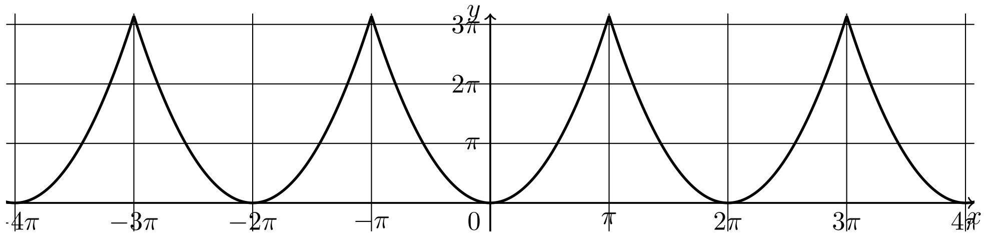
Corrigé du TD14 : Séries de Fourier

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1. Représentation graphique de f :*



On constate que f est continue sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori continue par morceaux.

2. *La fonction f étant paire, on a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Ensuite :*

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3};$$

$$\forall n \geq 1, \quad a_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

(en intégrant par parties). Donc la série de Fourier de f est $\dfrac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \dfrac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$.

3. *La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux : en effet, la restriction $f|_{]\pi;\pi[} : t \mapsto t^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et possède un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ à $[-\pi;\pi]$ (puisque la fonction $t \mapsto t^2$ et sa dérivée $t \mapsto 2t$ possèdent des limites finies en $-\pi^+$ et π^-). Donc on peut appliquer le théorème de Dirichlet : la série de Fourier de f converge en tout point $x \in \mathbb{R}$, vers $\frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right)$. En outre, la fonction f est également continue sur $\mathbb{R}$ (par périodicité, il suffit de montrer la continuité en $x = \pi$ et $x = -\pi$, et cela résulte du fait que $f(\pi) = f(-\pi) = \pi^2$), donc $\frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right) = f(x)$, ce qui montre le résultat voulu : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier $S(f)(x)$ converge, et $S(f)(x) = f(x)$.*

4. *D'après la question précédente, on a $S(f)(x) = f(x)$ pour tout réel x, c'est-à-dire*

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = f(x).$$

- *En évaluant en $x = 0$, on obtient : $\dfrac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \dfrac{4(-1)^n}{n^2} = f(0) = 0$, et donc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$.*
- *De même, en évaluant en $x = \pi$, on obtient : $\dfrac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \dfrac{4}{n^2} = f(\pi) = \pi^2$. Et donc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.*
- *Astuce : on retranche les deux sommes précédemment calculées :*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1-(-1)^n}{n^2}.$$

Or, $1 - (-1)^n = 0$ si n est pair et $1 - (-1)^n = 2$ si n est impair, donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{k\geq 0} \frac{2}{(2k+1)^2}.$$

Finalement, $$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

- *On applique la formule de Parseval (on peut car f est continue par morceaux, et même continue) :*

$$a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^4 \mathrm{d}t = \frac{\pi^4}{5},$$

ce qui amène $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}$.

Corrigé de l'exercice 2. *1. La restriction $g = f|_{[-\pi;\pi[}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, puisqu'elle coïncide avec la fonction exponentielle. De plus, g et g' (qui sont égales) possèdent une limite finie en π^- (car $\lim\limits_{t\to\pi^-} e^t = e^\pi$), donc g possède un prolongement à $[-\pi;\pi]$ de classe $\mathcal{C}^1$. Ceci montre que la restriction de f à la période fermée $[-\pi;\pi]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc par 2π-périodicité f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.*

2. Calculons les coefficients de Fourier de f :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculons :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

Il est plus facile de calculer :

$$a_n(f) + ib_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) + i\sin(nt))dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{int}dt = \left[\frac{e^{(1+in)t}}{(1+in)\pi}\right]_{-\pi}^{\pi},$$

soit

$$a_n(f) + ib_n(f) = \frac{e^{(1+in)\pi} - e^{-(1+in)\pi}}{(1+in)\pi} = \frac{(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})}{(1+in)\pi} = \frac{(-1)^n\,(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}(1-in).$$

