

Corrigé du TD13 : Variables aléatoires discrètes

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1.

Puisque $Y(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$, la loi de Y est déterminée par les valeurs $\mathbb{P}(Y = k)$ pour $k \in \{3, 4, 5, 6\}$.

Tout d'abord, $\mathbb{P}(Y > 5) = \mathbb{P}(Y = 6)$ donc $\mathbb{P}(Y = 6) = \frac{1}{2}$.

Ensuite, $\mathbb{P}(Y < 5) = \mathbb{P}(Y \in \{3, 4\}) = \mathbb{P}(Y = 3) + \mathbb{P}(Y = 4) = 2\mathbb{P}(Y = 3)$ (car $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 4)$), donc

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 4) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y < 5) = \frac{1}{6}.$$

Finalement, $\mathbb{P}(Y = 5) = 1 - \mathbb{P}(Y < 5) - \mathbb{P}(Y > 5) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

La loi de Y est :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Y = 3) &= 1/6 \\ \mathbb{P}(Y = 4) &= 1/6 \\ \mathbb{P}(Y = 5) &= 1/6 \\ \mathbb{P}(Y = 6) &= 1/2 \end{cases}.$$

Corrigé de l'exercice 2. 1. On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$, et

2. On a $X(\Omega) = \{1, \dots, n-1\}$ (car il n'y a que $n-2$ boules rouges, donc après le $n-1^e$ tirage, on est sûr qu'une blanche sera déjà sortie). Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a

$$(X = k) = \begin{cases} R_1 \cap \dots \cap R_{k-1} \cap R_k^c & \text{si } k \geq 2 \\ R_1^c & \text{si } k = 1 \end{cases},$$

où R_p désigne l'événement "obtenir une boule rouge au p^e tirage".

D'où $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{n}$ et d'après la formule des probabilités composées :

$$\forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_{k-2}}(R_{k-1}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \dots \cap R_{k-1}}(R_k^c),$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{2}{n-k+1} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

(on remarque que cette formule est aussi valable pour $k = 1$).

On a finalement

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

L'espérance de X est

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \left(n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right) = n - \frac{2n-1}{3} = \frac{n+1}{3} \end{aligned}$$

3. La variable $X-1$ donne le nombre de boules rouges ayant été déjà tirées lorsque la première blanche sort. Il reste donc $(n-2) - (X-1) = n-1-X$ boules rouges. Ceci montre que $Y = n-1-X$. On en déduit que $E(Y) = n-1-E(X) = \frac{2n-4}{3}$.

Corrigé de l'exercice 3. 1. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, \dots, N\}$, où Ω l'ensemble des listes (a_1, \dots, a_n) avec chaque $a_i \in \{1, \dots, N\}$, donc $\#\Omega = N^n$ (puisque les tirages sont avec remise). On munit Ω de l'équiprobabilité.

- (a) L'événement $(Y \leq y)$ correspond aux listes (a_1, \dots, a_n) avec $1 \leq a_i \leq y$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Chaque a_i peut donc prendre y valeurs possibles, donc il y a y^n listes de ce type. D'où

$$\forall y \in \{1, \dots, N\}, \quad \mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{y^n}{N^n} = \left(\frac{y}{N}\right)^n$$

(et on remarque que cette formule reste vraie pour $y = 0$). On en déduit la loi de Y :

$$\forall y \in \{1, \dots, N\}, \quad \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(Y \leq y - 1) = \left(\frac{y}{N}\right)^n - \left(\frac{y-1}{N}\right)^n.$$

- (b) L'événement $(X \geq x)$ correspond aux listes (a_1, \dots, a_n) avec $x \leq a_i \leq N$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Chaque a_i peut donc prendre $N - x + 1$ valeurs possibles, donc il y a $(N - x + 1)^n$ listes de ce type. D'où

$$\forall x \in \{1, \dots, N\}, \quad \mathbb{P}(X \geq x) = \frac{(N - x + 1)^n}{N^n} = \left(\frac{N + 1 - x}{N}\right)^n$$

(et on remarque que cette formule reste vraie pour $x = N + 1$). On en déduit la loi de X :

$$\forall x \in \{1, \dots, N\}, \quad \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \geq x) - \mathbb{P}(X \geq x + 1) = \left(\frac{N + 1 - x}{N}\right)^n - \left(\frac{N - x}{N}\right)^n.$$

2. Cette fois-ci Ω est l'ensemble des parties à n éléments d'un ensemble à N éléments, donc $\#\Omega = \binom{N}{n}$ (puisque les tirages sont sans remise). On munit Ω de l'équiprobabilité.

- (a) On a $Y(\Omega) = \{n, n + 1, \dots, N\}$, et

$$\forall y \in \{n, n + 1, \dots, N\}, \quad \mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{\binom{y}{n}}{\binom{N}{n}}, \quad \mathbb{P}(Y = y) = \frac{\binom{y}{n} - \binom{y-1}{n}}{\binom{N}{n}}$$

(avec la convention $\binom{n-1}{n} = 0$).

