Corrigé du TD12 : Espaces préhilbertiens et euclidiens

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1.
- *L'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est clairement une forme bilinéaire symétrique (elle est symétrique et linéaire par rapport à sa première variable).*
- *Elle est définie-positive car pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$:*

$$\varphi(P, P) = P(0)^2 + P'(0)^2 + P''(0)^2 \geq 0$$

(une somme de carrés de réels est toujours positive).

$$\varphi(P, P) = 0 \implies P(0)^2 + P'(0)^2 + P''(0)^2 = 0 \implies P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$$

(car les trois termes de la somme sont positifs). Ceci implique que 0 est racine triple du polynôme P, i.e. que X^3 divise P. Mais $\deg(P) \leq 2$, donc on a nécessairement $P = 0$.

Corrigé de l'exercice 2.
- *Pour toutes fonctions $f, g \in E$, $(f|g)$ a bien un sens car $f'g'$ est une fonction continue, donc intégrable sur $[0, 1]$.*
- *L'application $(. \mid .)$ est une forme bilinéaire symétrique $E^2 \to \mathbb{R}$: en effet, pour tout $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$(g|f) = g(0)f(0) + \int_{[0,1]} g'f' = f(0)g(0) + \int_{[0,1]} f'g' = (f|g),$$

$$\begin{aligned} (\lambda f + g|h) &= (\lambda f + g)(0)h(0) + \textstyle\int_{[0,1]}(\lambda f + g)'h' \\ &= \lambda \left(f(0)h(0) + \textstyle\int_{[0,1]} f'h' \right) + g(0)h(0) + \textstyle\int_{[0,1]} g'h' = \lambda(f|h) + (g|h) \end{aligned}$$

- *Cette forme bilinéaire symétrique est définie-positive car pour tout $f \in E$,*

$$(f|f) = f(0)^2 + \int_{[0,1]} f'(t)^2 dt \geq 0,$$

et

$$(f|f) = 0 \implies f(0)^2 + \int_{[0,1]} f'(t)^2 dt = 0 \implies \begin{cases} f(0)^2 = 0 \\ \displaystyle\int_{[0,1]} f'(t)^2 dt = 0 \end{cases},$$

car les deux termes de la somme sont positifs.
Or, $\displaystyle\int_{[0,1]} f'(t)^2 dt = 0$ implique $f'^2 = 0$ sur $[0, 1]$ car la fonction f'^2 est **continue et positive** *sur l'intervalle $[0; 1]$ (non vide et non réduit à un point). On a donc*

$$(f|f) = 0 \implies \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1] \end{cases},$$

ce qui implique bien que f est constante égale à 0 sur l'intervalle $[0; 1]$.

Corrigé de l'exercice 3. *1. On remarque que :*

$$F = \{(y - 3z + t, y, z, t)/(y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} = Vect((1, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$$

La famille $(u_1, u_2, u_3) = ((1, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$ est donc une famille génératrice de F qui est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
On montre facilement que cette famille est aussi libre.
Donc $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de F.

2. *Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}$.*
   — *On pose* $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.
   — *On pose* $\tilde{v_2} = u_2 - \langle u_2; v_1\rangle v_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\3\\2\\0\end{pmatrix}$ *puis* $v_2 = \dfrac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}-3\\3\\2\\0\end{pmatrix}$.
   — *On pose* $\tilde{v_3} = u_3 - \langle u_3; v_1\rangle v_1 - \langle u_3; v_2\rangle v_2 = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\11\end{pmatrix}$ *puis*
   $v_3 = \dfrac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{132}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\11\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2\sqrt{33}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\11\end{pmatrix}$.
   La famille (v_1, v_2, v_3) est une base orthonormée du sous-espace vectoriel F.