En prenant les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\forall n \geq 1, \qquad a_n(f) = \frac{(-1)^n\,(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}, \qquad b_n(f) = -na_n(f),$$

donc la série de Fourier de f au point $x \in \mathbb{R}$ est :

$$a_0(f) + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}(\cos(nx) - n\sin(nx)).$$

3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet sa série de Fourier en tout point $x \in \mathbb{R}$ converge, et on a $S(f)(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f\right)$.

4. On utilise la série de Fourier en $x = \pi$: d'après la question précédente, elle converge et

$$S(f)(\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\pi^-} f + \lim_{\pi^+} f\right) = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}(\cos(n\pi) - n\sin(n\pi)) = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2},$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi(e^\pi + e^{-\pi})}{2(e^\pi - e^{-\pi})} - \frac{1}{2}.$$

Finalement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} + 1 = \frac{\pi(e^\pi + e^{-\pi})}{2(e^\pi - e^{-\pi})} + \frac{1}{2}$$

Corrigé de l'exercice 3. *1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et π-périodique ($T = \pi$), donc sa série de Fourier est :*

$$a_0(f) + \sum_{n\geq 1} (a_n(f)\cos(2nx) + b_n(f)\sin(2nx))$$

(ici, la pulsation vaut $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$).
Puisque f est paire, on a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$, ainsi que

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(t)dt = \frac{2}{\pi},$$

$$\forall n \geq 1, \quad a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\cos(2nt)dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)\cos(2nt)dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos(2nt)dt.$$

On linéarise : $\sin(t)\cos(2nt) = \frac{1}{2}(\sin(2nt+t) - \sin(2nt-t))$, *donc*

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t))\,dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1} + \frac{\cos((2n-1)t)}{2n-1}\right]_0^{\pi/2},$$

c'est-à-dire

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}.$$

Finalement, la série de Fourier de f en tout point $x \in \mathbb{R}$ est :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx).$$

2. Pour calculer les deux premières sommes, on utilise le théorème de Dirichlet : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, car sa restriction à la période fermée $[0;\pi]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (il s'agit de $x \mapsto \sin(x)$). Donc la série de Fourier de f converge en tout point et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f\right).$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{0^-} f + \lim_{0^+} f\right) = 0,$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$
En évaluant en $x = \pi/2$, on obtient

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{(\pi/2)^-} f + \lim_{(\pi/2)^+} f\right) = 1,$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{2-\pi}{4}$.

Enfin, la troisième somme se calcule avec la formule de Parseval (qui s'applique car f est continue par morceaux) : on a

$$a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)^2 dt$$

(avec convergence de la série), c'est-à-dire

$$\frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}.$$

On en déduit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

3. *Dans la question précédente, on a obtenu par le théorème de Dirichlet que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f\right).$$

Mais la fonction $f : x \mapsto |\sin(x)|$ est continue sur tout $\mathbb{R}$, donc $\frac{1}{2}\left(\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f\right) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx) = f(x) = |\sin(x)|.$$

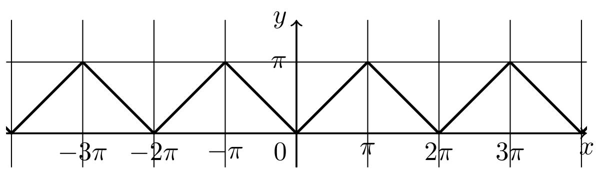
En utilisant la formule $\cos(2nx) = 1 - 2\sin^2(nx)$, ceci se réécrit :

$$\begin{aligned}
|\sin(x)| &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}(1-2\sin^2(nx)) \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{\pi(4n^2-1)}\sin^2(nx) \ , \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{\pi(4n^2-1)}\sin^2(nx)
\end{aligned}$$

puisque d'après la question 2., on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 4.