- (b) On a $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, N - n + 1\}$, et

$$\forall x \in \{1, 2, \dots, N - n + 1\}, \quad \mathbb{P}(X \geq x) = \frac{\binom{N-x+1}{n}}{\binom{N}{n}}, \quad \mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{N-x+1}{n} - \binom{N-x}{n}}{\binom{N}{n}}$$

(avec la convention $\binom{n-1}{n} = 0$).

Corrigé de l'exercice 4. 1. On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ (après 4 tirages, il ne reste plus que 2 boules dans l'urne). Pour calculer la loi de X , notons R_k (resp. N_k , resp. J_k) l'événement "obtenir une boule rouge (resp. noire, resp. jaune) au k^e tirage". On a

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{6};$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(N_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(J_1 \cap R_2) = \frac{7}{30};$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(N_1 \cap J_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap J_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(J_1 \cap N_2 \cap N_3) \\ &\quad + \mathbb{P}(J_1 \cap N_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(J_1 \cap J_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(J_1 \cap J_2 \cap J_3) = \frac{3}{10}, \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = 1 - (\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)) = \frac{3}{10}.$$

2. On a

$$E(X) = \sum_{k=1}^4 k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6} + 2 * \frac{7}{30} + 3 * \frac{3}{10} + 4 * \frac{3}{10} = \frac{41}{15},$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^4 k^2\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6} + 4 * \frac{7}{30} + 9 * \frac{3}{10} + 16 * \frac{3}{10} = \frac{43}{5},$$

$$\text{donc } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{43}{5} - \left(\frac{41}{15}\right)^2 = \frac{254}{225}.$$

Corrigé de l'exercice 5. 1. Par hypothèse $X(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in \{1, \dots, 6\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \alpha k.$$

Puisque $\sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X = k) = 1$, on a donc $\alpha = \frac{1}{\sum_{k=1}^6 k} = \frac{1}{21}$.

La loi de X est donc donnée par :

$$\forall k \in \{1, \dots, 6\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{21}.$$

2. On a $E(X) = \sum_{k=1}^6 k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^6 \frac{k^2}{21} = \frac{91}{21}$.

3. On a $Y(\Omega) = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$, et

$$\forall k \in \{1, \dots, 6\}, \quad \mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{k}\right) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{21}.$$

D'après la formule de transfert :

$$E(Y) = E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

Corrigé de l'exercice 6.

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $B_k =$ "obtenir une boule blanche au k^{e} tirage", et $R_k =$ "obtenir une rouge au k^{e} tirage".

1. $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$, et X_1 suit évidemment une loi uniforme sur $\{0; 1\}$:

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2},$$

car $(X_1 = 0) = R_1$ et $(X_1 = 1) = B_1$.

2. $X_2(\Omega) = \{0; 1; 2\}$, et

- $(X_2 = 0) = R_1 \cap R_2$, donc

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

- $(X_2 = 1) = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$ et cette réunion est disjointe, donc

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(R_2) + \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

- $(X_2 = 2) = B_1 \cap B_2$, donc

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

La variable X_2 suit donc une loi uniforme sur $\{0; 1; 2\}$.

3. On a clairement $X_n(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$ pour tout $n \geq 1$. Montrons par récurrence que X_n suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$, c'est-à-dire que

$$\forall k \in \{0; \dots; n\}, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

- C'est vrai pour $n = 1$.

- Fixons $n \geq 1$ et supposons que $X_n \sim \mathcal{U}(\{0; \dots; n\})$.
Montrons alors que $X_{n+1} \sim \mathcal{U}(\{0; \dots; n+1\})$. Soit $0 \leq k \leq n+1$, calculons $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$.
D'après la formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événements $(X_n = l)_{0 \leq l \leq n}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{l=0}^n \mathbb{P}_{(X_n=l)}(X_{n+1} = k) \times \mathbb{P}(X_n = l).$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\mathbb{P}(X_n = l) = \frac{1}{n+1}$ pour tout l , donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n \mathbb{P}_{(X_n=l)}(X_{n+1} = k).$$

Si $(X_n = l)$ est réalisé, l'urne comportera $l+1$ boules blanches et $n-l+1$ boules rouges après n tirages, donc on aura :

$$\mathbb{P}_{(X_n=l)}(X_{n+1} = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \notin \{k-1; k+1\} \\ \frac{k}{n+2} & \text{si } l = k-1 \\ \frac{n-k+1}{n+2} & \text{si } l = k \end{cases}$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{n+1} (\mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) + \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k)) & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ \frac{1}{n+1} \mathbb{P}_{(X_n=n)}(X_{n+1} = n+1) & \text{si } k = n+1 \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{n+1} \left(\frac{k}{n+2} + \frac{n-k+1}{n+2} \right) & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} & \text{si } k = n+1 \end{cases}.$$

On trouve donc $\forall k \in \{0, \dots, n+1\}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2}$, ce qui montre bien que X_{n+1} suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, n+1\}$.