Corrigé de l'exercice 4. *1. (a) On a* $\lim_{t\to+\infty} t^2P(t)e^{-t} = 0$ *car $t^2P(t)$ est un polynôme qui est négligeable devant l'exponentielle.*

(b) Donc, il existe $c > 0$ tel que $\forall t \geqslant c$, $\left|t^2 \times P(t)e^{-t}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow |P(t)e^{-t}| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.
Or, $\int_c^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}dt$ *est convergente (intégrale de Riemann avec $2 > 1$) et donc* $\int_c^{+\infty} |P(t)e^{-t}|dt$ *est convergente.*
Comme il n'y a pas de problème en 0 (la fonction $t \mapsto P(t)e^{-t}$ étant continue sur $\mathbb{R}$), l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt$ *est convergente.*

2. *(a) $P \times Q$ est un polynôme donc, d'après la question 1., l'intégrale* $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ *est convergente et donc $\langle P|Q\rangle \in \mathbb{R}$.*

   (b) — *Il est évident que $\langle P|Q\rangle = \langle Q|P\rangle$ c'est-à-dire l'application $\langle .|.\rangle$ est* ***symétrique****.*
   — *Soit R un autre vecteur de E et λ un réel. On a :*

$$\begin{aligned}\langle P + \lambda R|Q\rangle &= \int_0^{+\infty} (P(t) + \lambda R(t))Q(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt + \lambda \int_0^{+\infty} R(t)Q(t)e^{-t}dt \\ &= \langle P|Q\rangle + \lambda \langle R|Q\rangle .\end{aligned}$$

   L'application $\langle .|.\rangle$ linéaire par rapport à la première variable et symétrique donc ***bilinéaire****.*
   — $\langle P|P\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)^2e^{-t}dt \geqslant 0$ *(intégrale d'une fonction positive et les bornes sont dans le bon ordre).*
   — $\langle P|P\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} P(t)^2e^{-t}dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0; +\infty[,\ P(t)^2e^{-t} = 0$ *(car la fonction $t \to P(t)^2e^{-t}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$.)*
   On a donc $\langle P|P\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0; +\infty[,\ P(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = 0$ car un polynôme qui est nul sur un intervalle est en fait nul partout (puisqu'il possède alors une infinité de racines).
   Donc $\langle P|P\rangle = 0 \Leftrightarrow P = 0$.
   L'application $\langle .|.\rangle$ est donc bien ***définie-positive****.*

   L'application $\langle .|.\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. *On considère $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2) = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*
   — *On pose* $Q_0 = \dfrac{P_0}{\|P_0\|} = 1$ *puisque*

$$\|P_0\|^2 = \langle P_0|P_0\rangle = \langle 1|1\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$$

— *On pose* $\tilde{Q}_1 = P_1 - \langle P_1|Q_0\rangle Q_0 = X - \langle X|1\rangle 1$.
Par une intégration par parties rapide on a $\langle X|1\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 1$. *Ainsi* $\tilde{Q}_1 = X - 1$.
On pose ensuite $Q_1 = \frac{\tilde{Q}_1}{\|\tilde{Q}_1\|}$. *Mais*

$$\|\tilde{Q}_1\|^2 = \langle X-1|X-1\rangle = \langle X|X\rangle - 2\langle X|1\rangle + \langle 1|1\rangle = \langle X|X\rangle - 1$$

et $\langle X|X\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt = 2$ *(par IPP encore), donc* $\|\tilde{Q}_1\|^2 = 2-1 = 1$, *et* $Q_1 = X - 1$.

— *On pose*

$$\tilde{Q}_2 = P_2 - \langle P_2|Q_0\rangle Q_0 - \langle P_2|Q_1\rangle Q_1 = X^2 - \langle X^2|1\rangle 1 - \langle X^2|X-1\rangle(X-1).$$

Mais

$$\langle X^2|1\rangle = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt = 2,$$

$$\langle X^2|X-1\rangle = \langle X^2|X\rangle - \langle X^2|1\rangle = \int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt - 2 = 6 - 2 = 4$$

(encore par IPP).
Donc $\tilde{Q}_2 = X^2 - 4X + 2$, *et on pose* $Q_2 = \frac{\tilde{Q}_2}{\|\tilde{Q}_2\|}$. *Enfin :*

$$\|\tilde{Q}_2\|^2 = \langle X^2-4X+2|X^2-4X+2\rangle = \langle X^2|X^2\rangle - 8\langle X|X^2\rangle + 16\langle X|X\rangle + 4\langle X^2|1\rangle - 16\langle X|1\rangle + 4\langle 1|1\rangle,$$

c'est-à-dire

$$\|\tilde{Q}_2\|^2 = \langle X^2|X^2\rangle - 20.$$

Une dernière IPP montre que $\langle X^2|X^2\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^4e^{-t}dt = 24$, *donc* $\|\tilde{Q}_2\|^2 = 4$, *et*

$$Q_2 = \frac{Q_2}{2} = \frac{1}{2}(X^2 - 4X + 2).$$

Finalement, la famille $(Q_0, Q_1, Q_2) = \left(1, X-1, \frac{1}{2}(X^2-4X+2)\right)$ *est une base orthonormée de* F.