Représentation graphique de f :



La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux car les restrictions $f|_{]-\pi;0[} : t \mapsto -t$ et $f|_{]0;\pi[} : t \mapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et admettent des prolongements de classe $\mathcal{C}^1$ aux intervalles $[-\pi; 0]$ et $[0; \pi]$ respectivement. La fonction f est donc $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur la période $[-\pi; \pi]$, ce qui prouve qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Attention, il est faux de dire que la restriction $f|_{]-\pi;\pi[} : t \mapsto |t|$ est de classe $\mathcal{C}^1$, puisqu'elle n'est pas dérivable en 0 !

On peut donc appliquer le théorème de Dirichlet : la série de Fourier de f converge en tout point x, vers $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$. Mais f est, de plus, continue sur $\mathbb{R}$, donc $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-)) = f(x)$, ce qui montre que $S(f)(x) = f(x)$ pour tout réel x.
En outre, f étant paire, $S(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx)$, avec

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$$

(en intégrant par parties). On a donc $a_{2p} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_{2p+1} = -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, ce qui donne :

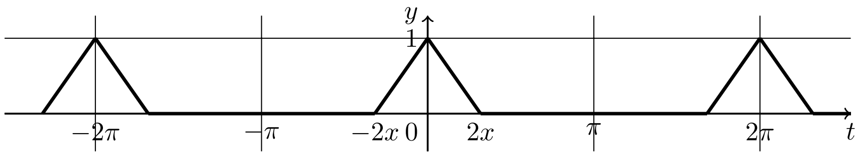
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos((2p+1)x).$$

Finalement, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = S(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos((2p+1)x),$$

et donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)$ *pour tout $x \in [-\pi;\pi]$.*

Corrigé de l'exercice 5. *1. Représentation graphique de f_x :*



2. *La fonction f_x est affine par morceaux, donc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, ce qui permet d'appliquer le théorème de Dirichlet. De plus, f_x est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $y \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f_x en y converge vers $f_x(y)$, c'est-à-dire $S(f_x)(y) = f_x(y)$.*
   Or, f_x est paire, donc $S(f_x)(y) = a_0(f_x) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f_x)\cos(ny)$, avec

$$a_0(f_x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_x(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f_x(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2x}\left(1 - \frac{t}{2x}\right)\mathrm{d}t = \frac{x}{\pi},$$

$$\forall n \geq 1, \quad a_n(f_x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_x(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{2x}\left(1 - \frac{t}{2x}\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1-\cos(2nx)}{\pi x n^2}$$

   (en intégrant par parties).
   On obtient donc le développement en série de Fourier de f_x :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_x(y) = S(f_x)(y) = \frac{x}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos(2nx)}{\pi x n^2}\cos(ny).$$

3. *Le développement en série de Fourier de f se réécrit :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_x(y) = \frac{x}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin^2(nx)}{\pi x n^2}\cos(ny).$$

   En évaluant cette égalité en $y = 0$, on obtient

$$f_x(0) = \frac{x}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin^2(nx)}{\pi x n^2},$$

   donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{x}{2}(\pi - x).$

4. *La formule de Parseval (qui s'applique car f est périodique et continue par morceaux) donne directement :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^4(nx)}{n^4} = x^3\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right).$$

Corrigé de l'exercice 6.
Si les coefficients de Fourier de f et g sont égaux, alors on a (par linéarité de l'intégrale) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f-g) = a_n(f) - a_n(g) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f-g) = b_n(f) - b_n(g) = 0,$$

