TD13 : Variables aléatoires discrètes

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1.
Soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle discrète telle que $Y(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$, et

$$\mathbb{P}(Y < 5) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(Y > 5) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 4).$$

Déterminer la loi de Y.

Exercice 2 (Première boule blanche tirée).
Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges (avec $n \geq 3$). On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X lorsque $n = 5$.
2. Déterminer la loi de X dans le cas général, ainsi que $E(X)$.
3. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.

Exercice 3 (*Plus grand et plus petit numéro).
Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages successifs (avec $1 \leq n \leq N$), et on s'intéresse à X, le plus petit numéro obtenu, et Y, le plus grand numéro obtenu.

1. On suppose que les tirages sont effectués **avec remise**.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(Y \leq y)$ pour tout $y \in [\![1; N]\!]$, et en déduire la loi de Y.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X \geq x)$ pour tout $x \in [\![1; N]\!]$, et en déduire la loi de X.
2. Faire de même si les tirages sont effectués **sans remise**.

Exercice 4.
On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes.
On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des boules de 2 couleurs différentes dans l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 5 (Dé truqué).
On considère un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face $n°k$ soit proportionnelle à k. On suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire donnant le résultat du lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer son espérance $E(X)$.
3. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice 6 (*Tirages successifs dans une urne).
Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de celle qui vient d'être tirée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Déterminer la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   On pourra procéder par récurrence sur n.

Exercice 7 (Une loi discrète).
Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire discrète $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)} \qquad ?$$
   Indication : on pourra décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$ en éléments simples.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? si oui, la calculer.
3. La variable aléatoire X admet-elle une variance ? si oui, la calculer.

Exercice 8.
Soit a un nombre réel, et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{2^k k!}.$$

1. Déterminer a.
2. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
3. X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Exercice 9.
Une entreprise fabrique des lampes, dont 80% durent plus de 3000 heures. Des tests sont effectués sur des échantillons de taille $n = 15$.

1. Quelle est le nombre moyen de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les lampes de l'échantillon durent plus de 3000 heures ?
3. Quelle est la probabilité que 13 lampes ou plus durent plus de 3000 heures ?

Exercice 10 (Sauts de puce).
Une piste rectiligne est divisée en cases, numérotées $0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$ de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de 1 ou 2 cases au hasard, à chaque saut. Au départ, elle est sur la case numéro 0. Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1, et calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. On appelle Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de Y_n, puis $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
3. Déterminer X_n en fonction de Y_n et en déduire la loi de probabilité de X_n, puis $E(X_n)$, $V(X_n)$.

Exercice 11 (Jeu de bowling – Extrait du concours Agro-Veto).
Deux joueurs nommés J_1 et J_2 jouent au bowling en version accélérée : il n'y a qu'une quille sur la piste, ils lancent une boule chacun, l'un après l'autre, c'est J_1 qui commence, et le premier qui renverse la quille a gagné (et la partie s'arrête). Si personne n'a gagné lors des deux premiers lancers, alors on recommence un tour et on continue ainsi jusqu'à ce que l'un des joueurs gagne. Ainsi, un joueur qui n'a pas gagné à son tour peut avoir de nouveau la main et n'est pas immédiatement éliminé.
Les deux joueurs n'ont pas la même habileté : ainsi, on désignera par $p_k \in]0; 1]$ la probabilité pour le joueur J_k de renverser la quille, pour tout $k \in \{1; 2\}$. On posera aussi $q_k = 1 - p_k$ pour $k \in \{1; 2\}$.
L'événement « J_k gagne »sera noté G_k et on supposera l'indépendance mutuelle de tous les lancers des joueurs entre eux.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera également $G_{k,n}$ l'événement « J_k gagne au lancer numéro n » (on numérote les lancers de manière globale, pas par joueur).

1. Montrer que $\mathbb{P}(G_{1,2n+1}) = (q_1q_2)^n p_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Que valent les $\mathbb{P}(G_{1,2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?
3. En déduire que $\mathbb{P}(G_1) = \dfrac{p_1}{1 - q_1q_2}$.
4. Calculer de même $\mathbb{P}(G_2)$.
5. Montrer que le jeu se termine presque sûrement (avec probabilité 1).

On désigne par T la variable aléatoire donnant le nombre de coups joués jusqu'à la fin de la partie.