Corrigé de l'exercice 7. 1. On a $\frac{a}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a/2}{k} - \frac{a}{k+1} + \frac{a/2}{k+2}$ pour tout $k \geq 1$. Donc par télescopage

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{a}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{4} - \frac{a}{2(n+1)} + \frac{a}{2(n+2)},$$

ce qui montre (en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$) que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$ converge et sa somme vaut $\frac{a}{4}$.

En posant $a = 4$ et $p_k = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$, on a donc $p_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$, ce qui montre que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une probabilité sur \mathbb{N}^* .

2. Sous réserve de convergence (absolue) de cette série positive, on a $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(k+1)(k+2)}$. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{4}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{k+1} - \frac{4}{k+2} \right) = 2 - \frac{4}{n+2},$$

donc (en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$), on obtient la convergence de la série, donc l'existence de $E(X)$, qui vaut 2.

3. Puisque $E(X)$ existe, la variance $V(X)$ existe si, et seulement si, $E(X^2)$ existe, c'est-à-dire si, et seulement si, la série $\sum_{k \geq 1} k^2 \mathbb{P}(X = k)$ converge. Mais ce n'est pas le cas, car $k^2 \mathbb{P}(X = k) = \frac{4k}{(k+1)(k+2)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{k}$, et la série $\sum_{k \geq 1} \frac{4}{k}$ diverge. Finalement, la variable aléatoire X ne possède pas de variance.

Corrigé de l'exercice 8. 1. On doit avoir les $\mathbb{P}(X = k)$ positifs et $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$, donc $a \geq 0$

$$\text{et } a \times \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k k!}}_{=e^{1/2}} = 1, \text{ c'est-à-dire } a = e^{-1/2}.$$

2. On étudie la série $\sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k)$ (qui est à termes positifs). Sous réserve de convergence, on a

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{2^k (k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{k+1} k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{2^k k!}.$$

D'après la question précédente, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{2^k k!}$ converge, et sa somme vaut 1. Donc X possède une espérance finie, et $E(X) = \frac{1}{2}$.

3. On montre de même que X possède un moment d'ordre 2 : sous réserve de convergence,

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ak}{2^k (k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a(k+1)}{2^{k+1} k!},$$

c'est-à-dire

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{ak}{2^{k+1} k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{k+1} k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{2^{k+1} (k-1)!} + E(X) = \frac{1}{2} E(X) + E(X) = \frac{3}{4}.$$

Ceci montre que X possède une variance, égale à $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Remarque.

On aurait pu reconnaître une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$! On a d'après le cours $E(X) = V(X) = \lambda$.

Corrigé de l'exercice 9.

L'expérience aléatoire est la suivante : 15 fois de suite, et de manière indépendante, on teste la durée de vie d'une lampe, et la probabilité de "succès" (durée supérieure à 3000 heures) est $p = 0,8$ à chaque fois. La variable aléatoire X qui donne le nombre de "succès" obtenus prend ses valeurs dans $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, 15\}$ et suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 15$ et $p = 0,8$.

1. On a $E(X) = np = 15 * 0,8 = 12$. Le nombre de lampes ayant une durée de vie inférieure à 3000 heures étant $15 - X$, on a :

$$E(15 - X) = 15 - E(X) = 15 - 12 = 3,$$

donc il y a en moyenne 3 lampes de l'échantillon ayant une durée de vie inférieure à 3000 heures.

2. On cherche $\mathbb{P}(X = 15)$. Puis $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, on a

$$\mathbb{P}(X = 15) = \binom{15}{15} p^{15} (1-p)^0 = 0,8^{15} \simeq 3,5\%.$$

3. Cette fois, on cherche :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 13) &= \mathbb{P}(X = 13) + \mathbb{P}(X = 14) + \mathbb{P}(X = 15) \\ &= \binom{15}{13} p^{13} (1-p)^2 + \binom{15}{14} p^{14} (1-p)^1 + \binom{15}{15} p^{15} (1-p)^0 \\ &= 105 * 0,8^{13} * 0,2^2 + 15 * 0,8^{14} * 0,2 + 0,8^{15} \simeq 40\% \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 10. 1. X_1 suit évidemment une loi uniforme sur $\{1; 2\}$ (attention, ce n'est pas une loi de Bernoulli car l'image n'est pas $\{0; 1\}$ ici, donc $E(X_1) = \frac{3}{2}$ et $V(X_1) = \frac{1}{4}$.