Corrigé de l'exercice 5.
On considère donc f *une fonction continue et strictement positive sur* $[a;b]$.
Nous allons appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $\sqrt{f}$ *et* $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$.
On a $\left\langle \sqrt{f}|\dfrac{1}{\sqrt{f}}\right\rangle = \int_a^b \sqrt{f(t)} \times \dfrac{1}{\sqrt{f(t)}}dt = \int_a^b 1dt = b - a$.
Et $||\sqrt{f}||^2 = \int_a^b \left(\sqrt{f(t)}\right)^2 dt = \int_a^b f(t)dt$ *et* $\left|\left|\dfrac{1}{\sqrt{f}}\right|\right|^2 = \int_a^b \left(\dfrac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2 dt = \int_a^b \dfrac{1}{f(t)}dt$.
Ainsi, $\left\langle \sqrt{f}|\dfrac{1}{\sqrt{f}}\right\rangle^2 \leqslant ||\sqrt{f}||^2 \left|\left|\dfrac{1}{\sqrt{f}}\right|\right|^2$, *nous donne l'inégalité demandée.*
Le cas d'égalité correspond au cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire lorsque $\sqrt{f}$ *et* $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ *sont liées.*
Ainsi $\left(\int_a^b f(t)dt\right) \times \left(\int_a^b \dfrac{1}{f(t)}dt\right) = (b-a)^2$ *si, et seulement si,* $\sqrt{f} = \lambda\dfrac{1}{\sqrt{f}}$, *c'est-à-dire si, et seulement si,* f *est constante.*

Corrigé de l'exercice 6. *1) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz (dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$*), avec les vecteurs*

$\boxed{x = (1, 2, \cdots, n) \text{ et } y = (\sqrt{1}, \cdots, \sqrt{n})}$ *(les composantes sont $x_k = k$ et $y_k = \sqrt{k}$) :*

$$\begin{aligned}|\langle x, y\rangle| = \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \quad &\leq \quad \langle x, x\rangle^{1/2}\langle y, y\rangle^{1/2} \\ &= \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \times \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

2) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz (dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n-1}$), avec les vecteurs

$$\boxed{x = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \cdots, \sqrt{n-1}) \text{ et } y = \left(\frac{\sqrt{1}}{n-1}, \frac{\sqrt{2}}{n-2}, \cdots, \frac{\sqrt{n-2}}{2}, \frac{\sqrt{n-1}}{1}\right)}$$

(les composantes sont $x_p = \sqrt{p}$ et $y_p = \frac{\sqrt{p}}{n-p}$). On a

$$\langle x, y\rangle = \sum_{p=1}^{n-1} \sqrt{p} \times \frac{\sqrt{p}}{n-p} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p},$$

$$\langle x, x\rangle = \sum_{p=1}^{n-1} \sqrt{p}^2 = \sum_{p=1}^{n-1} p = \frac{(n-1)n}{2},$$

$$\langle y, y\rangle = \sum_{p=1}^{n-1} \left(\frac{\sqrt{p}}{n-p}\right)^2 = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2}.$$

donc, puisque $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$, on a

$$\left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p}\right)^2 \leq \frac{(n-1)n}{2} \times \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)} \times \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p}\right)^2.$$

Corrigé de l'exercice 7. *1. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) :*

- *La fonction nulle $0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ appartient à E car elle est continue et T-périodique (c'est évident).*
- *Si f et g appartiennent à E et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ appartient à E. En effet, elle est continue en tant que combinaison linéaire de fonctions continues, et elle est T-périodique comme f et g car*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\lambda f + g)(x + T) = \lambda f(x + T) + g(x + T) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x).$$

Donc E est bien stable par combinaison linéaire.

