TD14 : Séries de Fourier

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1 (Fonction carré par morceaux).
Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi[$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer la série de Fourier de f.
3. Montrer que f est égale à sa série de Fourier en tout point.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2 (Signal exponentiel par morceaux).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = e^x$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la série de Fourier de f en tout point $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f en x converge vers une valeur à préciser.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 3 (Signal en ponts).
On pose $f(t) = |\sin t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la série de Fourier de f en tout point.
2. En déduire la valeur des sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.
3. Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin^2(nx)$.

Exercice 4 (Signal triangulaire pair).
En utilisant le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = |x|$, montrer que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right).$$

Exercice 5 (*Signal en triangles espacés).
Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ fixé. On définit f_x continue, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et paire par :
f_x est affine sur $[0, 2x]$, $f_x(0) = 1$ et $\forall t \in [2x, \pi]$, $f_x(t) = 0$.

1. Tracer la représentation graphique de f_x.
2. Développer f_x en série de Fourier.
3. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(kx)}{k^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^4(kx)}{k^4}$.

Exercice 6 (Injectivité des coefficients de Fourier).
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et T-périodiques.
Montrer que si les coefficients de Fourier de f et de g sont égaux, alors $f = g$.

II Exercices supplémentaires

Exercice 7 (Signal en peigne pour calculer $\zeta(2)$).
Appliquer la formule de Parseval à la fonction f 2π-périodique définie par
$f(x) = x$ si $x \in [-\pi, \pi[$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 8 (Sinus tronqué).

1. Dessiner le graphe de la fonction définie par $f(x) = \max(\sin x, 0)$.
2. Déterminer la série de Fourier de f, notée $S(f)$.
3. Justifier que $S(f)$ converge vers f en tout point $x \in \mathbb{R}$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2 - 1}$.

Exercice 9 (*Coefficients de Fourier et régularité).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique de classe C^k (avec $k \in \mathbb{N}^*$).
On appelle *coefficients de Fourier exponentiels* de f la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{in\omega t}dt.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de $f^{(p)}$ en fonction de ceux de f (pour tout $p \in [\![1, k]\!]$).
2. Montrer que les coefficients de Fourier exponentiels de f vérifient $c_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.
3. En déduire que les coefficients de Fourier trigonométriques de f vérifient $a_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ et $b_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.

On peut en fait montrer que $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ lorsque $n \to +\infty$ mais c'est plus difficile...