3, on se contentera donc, ici, de donner les résultats.

1. — ***Valeurs propres :*** $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$. *Les valeurs propres de* A *sont* 4 *et* 1.
   — ***Vecteurs propres :***
   $E_4(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. *On pose alors* $U = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Attention à penser à normer !*
   $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. *On pose alors* $V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *(qui est bien orthogonal à* U *!)*
   Enfin, on pose $W = U \wedge V = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. *(On vérifie bien qu'il appartient à* E_1*...).*
   — ***Conclusion :***
   La famille (U, V, W) *est une base orthonormée de vecteurs propres. On a donc* $A = PDP^T$ *avec :*

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

2. — ***Valeurs propres :*** $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 3)$. *Les valeurs propres de* A *sont* 0, -1 *et* 3.
   — ***Vecteurs propres :***
   $E_0(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. *On pose* $U = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $E_{-1}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. *On pose* $V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   $E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. *On pose* $W = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. *On peut remarquer que* $W = U \wedge V$*...*

— ***Conclusion :***
La famille (U, V, W) est une base orthonormée de vecteurs propres. On a donc $A = PDP^T$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 4.
Soit A une matrice symétrique réelle. D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telles que $D = P^{-1}AP$. Donc

$$D^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP = P^{-1}I_nP = P^{-1}P = I_n.$$

En notant $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ les valeurs propres de A non nécessairement distinctes (donc les coefficients de D), les coefficients de D^k sont $(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)$. Puisque $D^k = I_n$, on obtient

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \qquad \lambda_i^k = 1.$$

Mais les λ_i sont réels, donc $\lambda_i \in \{-1; 1\}$ pour tout i.
En repassant au carré, on a $\lambda_i^2 = 1$ pour tout i, donc $D^2 = I_n$, et on en déduit

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n.$$

Corrigé de l'exercice 5. — *Montrons que $Ker(f - Id_E) \subset Im(f - Id_E)^\perp$.*
Soit $\overrightarrow{u} \in Ker(f - Id_E)$. On souhaite montrer que $\overrightarrow{u} \in Im(f - Id_E)^\perp$.
Pour tout $\overrightarrow{y} \in Im(f - Id_E)$, il existe $\overrightarrow{w} \in E$ tel que $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{w}) - \overrightarrow{w}$. On a donc :

$$\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{u} | f(\overrightarrow{w}) - \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u} | f(\overrightarrow{w}) \rangle - \langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{w} \rangle.$$

Or, $\overrightarrow{u} \in Ker(f - Id_E)$ donc $\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{u})$ et donc $\langle \overrightarrow{u} | f(\overrightarrow{w}) \rangle = \langle f(\overrightarrow{u}) | f(\overrightarrow{w}) \rangle = \langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{w} \rangle$ car f conserve le produit scalaire.
Ainsi, $\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{w} \rangle - \langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{w} \rangle = 0$ et $\overrightarrow{u} \in Im(f - Id_E)^\perp$.
On a bien $Ker(f - Id_E) \subset Im(f - Id_E)^\perp$.

— *Montrons que $\dim(Ker(f - Id_E)) = \dim(Im(f - Id_E)^\perp)$.*
On sait, d'après le théorème du rang, que $\dim(Ker(f - Id_E)) = \dim(E) - \dim(Im(f - Id_E))$.
De plus, comme E est de dimension finie, $Im(f - Id_E)$ et $Im(f - Id_E)^\perp$ sont supplémentaires donc
$\dim(Im(f - Id_E)) + \dim(Im(f - Id_E)^\perp) = \dim(E)$.
On a donc bien $\dim(Ker(f - Id_E)) = \dim(Im(f - Id_E)^\perp)$.

Grâce aux deux points précédents on a montré que $Ker(f - Id_E) = Im(f - Id_E)^\perp$.