2. L'application $(f, g) \mapsto \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$ est évidemment symétrique. Elle est bilinéaire par linéarité de l'intégrale. Enfin, elle est définie-positive, car pour tout $f \in E$:

- *on a $\langle f, f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale (la fonction f^2 est positive) et le fait que $T > 0$.*
- *si $\langle f, f\rangle = 0$, alors $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2dt = 0$, donc $\int_0^T f(t)^2dt = 0$. Vu que la fonction f^2 est continue et positive sur $[0; T]$, cela entraîne que f^2, et donc f, est nulle sur la période $[0; T]$. Vu que f est T-périodique, on en déduit que f est nulle sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $f = 0_E$.*

3. (a) • *Montrons que les fonctions $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont orthogonales deux à deux : pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k \neq n$, on a*

$$\langle c_k, c_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(n\omega t)dt = \frac{1}{2T}\int_0^T (\cos((k+n)\omega t) + \cos((k-n)\omega t))\,dt.$$

Puisque $k+n\neq 0$ (sinon $k=n=0$, et c'est contradictoire) et $k-n\neq 0$, on en déduit

$$\langle c_k, c_n\rangle = \frac{1}{2T}\left[\frac{\sin((k+n)\omega t)}{(k+n)\omega} + \frac{\sin((k-n)\omega t)}{(k-n)\omega}\right]_0^T = 0,$$

car $\omega T = 2\pi$.

- *Faisons de même avec les fonctions $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: pour $(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tels que $k\neq n$, on a*

$$\langle s_k, s_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(n\omega t)dt = \frac{1}{2T}\int_0^T \left(-\cos((k+n)\omega t)+\cos((k-n)\omega t)\right)dt.$$

Puisque $k+n\neq 0$ et $k-n\neq 0$, on en déduit

$$\langle s_k, s_n\rangle = \frac{1}{2T}\left[-\frac{\sin((k+n)\omega t)}{(k+n)\omega} + \frac{\sin((k-n)\omega t)}{(k-n)\omega}\right]_0^T = 0,$$

car $\omega T = 2\pi$.

(b) *On a déjà montré que les fonctions $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont orthogonales deux à deux, ainsi que les fonctions $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Reste à montrer que chaque fonction s_k est orthogonale à chaque fonction c_n : pour tout $(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$ (pas nécessairement distincts), on a*

$$\langle s_k, c_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(n\omega t)dt = \frac{1}{2T}\int_0^T \left(\sin((k+n)\omega t)+\sin((k-n)\omega t)\right)dt.$$

Puisque $k+n\neq 0$ (vu que $k\geq 1$), on en déduit

$$\int_0^T \sin((k+n)\omega t)dt = \left[-\frac{\cos((k+n)\omega t)}{(k+n)\omega}\right]_0^T = \frac{1-\cos(2\pi(k+n))}{(k+n)\omega} = 0.$$

Pour la deuxième intégrale, il faut distinguer deux cas :

$$\int_0^T \sin((k-n)\omega t)dt = \begin{cases} \int_0^T \sin(0)dt = 0 & \text{si } k=n \\ \left[-\frac{\cos((k-n)\omega t)}{(k-n)\omega}\right]_0^T = 0 & \text{si } k\neq n \end{cases}.$$

Dans tous les cas, on obtient donc $\langle s_k, c_n\rangle = 0$, ce qui montre bien que la famille $\mathcal{F}$ est orthogonale.

(c) *Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:*

$$\|c_n\|^2 = \langle c_n, c_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(n\omega t)dt = \frac{1}{2T}\int_0^T (1+\cos(2n\omega t))dt = \frac{1}{2};$$

$$\|s_n\|^2 = \langle s_n, s_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(n\omega t)dt = \frac{1}{2T}\int_0^T (1-\cos(2n\omega t))dt = \frac{1}{2}.$$

Enfin, il reste à traiter le cas de c_0 :

$$\|c_0\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(0)dt = 1.$$

Finalement, on a $\|c_0\| = 1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\|c_n\| = \|s_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Corrigé de l'exercice 8. 1. *Les vecteurs du plan $\mathcal{P}$ sont les vecteurs de la forme*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x+2y \end{pmatrix}, \text{ avec } x,y\in\mathbb{R},$$

c'est-à-dire de la forme

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ avec } x,y\in\mathbb{R}.$$

En posant $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, *la famille* (u_1, u_2) *est donc une base de* $\mathcal{P}$.
On en déduit une base orthonormée (e_1, e_2) *de* $\mathcal{P}$ *:*