2. On répète n fois la même expérience binaire (sauter d'une ou deux cases) de manière identique et indépendante, et à chaque fois, le paramètre de "succès" ("sauter d'une case" ici) est $p = \frac{1}{2}$. La variable Y_n , qui compte le nombre de succès au cours des n expériences, suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p = \frac{1}{2}$:

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}.$$

En outre, on sait que

$$E(Y_n) = np = \frac{n}{2}, \quad V(Y_n) = np(1-p) = \frac{n}{4}.$$

3. On a $X_n = 2n - Y_n$ (la puce se retrouve à la case $2n$ moins le nombre de fois où elle a sauté d'une case).

On en déduit la loi de probabilité de X_n : on a $X_n(\Omega) = \{n, n+1, \dots, 2n\}$, et

$$\forall k \in \{n, \dots, 2n\}, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y_n = 2n - k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{2n - k}.$$

En outre, en posant $a = -1$ et $b = 2n$, on a $X_n = aY_n + b$, donc

$$E(X_n) = aE(Y_n) + b = 2n - \frac{n}{2} = \frac{3n}{2},$$

$$V(X_n) = a^2V(Y_n) = V(Y_n) = \frac{n}{4}.$$

Corrigé de l'exercice 11. 1. L'événement $G_{1,2n+1}$ est réalisé si, et seulement si, J_1 a échoué aux lancers $1, 3, 5, \dots, 2n-1$, J_2 a échoué aux lancers $2, 4, 6, \dots, 2n$, et J_1 a réussi au lancer $2n+1$. Puisque tous les lancers sont indépendants, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(G_{1,2n+1}) = \underbrace{q_1q_2 \ q_1q_2 \ \dots \ q_1q_2}_{n \text{ fois}} \times p_1 = (q_1q_2)^n p_1.$$

2. Puisque J_1 ne joue pas aux rangs pairs, on a $\mathbb{P}(G_{1,2n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On a $G_1 = \bigcup_{k=1}^{+\infty} G_{1,k}$ et la réunion est disjointe, donc $\mathbb{P}(G_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_{1,k})$.

Puisque les termes de rangs pairs sont nuls, on a

$$\mathbb{P}(G_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(G_{1,2n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (q_1q_2)^n p_1 = \frac{p_1}{1 - q_1q_2}.$$

(on a bien $0 \leq q_1q_2 < 1$, car $p_1 \neq 0$ et $p_2 \neq 0$).

4. De même, puisque J_2 ne peut gagner qu'aux rangs pairs, on a

$$\mathbb{P}(G_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_{2,2n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_1^n q_2^{n-1} p_2 = \frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2}.$$

(puisque $G_{2,2n}$ est réalisé si, et seulement si, J_1 échoue aux lancers $1, 3, \dots, 2n-1$, J_2 échoue aux lancers $2, 4, \dots, 2n-2$ et réussit au lancer $2n$).

5. On a $\mathbb{P}(G_1 \cup G_2) = \mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) = \frac{p_1 + p_2 q_1}{1 - q_1 q_2} = \frac{1 - q_1 + (1 - q_2) q_1}{1 - q_1 q_2} = 1$,

donc l'événement $G_1 \cup G_2$ est presque sûr, ce qui montre que le jeu se termine presque sûrement.

6. On a $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(T = n) = \begin{cases} G_{1,2k+1} & \text{si } n = 2k + 1 \\ G_{2,2k} & \text{si } n = 2k \end{cases},$$

donc la loi de T est donnée par

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, & \mathbb{P}(T = 2k + 1) = (q_1 q_2)^k p_1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, & \mathbb{P}(T = 2k) = q_1^k q_2^{k-1} p_2. \end{cases}$$

7. Sous réserve de convergence des séries positives $\sum_{k=0}^{+\infty} (2k + 1)\mathbb{P}(T = 2k + 1)$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2k\mathbb{P}(T = 2k), \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(T = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k + 1)\mathbb{P}(T = 2k + 1) + \sum_{k=1}^{+\infty} 2k\mathbb{P}(T = 2k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (2k + 1)(q_1 q_2)^k p_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2k q_1^k q_2^{k-1} p_2 \\ &= 2p_1 \sum_{k=0}^{+\infty} k(q_1 q_2)^k + p_1 \sum_{k=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^k + 2q_1 p_2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(q_1 q_2)^{k-1} \\ &= 2p_1 q_1 q_2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(q_1 q_2)^{k-1} + p_1 \sum_{k=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^k + 2q_1 p_2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(q_1 q_2)^{k-1} \\ &= 2q_1(p_1 q_2 + p_2) \sum_{k=1}^{+\infty} k(q_1 q_2)^{k-1} + p_1 \sum_{k=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^k. \end{aligned}$$

Puisque $0 \leq q_1 q_2 < 1$, on reconnaît alors une série géométrique convergente :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^k = \frac{1}{1 - q_1 q_2},$$

et sa série dérivée :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(q_1 q_2)^{k-1} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right) \Big|_{x=q_1 q_2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) \Big|_{x=q_1 q_2} = \frac{1}{(1 - q_1 q_2)^2}.$$