Corrigé de l'exercice 6.
D'après le théorème spectral, il faut évidemment chercher un contre-exemple complexe non réel.
De plus, cette matrice 2×2 doit nécessairement posséder une valeur propre double (sinon, elle sera diagonalisable sur $\mathbb{C}$).
On cherche donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique a une racine double, donc un discriminant Δ nul. Avec ces notations :

$$\chi_A(X) = X^2 - (a + d)X + (ad - b^2),$$

et

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - b^2) = a^2 + d^2 - 2ad + 4b^2 = (a - d)^2 + 4b^2 = (a - d + 2ib)(a - d - 2ib).$$

La condition nécessaire est donc

$$a - d = \pm 2ib.$$

Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ (qui vérifie bien cette condition nécessaire) convient.
Son polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = X^2$, donc A possède une valeur propre double (0), mais elle n'est pas diagonalisable, sinon elle serait semblable à la matrice nulle, donc nulle, puisque $P^{-1}0P = 0$ pour toute matrice inversible P.

Corrigé de l'exercice 7. *1. — A est une matrice orthogonale car ses colonnes forment une famille orthonormée.*

— A n'est pas une matrice symétrique donc f est une rotation d'angle θ tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad (mod\ 2\pi).$$

— En conclusion, f est la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ modulo 2π.

2. — B est une matrice orthogonale car ses colonnes forment une famille orthonormée.

— B est une matrice symétrique donc f est une symétrie orthogonale.

On cherche alors les invariants par f : $f((x,y)) = (x,y) \Leftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = (2-\sqrt{3})x$.

$Ker(f - Id_E) = \left\{(x,(2-\sqrt{3})x)/x \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left((1, 2-\sqrt{3})\right)$.

— En conclusion, f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $Vect\left((1,2-\sqrt{3})\right)$.

Corrigé de l'exercice 8. *1. Lorsque f est une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée directe est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.*

Donc la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la rotation d'angle $\arccos(-1/3)$ est la matrice $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$.

2. Commençons par former une base orthonormée constituée d'un vecteur de l'axe et d'un vecteur de l'orthogonal de l'axe. On pose $\overrightarrow{u}' = \dfrac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ et $\overrightarrow{w} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$.

La famille $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}', \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ (famille libre car orthogonale et contient deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2), et on a $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et c'est une matrice orthogonale.

On a donc : $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = P\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f)P^{-1} = P\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f)P^T = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 9. *1. Ω_1 représente le demi-tour d'axe $\mathcal{D} = Vect(1,4,1)$ (c'est une rotation d'angle π).*

2. Ω_2 représente la rotation d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\overrightarrow{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3. Ω_3 représente la réflexion de plan $\mathcal{P} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

4. Ω_4 représente l'antirotation d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\overrightarrow{i} = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\theta = \arccos\left(\frac{5}{6}\right)$.

En d'autres termes Ω_4 représente l'isométrie $f = \rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$, où ρ est la rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{i}$ et d'angle $\theta = \arccos\left(\frac{5}{6}\right)$ et σ est la réflexion de plan $\mathcal{P} = \{\overrightarrow{i}\}^{\perp}$.

Corrigé de l'exercice 10. *1. On note f la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et d'axe dirigé par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$.*

On pose $\overrightarrow{U} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\overrightarrow{V} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ et $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.

La famille $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W})$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ et, dans cette base, la matrice de f est la matrice $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}'$ est : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Notons M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors on a :

$$M = PM'P^{-1} = PM'P^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3}+1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}.$$

2. *Soit f la réflexion vectorielle par rapport au plan F d'équation $x+2y-z=0$.*
On pose $\overrightarrow{U} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$ *(vecteur normal à F),* $\overrightarrow{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ *et* $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$.
La famille $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W})$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ et, dans cette base, la matrice de f est la matrice $M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}'$ est : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.
Notons M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors on a :

$$M = PM'P^{-1} = PM'P^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 11. *1. On a $A \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$ si et seulement si les colonnes de A, notées (C_1, C_2, C_3) forment une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.*
On a déjà $\|C_1\|^2 = \frac{1}{49}(6^2 + (-2)^2 + 3^2) = 1$.
Ensuite, $\langle C_1, C_2\rangle = 0 \iff a_{3,2} = -2$.
Avec cette condition, on a bien $\|C_2\|^2 = \frac{1}{49}(3^2 + 6^2 + (-2)^2) = 1$, *donc la famille (C_1, C_2) est orthonormée.*
Dès lors, (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $C_3 = C_1 \wedge C_2$, c'est-à-dire

$$C_3 = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 42 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que $A \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

2. *Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Puisque $A \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$, f est une rotation de $\mathbb{R}^3$.*
Déterminons son axe. On remarque que le vecteur $(1,1,1)$ est invariant par f, puisque

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc l'axe de rotation est $Vect(1,1,1)$. On l'oriente par le vecteur unitaire $\overrightarrow{i} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Déterminons maintenant l'angle θ associé à cette orientation de l'axe.