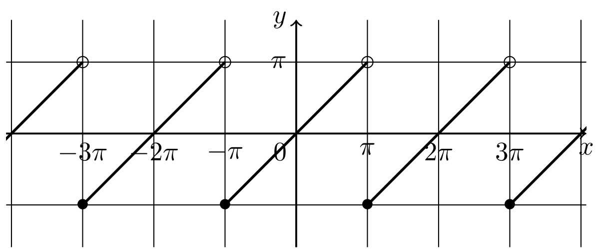
donc d'après la formule de Parseval (qui s'applique car $f-g$ est périodique et continue, donc continue par morceaux) :

$$\int_0^T (f(t)-g(t))^2 \mathrm{d}t = T\left(a_0^2(f-g) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2(f-g) + b_n^2(f-g)\right)\right) = 0.$$

Puisque la fonction $(f-g)^2$ est continue, positive, et d'intégrale nulle sur $[0;T]$, on en déduit que $(f-g)^2$ est nulle sur $[0;T]$, et donc que $f = g$ sur $[0;T]$. Par périodicité, on en conclut que $f = g$.
Attention ! On ne peut pas utiliser le théorème de Dirichlet ici, car il nous manque l'hypothèse de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 7.
Représentation graphique de f :



Attention, la fonction f n'est pas impaire (car par périodicité, on a $f(\pi) = f(-\pi) = -\pi$), mais on a quand même les $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, car la restriction $f_{|]-\pi;\pi[} : x \mapsto x$ est impaire. Quant aux $b_n(f)$:

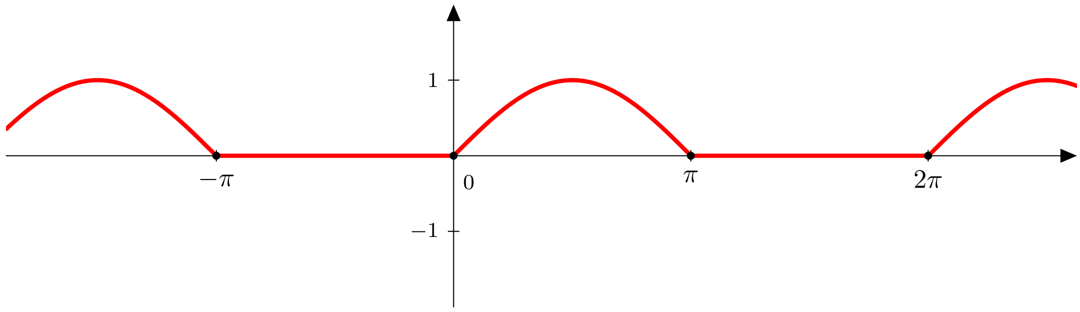
$$\forall n \geq 1, \quad b_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt = \frac{(-1)^{n+1}2}{n}$$

(par parité de la restriction $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ à $]-\pi,\pi[$).
Vu que f est continue par morceaux, on peut appliquer la formule de Parseval :

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3},$$

ce qui donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Corrigé de l'exercice 8. *1. Représentation graphique de f :*



2. *La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique car*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+2\pi) = \max(\sin(x+2\pi), 0) = \max(\sin(x), 0) = f(x).$$

Déterminons sa série de Fourier : en utilisant la nullité de f sur $[-\pi; 0]$, on a

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)dt = \frac{1}{\pi},$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)\right)dt \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left[-\dfrac{\cos((n+1)t)}{n+1} + \dfrac{\cos((n-1)t)}{n-1}\right]_0^{\pi} & si \quad n \geq 2 \\ \dfrac{1}{2\pi}\left[-\dfrac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi} & si \quad n = 1 \end{cases}, \\
&= \begin{cases} \dfrac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)} & si \quad n \geq 2 \\ 0 & si \quad n = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\sin(nt)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos((n-1)t) - \cos((n+1)t)\right)dt \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\sin((n-1)t)}{n-1} - \dfrac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi} & si \quad n \geq 2 \\ \dfrac{1}{2\pi}\left[t - \dfrac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} & si \quad n = 1 \end{cases}. \\
&= \begin{cases} 0 & si \quad n \geq 2 \\ \dfrac{1}{2} & si \quad n = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, la série de Fourier de f au point $x \in \mathbb{R}$ vaut :

$$S(f)(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)}\cos(nx) + \frac{1}{2}\sin(x).$$