6. Déterminer la loi de T (on distinguera les $(T = n)$ suivant la parité de n).
7. Montrer que T possède une espérance finie et que $E(T) = \dfrac{2 - p_1}{1 - q_1q_2}$.

On dit que le jeu est équitable si $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_2) = \frac{1}{2}$.

8. Montrer que le jeu est équitable si, et seulement si, $p_2 = \dfrac{p_1}{1 - p_1}$.
9. Exprimer $E(T)$ uniquement en fonction de p_1 lorsque le jeu est équitable.

Exercice 12.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On définit la variable Y par :
$Y = X$ si $X \neq 0$, et Y prend une valeur de $[\![0, n]\!]$ au hasard si $X = 0$.
Déterminer la loi de Y et son espérance.

Exercice 13.
Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance μ et de variance σ^2. Montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \mathbb{P}(\mu - x\sigma < X < \mu + x\sigma) \geq 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Exercice 14.
Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p \in]0; 1[$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(|X_n - np| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{np(1-p)}{\varepsilon^2}$ pour tout réel $\varepsilon > 0$.
2. En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n \leq k) = 0$.

II Exercices supplémentaires

Exercice 15.
On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses.

1. Calculer la probabilité des événements :
   - A : au moins une ampoule est défectueuse ;
   - B : les 3 ampoules sont défectueuses ;
   - C : exactement une ampoule est défectueuse.
2. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'ampoules défectueuses obtenues.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Tracer la fonction de répartition de X.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 16.
On dispose de trois urnes numérotées 1, 2 et 3.

- Dans la première urne, il y a cinq boules numérotées 1, 2, 3, 4 et 5.
- Dans la deuxième urne, il y a quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4.
- Dans la troisième urne, il y a trois boules numérotées 1, 2 et 3.

On choisit une urne au hasard et on pioche une boule au hasard dans l'urne choisie. On considère X le nombre obtenu en multipliant le numéro de l'urne par le numéro de la boule piochée.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
   On pourra considérer les variables aléatoires U (donnant le numéro de l'urne) et B (donnant le numéro de la boule piochée.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur strictement à 2 ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 17.
Un avion peut accueillir 20 personnes. Des statistiques montrent qu'un quart des clients ayant réservé ne prennent pas le vol. On considère que pour chaque avion il y a exactement 20 réservations.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de clients qui se présentent effectivement à l'embarquement.

1. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.
2. Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?
3. La compagnie aérienne décide maintenant d'effectuer 21 réservations pour son avion de 20 places. Déterminer la probabilité que toutes les personnes qui se présentent à l'embarquement puissent s'asseoir dans l'avion.

Exercice 18 (*).
Soit un entier $n \geq 1$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire des boules successivement avec remise jusqu'à ce qu'on obtienne un numéro supérieur ou égal à celui de la boule précédente. Soit X la variable aléatoire discrète valant le nombre de tirages effectués avant de s'arrêter.

1. Préciser $X(\Omega)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Indication : combien y a-t-il de suites $(t_1, \cdots, t_k) \in \{1, \cdots, n\}^k$ vérifiant $t_1 > t_2 > \cdots > t_k$?
3. En déduire la loi de probabilité de X.

Exercice 19 (*).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En identifiant les coefficients du polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=n-1}^{2n-1} (1+X)^k$, montrer que $\binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n}{n}$.
2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules une à une sans remise. Soit X le rang de sortie de la dernière boule noire.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Calculer $E(X)$.

Exercice 20 (*).
On considère un entier $N \geq 3$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On y effectue des tirages successifs avec remise, jusqu'à obtenir pour la première fois un numéro déjà tiré. On note alors T_N le rang aléatoire de ce dernier tirage.
C'est ainsi, par exemple, que si on a obtenu successivement les numéros $1-5-4-7-3-5$, la variable T_N prend la valeur 6, alors que si l'on a obtenu $5-4-2-2$, la variable T_N prend la valeur 4.

1. Dans cette question, on suppose $N = 3$.
   (a) Déterminer la loi de T_3.
   (b) Calculer son espérance et sa variance.
2. On revient au cas général $N \geq 3$.
   (a) Déterminer l'image de T_N.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(T_N = 2)$, $\mathbb{P}(T_N = 3)$ et $\mathbb{P}(T_N = N + 1)$.

(c) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$, on a

$$\mathbb{P}(T_N > k) = \frac{N!}{(N-k)!N^k} = \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{N}\right).$$