TD15 : Isométries vectorielles

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1 (Un exemple en dimension n).
Soit E un espace vectoriel euclidien non réduit à 0. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi_x : & E & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & y - \dfrac{2\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}x, \end{array}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire sur E.

1. Montrer que ϕ_x est une isométrie vectorielle.
2. Montrer que ϕ_x est une symétrie orthogonale (on précisera $Ker(\phi_x - Id)$ et $Ker(\phi_x + Id)$).

Exercice 2 (Trace maximale d'une matrice orthogonale).

1. Montrer que tous les coefficients d'une matrice de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ sont compris entre -1 et 1.
2. Montrer que cela reste vrai pour une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
3. Quelle est la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 3 (Diagonalisation en base orthonormée).
Pour chacune des matrices suivantes, déterminer une matrice D diagonale et une matrice P orthogonale telles que $A = PDP^T$ (on pensera d'abord à justifier l'existence de P).

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4 (Racines k^e de l'identité).
Montrer que si A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et k un entier naturel tel que $A^k = I_n$, alors $A^2 = I_n$. *Indication : utiliser le théorème spectral.*

Exercice 5 (*Exercice théorique).
Soit E un espace euclidien et f une isométrie de E. Montrer que $Ker(f - Id_E) = Im(f - Id_E)^{\perp}$.

Exercice 6 (Contre-exemple sur $\mathbb{C}$).
Donner un exemple de matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable.

Exercice 7 (Etude de matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$).
Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à chacune des matrices suivantes :

1. $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 8 (Détermination de la matrice d'une rotation/réflexion en dim. 2).

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la rotation vectorielle d'angle $\theta = \arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la symétrie orthogonale d'axe dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 2)$.

Exercice 9 (Etudes de matrices de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$).
Pour chacune des matrices suivantes, donner la nature et les caractéristiques géométriques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé :

$$\Omega_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}, \qquad \Omega_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Omega_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 (Détermination de la matrice d'une rotation/réflexion en dim. 3).

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{6}$ et d'axe dirigé par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion vectorielle par rapport au plan F d'équation $x + 2y - z = 0$.

Exercice 11 (Matrice orthogonale avec paramètres).
On pose $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & a_{1,3} \\ -2 & 6 & a_{2,3} \\ 3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$.

1. Compléter la matrice A pour que $A \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de l'endomorphisme canoniquement associé.

Exercice 12 (*Décomposition d'une rotation plane).
Soit E un plan euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

1. Si u est un vecteur non nul de E, on note θ la mesure principale de l'angle (e_1, u). Quelle est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la réflexion par rapport à la droite $Vect(u)$?
2. Que peut-on dire de la composée de deux rotations ?
3. Que peut-on dire de la composée de deux réflexions ?
4. Que peut-on dire de la composée d'une rotation par une réflexion ?
5. Justifier que toute rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions.

Exercice 13 (Extrait d'un exercice d'oral CCS 2013 - filière TSI).
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.
On note R la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle θ autour de ω unitaire.

1. Donner la matrice de R dans une base adaptée.
2. On souhaite montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $R(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)(\omega \wedge x) + (1 - \cos(\theta)) \langle \omega | x \rangle \omega$.
   (a) Montrer que cette formule est vraie pour x parallèle à ω et pour x orthogonal à ω.
   (b) En déduire que cette formule est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

II Exercices supplémentaires

Exercice 14 (Somme des coeff. d'une matrice orthogonale).
Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit f une isométrie vectorielle de E et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

1. Trouver un vecteur $x \in E$ tel que $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \langle f(x), x \rangle$.
2. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$.

Exercice 15 (Exercice théorique bis).
Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$.

1. On suppose que $\mathrm{sp}(f) = \{-1; 1\}$. Montrer que $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont orthogonaux.
2. On suppose, de plus, que f est diagonalisable. Montrer que f est une symétrie orthogonale.

Exercice 16 (Extrait d'un oral CCP 2013 - filière TSI).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $(A + A^T)^p$ est nulle si, et seulement si, A est antisymétrique.

Exercice 17 (Calcul de puissance).
On pose $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^{481}.
Indication : que représente géométriquement l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A ?

Exercice 18 (Diagonalisation d'une matrice sym. à paramètre).
Soit $a \in \mathbb{R}$. On donne la matrice $A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1. Expliquer sans calcul pourquoi la matrice A_a est diagonalisable.
2. Calculer en fonction de a les valeurs propres de A_a. Déterminer l'ensemble E des $a \in \mathbb{R}$ tel que ces valeurs propres sont positives ou nulles.
3. Pour $a \in E$, justifier qu'il existe une matrice symétrique S_a telle que $S_a^2 = A_a$.
   Expliciter S_a lorsque $a = 2$.

Exercice 19 (*Composées de rotations et de réflexions planes).
Soit E un plan euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion de E.

1. A quelle condition s et r commutent-elles ?
2. Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.

Exercice 20 (*Rotations de l'espace qui commutent).
Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1. Soit R une rotation de E. Montrer que s'il existe un vecteur non nul v tel que $R(v) = -v$, alors R est un demi-tour dont l'axe est orthogonal à v.
2. Soient R, R' deux rotations de E distinctes de l'identité, d'axes dirigés respectivement par les vecteurs unitaires u et u'. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que R et R' commutent.

Exercice 21 (*Relations coefficients/valeurs propres pour une matrice sym.).
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice réelle symétrique. Montrer que la somme des carrés de ses valeurs propres (comptées avec multiplicité) est égale à la somme des carrés de ses coefficients.

Exercice 22 (*Réciproque du théorème spectral).
Le théorème spectral dit que "toute matrice réelle symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$".

1. Montrer la réciproque : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, alors A est symétrique.
2. En déduire que dans un espace euclidien E, la matrice d'une projection orthogonale dans une base orthonormée est toujours symétrique.
3. En déduire que dans un espace euclidien E, la matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormée est toujours symétrique.