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1}{\|u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La projection orthogonale p *est alors donnée par la formule :*

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \qquad p(X) = \langle X, e_1 \rangle e_1 + \langle X, e_2 \rangle e_2,$$

c'est-à-dire (en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$*),*

$$p(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-z)e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)e_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-z \\ 0 \\ z-x \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

Finalement : $\boxed{\forall X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad p(X) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5x+2y-z \\ 2x+2y+2z \\ -x+2y+5z \end{pmatrix}}$, *et la matrice de* p *dans la base canonique* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est* $\boxed{A = Mat_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}$.

2. *Tout vecteur* $X \in \mathbb{R}^3$ *se décompose de manière unique (puisque* $\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$*) :*

$$X = X_1 + X_2, \qquad X_1 \in \mathcal{P}, \quad X_2 \in \mathcal{P}^{\perp}.$$

Par définition, on a $\sigma(X) = X_1 - X_2 = 2X_1 - X = 2p(X) - X$.
On en déduit que la matrice S *de* σ *dans la base canonique est*
$\boxed{S = Mat_{\mathcal{B}}(\sigma) = 2A - I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$.

3. $d(M, \mathcal{P}) = \|M - p(M)\| = \frac{1}{6} \left\| \begin{pmatrix} x-2y+z \\ -2x+4y-2z \\ x-2y+z \end{pmatrix} \right\| = \frac{|x-2y+z|}{6} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{|x-2y+z|}{\sqrt{6}}$.

4. *Notons* $\pi(M)$ *le projeté orthogonal de* M *sur le plan affine* $\mathcal{Q}$. *Par définition du projeté orthogonal, on a*

$$\begin{cases} \pi(M) \in \mathcal{Q} \\ \overrightarrow{M\ \pi(M)} \in \mathcal{P}^{\perp} \end{cases}$$

(puisque $\mathcal{Q}$ *est un plan parallèle à* $\mathcal{P}$*).*
Fixons un point $A \in \mathcal{Q}$. *On a alors la décomposition :*

$$\overrightarrow{AM} = \underbrace{\overrightarrow{A\ \pi(M)}}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{\overrightarrow{\pi(M)\ M}}_{\in \mathcal{P}^{\perp}},$$

qui prouve que $\overrightarrow{A\ \pi(M)} = p(\overrightarrow{AM})$, *où* p *est la projection orthogonale sur* $\mathcal{P}$ *calculée à la question 1.*
La distance cherchée est donc :

$$d(M, \mathcal{Q}) = \|\overrightarrow{\pi(M)\ M}\| = \|(Id - p)(\overrightarrow{AM})\| = \frac{|x-2y+z-1|}{\sqrt{6}}$$

Corrigé de l'exercice 9. 1. *On commence par écrire :*

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ y+2z+3t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=z+2t \\ y=-2z-3t \end{array}\right. .$$

Donc $F=\{(z+2t,-2z-3t,z,t)/(z,t)\in\mathbb{R}^2\}=Vect((1,-2,1,0),(2,-3,0,1))$.

On pose $u_1=(1,-2,1,0)$ *et* $u_2=(2,-3,0,1)$.

La famille (u_1,u_2) *est libre (deux vecteurs non proportionnels) et génératrice de* F *donc c'est une base de* F.

Pour la transformer en une base orthonormée, appliquons le procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

— *On pose* $w_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0)$.

— *On pose* $\tilde{w}_2=u_2-\langle u_2|w_1\rangle w_1=\frac{1}{3}(2,-1,-4,3)$, *puis*

$$w_2=\frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,-4,3).$$

La famille (w_1,w_2) *est une base orthonormée de* F.

2. *On sait que pour tout* $u\in E$, $p_F(u)=\langle u|w_1\rangle\, w_1+\langle u|w_2\rangle\, w_2$.

En notant (e_1,e_2,e_3,e_4) *la base canonique de* $\mathbb{R}^4$, *on a donc :*

Donc : $p_F(e_1)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}w_1+\dfrac{2}{\sqrt{30}}w_2=\dfrac{1}{10}(3,-4,-1,2)$; $p_F(e_2)=\dfrac{1}{10}(-4,7,-2,-1)$;

$p_F(e_3)=\dfrac{1}{10}(-1,-2,7,-4)$; $p_F(e_4)=\dfrac{1}{10}(2,-1,-4,3)$.