Ceci montre que T admet une espérance finie et que :

$$E(T) = 2q_1(p_1 q_2 + p_2) \times \frac{1}{(1 - q_1 q_2)^2} + p_1 \times \frac{1}{1 - q_1 q_2}.$$

Mais $2q_1(p_1 q_2 + p_2) = 2q_1((1 - q_1)q_2 + 1 - q_2) = 2q_1(1 - q_1 q_2)$, donc

$$E(T) = \frac{2q_1(1 - q_1 q_2)}{(1 - q_1 q_2)^2} + \frac{p_1}{1 - q_1 q_2} = \frac{2q_1 + p_1}{1 - q_1 q_2},$$

c'est-à-dire $E(T) = \frac{2 - p_1}{1 - q_1 q_2}$.

8. On a $\mathbb{P}(G_1) = \frac{p_1}{1 - q_1 q_2}$ (d'après la question 3.), donc

$$\mathbb{P}(G_1) = \frac{1}{2} \iff 1 - q_1 q_2 = 2p_1 \iff p_1 + p_2 - p_1 p_2 = 2p_1 \iff p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}.$$

Or, d'après la question 5., $\mathbb{P}(G_1) = \frac{1}{2} \iff \mathbb{P}(G_2) = \frac{1}{2}$ (puisque $\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) = 1$), donc le jeu est équitable si, et seulement si, $p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}$.

9. Lorsque le jeu est équitable, on a $1 - q_1q_2 = 2p_1$ d'après la question précédente, donc $E(T) = \frac{2-p_1}{2p_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 12.

On a facilement $Y(\Omega) = \{0, \dots, n\}$. On applique la formule des probabilités totales : pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}_{(X=0)}(Y = k) + \mathbb{P}(X \neq 0) \times \mathbb{P}_{(X \neq 0)}(Y = k).$$

Par hypothèse, on a $\mathbb{P}_{(X=0)}(Y = k) = \frac{1}{n+1}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

Calculons la deuxième probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{(X \neq 0)}(Y = k) = \frac{\mathbb{P}((X \neq 0) \cap (Y = k))}{\mathbb{P}(X \neq 0)} = \frac{\mathbb{P}((X \neq 0) \cap (X = k))}{\mathbb{P}(X \neq 0)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ \frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X \neq 0)} & \text{si } 1 \leq k \leq n \end{cases}.$$

On en déduit la loi de Y :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = 0) \times \frac{1}{n+1} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{P}(X = 0) \times \frac{1}{n+1} + \mathbb{P}(X = k) & \text{si } 1 \leq k \leq n \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(Y = k) = \begin{cases} \frac{(1-p)^n}{n+1} & \text{si } k = 0 \\ \frac{(1-p)^n}{n+1} + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 1 \leq k \leq n \end{cases}.$$

Calcul de l'espérance de Y :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{(1-p)^n}{n+1} + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right) \\ &= \frac{(1-p)^n}{n+1} \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(1-p)^n}{2} + E(X) = \frac{n(1-p)^n}{2} + np \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 13.

Soit $x > 0$. L'événement $(\mu - x\sigma < X < \mu + x\sigma)$ est égal à $|X - \mu| < x\sigma$, donc

$$\mathbb{P}(\mu - x\sigma < X < \mu + x\sigma) = \mathbb{P}(|X - \mu| < x\sigma) = 1 - \mathbb{P}(|X - \mu| \geq x\sigma).$$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq x\sigma) = \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq x\sigma) \leq \frac{V(X)}{(x\sigma)^2} = \frac{1}{x^2},$$

donc

$$\mathbb{P}(\mu - x\sigma < X < \mu + x\sigma) \geq 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Corrigé de l'exercice 14. 1. On a $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = np(1-p)$, donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X_n - np| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - E(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} = \frac{np(1-p)}{\varepsilon^2}.$$

2. Fixons $k \in \mathbb{N}$. On va majorer $\mathbb{P}(X_n \leq k)$ par une quantité qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

La première question donne une majoration de $\mathbb{P}(X_n \in]-\infty, np - \varepsilon] \cup [np + \varepsilon; +\infty[)$ pour tout réel $\varepsilon > 0$. Pour $\varepsilon = \frac{np}{2}$ (qui est bien > 0), cela donne

$$\mathbb{P}\left(X_n \in]-\infty, \frac{np}{2}] \cup \left[\frac{3np}{2}; +\infty[\right) \leq \frac{np(1-p)}{\frac{n^2p^2}{4}} = \frac{4(1-p)}{np}.$$

Pour n suffisamment grand, on a $\frac{np}{2} \geq k$ (à partir de $n_0 = E(\frac{2k}{p}) + 1$), donc

$$n \geq n_0 \implies]-\infty; k] \subset]-\infty, \frac{np}{2}] \cup \left[\frac{3np}{2}; +\infty[\implies 0 \leq \mathbb{P}(X_n \leq k) \leq \frac{4(1-p)}{np},$$

d'où la limite nulle voulue.