On peut remarquer que les termes d'indice impair sont nuls, donc cela se réécrit :

$$S(f)(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(1-4p^2)} \cos(2px) + \frac{1}{2}\sin(x).$$

3. *Utilisons le théorème de Dirichlet :*
f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En effet, sa restriction à la période fermée $[-\pi;\pi]$ est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi \leq x < 0 \\ \sin(x) & si \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases},$$

donc les restrictions $f_{|]-\pi;0[}$, $f_{]0;\pi[}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et admettent des prolongements de classe $\mathcal{C}^1$ à $[-\pi;0]$ et $[0;\pi]$ respectivement (cela vient du fait que la fonction nulle et la fonction sin *sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$).*
Donc le théorème de Dirichlet s'applique : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $S(f)(x)$ converge, vers $\frac{1}{2}\left(\lim_{x^+} f + \lim_{x^-} f\right)$.
Mais il se trouve également que f est continue sur $\mathbb{R}$: en effet, f est clairement continue en tout point $x \in]-\pi;0[\cup]0;\pi[$, continue en 0 (car $\lim_{0^-} f = 0 = \lim_{0^+} f$), et continue en π (car $\lim_{\pi^-} f = 0 = \lim_{\pi^+} f$), donc continue en tout point de $]-\pi;\pi]$ et par périodicité, continue en tout point de $\mathbb{R}$.
En conséquence de la continuité de f, on obtient $\frac{1}{2}\left(\lim_{x^+} f + \lim_{x^-} f\right) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc la série de Fourier de f converge vers f en tout point $x \in \mathbb{R}$.

4. *D'après la question précédente, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{\pi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(1-4p^2)} \cos(2px) + \frac{1}{2}\sin(x) = f(x).$$

En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$, il vient $\cos(2px) = \cos(p\pi) = (-1)^p$, et donc

$$\frac{1}{\pi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^p}{\pi(1-4p^2)} + \frac{1}{2} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

En rajoutant le terme d'indice $p = 0$ de la somme, on obtient finalement :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1} = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Corrigé de l'exercice 9. 1. *Commençons par f' : en intégrant par parties, on obtient pour tout $n \in \mathbb{Z}$*

$$c_n(f') = \frac{1}{T}\int_0^T f'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left(\underbrace{\left[f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\right]_0^T}_{=f(T)-f(0)=0} - \mathrm{i}n\omega\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t\right) = -\mathrm{i}n\omega c_n(f).$$

On montre ensuite par une récurrence triviale que

$$\forall p \in \{1, \cdots, k\}, \qquad c_n(f^{(p)}) = (-\mathrm{i}n\omega)^p c_n(f).$$

2. *La formule précédente montre que*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(f) = \frac{1}{(-\mathrm{i}n\omega)^k} c_n(f^{(k)}) = \frac{1}{(-\mathrm{i}n\omega)^k T}\int_0^T f^{(k)}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t,$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n(f)| \leqslant \frac{1}{n^k \omega^k T} \int_0^T |f^{(k)}(t)| \mathrm{d}t = \frac{A_k}{n^k},$$

où $A_k = \frac{1}{\omega^k T} \int_0^T |f^{(k)}(t)| \mathrm{d}t$ *est une constante indépendante de* n.
Ceci montre bien que la suite $(n^k c_n(f))_{n \geqslant 1}$ *est bornée, ce qu'il fallait montrer.*

3. *Puisque* $c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + \mathrm{i} b_n(f))$ *pour tout* $n \geq 1$, *on a*

$$\forall n \geq 1, \qquad |a_n(f)| \leqslant \sqrt{a_n^2(f) + b_n^2(f)} = |a_n(f) + \mathrm{i} b_n(f)| = 2|c_n(f)|,$$

et de même $|b_n(f)| \leqslant 2|c_n(f)|$, *d'où le résultat voulu.*