Tout d'abord, on a $Tr(A) = 1+2\cos\theta$, *donc* $\cos\theta = \frac{1}{2}(Tr(A)-1) = \frac{11}{14}$, *donc* $\theta = \pm \arccos\left(\frac{11}{14}\right)$.
Reste à déterminer le signe de $\sin\theta$.
Pour cela, on choisit un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{i}$, *par exemple* $\overrightarrow{x} = (1,0,0)$, *et on calcule :*

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{f(x)}) = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & 1 & 6/7 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/7 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 3/7 \end{vmatrix} = -\frac{1}{7\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{5}{7\sqrt{3}}.$$

Ce déterminant a le signe de $\sin\theta$, *donc* $\sin\theta < 0$.
Finalement, f *est la rotation d'axe orienté par* $\overrightarrow{i} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et d'angle* $\theta = -\arccos\left(\frac{11}{14}\right)$.

Corrigé de l'exercice 12.

Corrigé de l'exercice 13. *1. On considère* u *et* v *deux vecteurs tels que la famille* $\mathcal{B} = (\omega, u, v)$ *est une base orthonormée directe. (Il suffit de prendre* u *orthogonal à* ω *et unitaire, puis* $v = \omega \wedge u$*.)*
Alors $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

2. (a) — *Pour tout réel* α, *par définition d'une rotation,* $R(\alpha\omega) = \alpha\omega$.
De plus, $\cos(\theta)\alpha\omega + \sin(\theta)(\omega \wedge \alpha\omega) + (1-\cos(\theta))\langle \omega | \alpha\omega\rangle\,\omega = \alpha\omega$.
Donc la formule est vraie pour x *parallèle à* ω.
— *Si* x *est orthogonal à* ω *alors* $x \in Vect(u,v)$. *On a donc* $x = au + bv$.
D'après la matrice donnée précédemment, on a donc

$$R(x) = (a\cos(\theta) - b\sin(\theta))u + (a\sin(\theta) + b\cos(\theta))v.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \cos(\theta)x + \sin(\theta)(\omega \wedge x) + (1-\cos(\theta))\langle \omega | x\rangle\,\omega &= \cos(\theta)(au+bv) + \sin(\theta)(\omega \wedge (au+bv)) \\ &= (a\cos(\theta) - b\sin(\theta))u + (a\sin(\theta) + b\cos(\theta))v. \end{aligned}$$

Donc la formule est vraie pour x *orthogonale à* ω.

(b) *Comme* $Vect(\omega)$ *et* $Vect(\omega)^\perp$ *sont des supplémentaires orthogonaux (on est en dimension finie), que la formule proposée est linéaire en* x, *et qu'elle est vraie sur* $Vect(\omega)$ *et* $Vect(\omega)^\perp$, *on peut affirmer qu'elle est vraie sur* $\mathbb{R}^3$.

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 14.

Corrigé de l'exercice 15. *1. Soit* $\overrightarrow{u} \in E_1(f)$ *et* $\overrightarrow{w} \in E_{-1}(f)$. *On a donc* $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ *et* $f(\overrightarrow{w}) = -\overrightarrow{w}$.
On sait, de plus, que f *conserve le produit scalaire donc :*

$$\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{w} \rangle = \langle f(\overrightarrow{u}) | f(\overrightarrow{w}) \rangle = \langle \overrightarrow{u} | -\overrightarrow{w} \rangle = -\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{w} \rangle \quad \Longrightarrow \langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{w} \rangle = 0.$$

Ainsi, $E_1(f)$ *et* $E_{-1}(f)$ *sont orthogonaux.*

2. *Comme* f *est diagonalisable, il existe une base dans laquelle la matrice de* f *est de la forme* $A = \begin{pmatrix} I_p & O \\ O & -I_{n-p} \end{pmatrix}$.
On a alors $A^2 = I_n$ *donc* $f \circ f = Id_E$ *et donc* f *est bien une symétrie orthogonale.*

Corrigé de l'exercice 16. — *Si on suppose que A est antisymétrique alors $A + A^T = 0$.*
Donc on a bien A antisymétrique $\Longrightarrow (A + A^T)^p = 0$.