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 15. 1. On peut modéliser cette expérience aléatoire par un univers fini Ω de cardinal $\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455$ (l'ensemble des parties à 3 éléments d'un ensemble à 15 éléments). On muni cet univers de l'équiprobabilité.

- (a) L'événement A^c correspond aux parties formées de trois ampoules non défectueuses, donc $\#A^c = \binom{10}{3} = 120$, et $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{120}{455} = \frac{335}{455}$.
- (b) On a $\#B = \binom{5}{3} = 10$, donc $\mathbb{P}(B) = \frac{10}{455}$.
- (c) L'événement C correspond aux parties formées d'une ampoule défectueuse et de deux ampoules non défectueuses, on a donc $\#C = \binom{5}{1} \times \binom{10}{2} = 225$, puis $\mathbb{P}(C) = \frac{225}{455}$.
2. (a) On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$, et

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(A^c) = \frac{120}{455} = \frac{24}{91} \\ \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(C) = \frac{225}{455} = \frac{45}{91} \\ \mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{10}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{100}{455} = \frac{20}{91} \\ \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(B) = \frac{2}{91} \end{cases}$$

(on vérifie bien que $\sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(X = k) = 1$.)

(b) La fonction de répartition de X , notée $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathbb{P}(X = 0) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{24}{91} \simeq 0,26 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{69}{91} \simeq 0,76 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{89}{91} \simeq 0,98 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}.$$

(c) $E(X) = \sum_{k=0}^3 k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 1) + 2 * \mathbb{P}(X = 2) + 3 * \mathbb{P}(X = 3) = 1$, puis $E(X^2) = \sum_{k=0}^3 k^2 \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 1) + 4 * \mathbb{P}(X = 2) + 9 * \mathbb{P}(X = 3) = \frac{11}{7}$, donc

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{11}{7} - 1^2 = \frac{4}{7}.$$

Corrigé de l'exercice 16. 1. Les valeurs possibles du produit X sont :

$$1 * 1, 1 * 2, 1 * 3, 1 * 4, 1 * 5, 2 * 1, 2 * 2, 2 * 3, 2 * 4, 3 * 1, 3 * 2, 3 * 3,$$

donc $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ (X prend 8 valeurs possibles).

Pour déterminer la loi de X , considérons les variables aléatoires U (donnant le numéro de l'urne) et B (donnant le numéro de la boule piochée). On a

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}((U = 1) \cap (B = 1)) = \mathbb{P}(U = 1) \times \mathbb{P}_{(U=1)}(B = 1) = \frac{1}{3} * \frac{1}{5} = \frac{1}{15};$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}((U = 1) \cap (B = 2)) + \mathbb{P}((U = 2) \cap (B = 1)) = \frac{1}{3} * \frac{1}{5} + \frac{1}{3} * \frac{1}{4} = \frac{3}{20};$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}((U = 1) \cap (B = 3)) + \mathbb{P}((U = 3) \cap (B = 1)) = \frac{1}{3} * \frac{1}{5} + \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{8}{45};$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}((U = 1) \cap (B = 4)) + \mathbb{P}((U = 2) \cap (B = 2)) = \frac{1}{3} * \frac{1}{5} + \frac{1}{3} * \frac{1}{4} = \frac{3}{20};$$

$$\mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}((U = 1) \cap (B = 5)) = \frac{1}{3} * \frac{1}{5} = \frac{1}{15};$$

$$\mathbb{P}(X = 6) = \mathbb{P}((U = 2) \cap (B = 3)) + \mathbb{P}((U = 3) \cap (B = 2)) = \frac{1}{3} * \frac{1}{4} + \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{7}{36};$$

$$\mathbb{P}(X = 8) = \mathbb{P}((U = 2) \cap (B = 4)) = \frac{1}{3} * \frac{1}{4} = \frac{1}{12};$$

$$\mathbb{P}(X = 9) = \mathbb{P}((U = 3) \cap (B = 3)) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

(on vérifie que la somme fait bien 1).

2. La probabilité cherchée est $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - (\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)) = \frac{47}{60}$.

3. On a

$$E(X) = 1 * \frac{1}{15} + 2 * \frac{3}{20} + 3 * \frac{8}{45} + 4 * \frac{3}{20} + 5 * \frac{1}{15} + 6 * \frac{7}{36} + 8 * \frac{1}{12} + 9 * \frac{1}{9} = \frac{14}{3} \simeq 4,66,$$

puis

$$E(X^2) = 1^2 * \frac{1}{15} + 2^2 * \frac{3}{20} + 3^2 * \frac{8}{45} + 4^2 * \frac{3}{20} + 5^2 * \frac{1}{15} + 6^2 * \frac{7}{36} + 8^2 * \frac{1}{12} + 9^2 * \frac{1}{9} = \frac{83}{3},$$

$$d'où V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{83}{3} - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{53}{9}.$$

Corrigé de l'exercice 17. 1. L'expérience aléatoire est la suivante : on considère 20 clients indépendamment les uns des autres, et chacun a une probabilité $p = 0,75$ d'embarquer dans l'avion. La variable aléatoire X (donnant le nombre de clients qui embarquent) suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 20$ et $p = 0,75$.

On a donc $E(X) = np = 20 * 0,75 = 15$ et $V(X) = np(1 - p) = 15 * 0,25 = 3,75$.

2. On a $\mathbb{P}(X = 15) = \binom{20}{15} p^{15} (1 - p)^5 = 15504 * 0,75^{15} * 0,25^5 \simeq 20\%$.

3. Le fait d'effectuer 21 réservations correspond à modifier le paramètre n de la loi binomiale suivie par X . On a désormais $n = 21$, donc la probabilité cherchée est :

$$\mathbb{P}(X \leq 20) = 1 - \mathbb{P}(X = 21) = 1 - p^{21} = 1 - 0,75^{21} \simeq 99,8\%.$$

Corrigé de l'exercice 18.

Notation : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T_k désigne le résultat du k^e tirage. C'est une variable aléatoire avec $T_k(\Omega) = \{1, \dots, n\}$, qui suit une loi uniforme.

1. On a $X(\Omega) = \{2, \dots, n + 1\}$. En effet, le nombre minimal de tirages est 2 (on a $X = 2$ ssi $T_2 \geq T_1$), et le nombre maximal est $n + 1$ (cas où $T_1 > T_2 > \dots > T_n$, qui entraîne automatiquement $T_1 = n, T_2 = n - 1, \dots, T_n = 1$ et $T_{n+1} \geq T_n$).

2. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- si $k \in \{0, 1\}$, alors l'événement $(X > k)$ est certain, donc $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X > 1) = 1$.
- si $k \in \{2, \dots, n\}$, alors l'événement $(X > k)$ est réalisé ssi $(T_1 > T_2 > \dots > T_k)$, donc

$$\mathbb{P}(X > k) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k},$$

car sur les n^k suites $(t_1, \dots, t_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ (toutes équiprobables), il y en a seulement $\binom{n}{k}$ qui sont strictement décroissantes (et autant qui sont strictement croissantes d'ailleurs).

- si $k \geq n + 1$, alors l'événement $(X > k)$ est impossible, donc $\mathbb{P}(X > k) = 0$.

$$\text{Finalement, } \mathbb{P}(X > k) = \begin{cases} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} & \text{si } k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & \text{si } k \geq n + 1 \end{cases}.$$

3. Calculons $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \{2, \dots, n+1\}$.

On a $(X > k) \subset (X > k-1)$, et $(X = k) = (X > k-1) \setminus (X > k)$, donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) = \begin{cases} \frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} & \text{si } 2 \leq k \leq n \\ \frac{1}{n^n} & \text{si } k = n+1 \end{cases}.$$

Remarque.

On peut vérifier que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=2}^n \left(\frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \right) + \frac{1}{n^n} = \left(\frac{\binom{n}{1}}{n^1} - \frac{\binom{n}{n}}{n^n} \right) + \frac{1}{n^n} = 1.$$

Corrigé de l'exercice 19. 1. D'une part, on a en utilisant la formule du binôme :

$$P(X) = \sum_{k=n-1}^{2n-1} \left(\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} X^l \right) = \sum_{l=0}^{2n-1} \underbrace{\left(\sum_{k=l}^{2n-1} \binom{k}{l} \right)}_{=c_l} X^l.$$

Le coefficient d'ordre $n-1$ vaut :

$$c_{n-1} = \sum_{k=n-1}^{2n-1} \binom{k}{n-1} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \dots + \binom{2n-1}{n-1}.$$

D'autre part,

$$P(X) = (1+X)^{n-1} (1 + (1+X) + \dots + (1+X)^{n+1}) = \frac{(1+X)^{2n} - (1+X)^{n-1}}{X},$$

donc c_{n-1} est aussi le coefficient d'ordre n du polynôme

$$Q(X) = (1+X)^{2n} - (1+X)^{n-1} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k,$$

ce qui amène $c_{n-1} = \binom{2n}{n}$, ce qu'il fallait montrer.