— *Supposons maintenant que $(A + A^T)^p = 0$.*
La matrice $A + A^T$ est une matrice symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable en base orthonormée.
Notons D une matrice diagonale et P une matrice orthogonale telles que $A + A^T = PDP^T$.
On a alors $(A + A^T)^p = PD^pP^T$ (on peut parfois demander de redémontrer ce résultat aux concours, il faut alors faire une démonstration par récurrence.)

Donc $PD^pP^T = 0$ et comme P est inversible, on obtient $D^p = 0 = \begin{pmatrix} d_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^p & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n^p \end{pmatrix}$.

On a donc $d_1 = \ldots = d_n = 0$ et donc $D = 0$ et ainsi $A + A^T = 0$, ce qui signifie que A est antisymétrique.

Corrigé de l'exercice 17. *1. On vérifie rapidement que A est une matrice orthogonale : en effet, les colonnes de A forment une famille orthonormée (on peut aussi calculer $A^T \times A$).*

2. A n'est pas une matrice symétrique et on remarque que $C_1 \wedge C_2 = C_3$. Donc $A \in \mathcal{SO}(3)$ ce qui signifie que f est une rotation vectorielle.

3. Il nous faut maintenant trouver l'axe et l'angle de la rotation :

— ***Axe de la rotation :*** $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 8y + 4z = 9x \\ 4x + 4y + 7z = 9y \\ -8x + y + 4z = 9z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = -2x \\ y = -2x \end{cases}$.
Donc $Ker(f - id) = \{(x, -2x, -2x)/x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, -2, -2))$.

— ***Angle de la rotation :***
On sait que $1 + 2\cos(\theta) = tr(A) = 1$ donc $\cos(\theta) = 0$ et donc $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).
Pour savoir quelle valeur de θ choisir, il nous suffit de connaître le signe de $\sin(\theta)$.
On considère $\overrightarrow{x} = e_1 = (1, 0, 0)$ (qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u}$).
On a alors $f(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{9}(1, 4, -8)$ et donc :$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x})) = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -\frac{24}{9} < 0$.
On peut donc conclure que $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

— *En conclusion, f est la rotation d'axe dirigé par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, -2, -2)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).*

Comme A est la matrice de la rotation d'axe $Vect((1, -2, -2))$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ on sait que $A^4 = I_3$ (4 rotations d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donne une rotation d'angle -2π donc l'identité...).
Or, 480 est un multiple de 4. Donc $A^{480} = I_3$ et donc $A^{481} = A$.

Corrigé de l'exercice 18.

Corrigé de l'exercice 19.

Corrigé de l'exercice 20.

Corrigé de l'exercice 21.

Corrigé de l'exercice 22. *1. Par hypothèse, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale. Mais la matrice de passage P est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, car la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la base* *de diagonalisation sont toutes deux orthonormées. On a donc $P^T = P^{-1}$, d'où*

$$A^T = (PDP^{-1})^T = (PDP^T)^T = PD^T P^T = PDP^{-1} = A,$$

ce qui montre que la matrice A est symétrique.

2. *Soit F un sev de E et p_F la projection orthogonale sur F. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, et notons $A = Mat_{\mathcal{B}}(p_F)$.*
   En choisissant une base $\mathcal{B}^*$ de E qui est orthonormée et adaptée à la somme directe $E = F \oplus F^{\perp}$, on a $Mat_{\mathcal{B}^*}(p_F) = D$ qui est diagonale (avec des 1 et des 0 sur la diagonale).
   On a donc $A = PDP^{-1}$ avec $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}^*) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (une matrice de passage entre deux bases orthonormées de E est orthogonale). D'après la première question, cela entraîne que A est symétrique.
3. *La symétrie orthogonale par rapport à F est $\sigma_F = 2p_F - Id_E$, donc sa matrice dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est $S = 2A - I_n$, et elle est symétrique (c'est la somme de deux matrices symétriques).*