On peut aussi le voir de manière combinatoire : le nombre de façons d'occuper n cases parmi $2n$ est $\binom{2n}{n}$. Parmi ces répartitions :

- il y a $\binom{n-1}{n-1} = 1$ répartition où la dernière case occupée est la n^e ;
- il y a $\binom{n}{n-1} = 1$ répartition où la dernière case occupée est la $n+1^e$;
- il y a $\binom{n+1}{n-1} = 1$ répartition où la dernière case occupée est la $n+2^e$; ...
- il y a $\binom{2n-1}{n-1} = 1$ répartition où la dernière case occupée est la $2n^e$;

2. Pour décrire l'expérience aléatoire, on choisit Ω comme l'ensemble des listes (a_1, \dots, a_{2n}) qui comportent exactement n zéros et n "1" (les "1" correspondant aux boules noires). C'est un univers fini de cardinal $\binom{2n}{n}$.

(a) On a $X(\Omega) = \{n, \dots, 2n\}$, et pour tout $k \in \{n, \dots, 2n\}$, l'événement $(X = k)$ correspond aux listes (a_1, \dots, a_{2n}) telles que $a_k = 1$ et $a_{k+1} = \dots = a_{2n} = 0$. Il y en a $\binom{k-1}{n-1}$ (autant que de façons de placer exactement $n-1$ boules noires dans les $k-1$ premiers tirages). On a donc

$$\forall k \in \{n, \dots, 2n\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}.$$

$$(b) E(X) = \sum_{k=n}^{2n} k \mathbb{P}(X = k) = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n}.$$

En utilisant la formule de la question 1., on trouve

$$E(X) = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \left(\binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n+1}{n} \right) = \frac{n(2n+1)}{n+1}.$$

Corrigé de l'exercice 20. 1. (a) On a $T_3(\Omega) = \{2, 3, 4\}$, et

$$\mathbb{P}(T_3 = 2) = \frac{3}{9}, \quad \mathbb{P}(T_3 = 3) = \frac{4}{9}, \quad \mathbb{P}(T_3 = 4) = \frac{2}{9}.$$

$$(b) \text{ On a } E(T_3) = \sum_{k=2}^4 k \mathbb{P}(T_3 = k) = \frac{26}{9}, \text{ et par le théorème de transfert :}$$

$$E(T_3^2) = \sum_{k=2}^4 k^2 \mathbb{P}(T_3 = k) = \frac{80}{9}. \text{ Donc d'après la formule de Huygens :}$$

$$V(T_3) = E(T_3^2) - E(T_3)^2 = \frac{44}{81}.$$

2. (a) On a $T_N(\Omega) = \{2, \dots, N+1\}$, car la répétition intervient au plus vite au deuxième tirage (si on tire la même boule qu'au premier tirage), et au plus tard au $(N+1)^e$ (si on a tiré une fois chaque boule lors des N premiers tirages).

(b) Notons X_i le numéro de la boule obtenue au i^e tirage, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Vu que l'on fait des tirages successifs avec remise, les tirages sont mutuellement indépendants, et chaque X_i suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \dots, N\}$.

Avec ces notations, on a

$$(T_N = 2) = (X_1 = X_2) = \bigcup_{1 \leq k \leq N} ((X_1 = k) \cap (X_2 = k)),$$

et cette réunion est disjointe. On en déduit par indépendance mutuelle des tirages :

$$\mathbb{P}(T_N = 2) = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(X_1 = k) * \mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{k=1}^N (1/N)^2 = \frac{1}{N}.$$

De même,

$$(T_N = 3) = \bigcup_{(i,j) \in [1;N]^2, i \neq j} ((X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 \in \{i, j\})).$$

et cette réunion est disjointe. On en déduit par indépendance mutuelle des tirages :

$$\mathbb{P}(T_N = 3) = \sum_{(i,j) \in [1;N]^2, i \neq j} \mathbb{P}(X_1 = i) * \mathbb{P}(X_2 = j) * \mathbb{P}(X_3 \in \{i, j\}) = \sum_{(i,j) \in [1;N]^2, i \neq j} \frac{2}{N^3}.$$

Vu que le nombre de couples $(i, j) \in [1; N]^2$ tels que $i \neq j$ est $N(N-1)$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(T_N = 3) = N(N-1) * \frac{2}{N^3} = \frac{2(N-1)}{N^2}.$$

Enfin, l'événement $T_N = N+1$ est réalisé si et seulement si (X_1, X_2, \dots, X_N) est une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, N\}$. Il y a donc $N!$ listes qui conviennent parmi N^N listes équiprobables, ce qui montre que

$$\mathbb{P}(T_N = N+1) = \frac{N!}{N^N}.$$

- (c) Fixons $k \in \{1, \dots, N\}$. L'événement $(T_N > k)$ est réalisé si et seulement si la liste (X_1, \dots, X_k) est composée d'éléments distincts de $\{1, \dots, N\}$.
Il y a donc $N(N-1) \cdots (N-k+1)$ listes qui conviennent parmi N^k listes équiprobables, ce qui montre que

$$\mathbb{P}(T_N > k) = \frac{N(N-1) \cdots (N-k+1)}{N^k} = \frac{N!}{(N-k)!N^k}.$$