En conclusion, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_c}(p_F)=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

3. *On peut par exemple se servir de la matrice obtenue dans la question précédente. En la multipliant par la matrice colonne associée à* u, *on obtient* $p_F(u)=\dfrac{1}{5}(-2,1,4,-3)$.

On sait, d'après notre cours, que $d(u,F)=\sqrt{||u||^2-||p_F(u)||^2}$.

Or, $||u||^2=4$ *et* $||p_F(u)||^2=\dfrac{30}{25}=\dfrac{6}{5}$. *Donc* $d(u,F)=\sqrt{\dfrac{14}{5}}$.

Corrigé de l'exercice 10. 1. *On commence, tout d'abord, par remarquer que la famille* $(1,X)$ *est génératrice de* F *et libre (deux vecteurs non proportionnels) donc c'est une base de* F.

(a) *On sait que* $p_F(X^2)\in F=Vect(1,X)$ *donc il existe* α *et* β *tels que* $p_F(X^2)=\alpha X+\beta$. $p_F(X^2)$ *est donc un polynôme de degré* 1.

(b) *D'après la définition du projeté orthogonal d'un vecteur, on sait que* $X^2-p_F(X^2)\in F^{\perp}$.

(c) *D'après la question précédente, on doit avoir* $\left\langle X^2-p_F(X^2)|1\right\rangle=0$ *et* $\left\langle X^2-p_F(X^2)|X\right\rangle=0$.

Et d'après la question 1.(a), on a $p_F(X^2)=\alpha X+\beta$.

— $\left\langle X^2-p_F(X^2)|1\right\rangle=0\Leftrightarrow\int_0^1(t^2-\alpha t-\beta)\times 1dt=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}-\dfrac{\alpha}{2}-\beta=0\Leftrightarrow\beta=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\alpha}{2}$.

— $\left\langle X^2-p_F(X^2)|X\right\rangle=0\Leftrightarrow\int_0^1(t^2-\alpha t-\beta)\times tdt=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}-\dfrac{\alpha}{3}-\dfrac{\beta}{2}=0\Leftrightarrow\alpha=1$.

Donc $\beta=-\dfrac{1}{6}$ *et* $p_F(X^2)=X-\dfrac{1}{6}$.

2. (a) *Il suffit ici de remarquer que*

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1(t^2-at-b)^2dt=\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}||X^2-(aX+b)||^2=d(X^2,F)^2.$$

(b) D'après notre cours, $d(X^2,F)^2 = ||X^2 - p_F(X^2)||^2$ *donc :*

$$\begin{aligned} d(X^2,F)^2 = ||X^2 - p_F(X^2)||^2 = ||X^2 - X + \frac{1}{6}||^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt \\ &= \int_0^1 t^4 + t^2 + \frac{1}{36} - 2t^3 + \frac{t^2}{3} - \frac{t}{3} dt \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{1}{180}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \frac{1}{180}.$

Corrigé de l'exercice 11. *1. Fixons deux vecteurs* x *et* y *dans* E*. Par linéarité de* $v : E \to E$ *et par bilinéarité du produit scalaire, on a*

$$\langle x+y, v(x+y)\rangle = \langle x, v(x)\rangle + \langle y, v(x)\rangle + \langle x, v(y)\rangle + \langle y, v(y)\rangle.$$

Or, d'après la propriété de v*, on a*

$$\langle x+y, v(x+y)\rangle = 0, \qquad \langle x, v(x)\rangle = 0, \qquad \langle y, v(y)\rangle = 0,$$

donc $\boxed{0 = \langle y, v(x)\rangle + \langle x, v(y)\rangle}$*, ce qui est l'égalité voulue.*

2. On procède par double inclusion :

$\boxed{Ker(v) \subset (Im\ v)^\perp}$ *: soit* $x \in Ker(v)$*. Fixons* $y \in Im(f)$*. Par définition de l'image,* y *est de la forme* $y = v(t)$ *avec* $t \in E$*, donc (en utilisant la première question) :*

$$\langle x, y\rangle = \langle x, v(t)\rangle = -\langle v(x), t\rangle.$$

Mais par hypothèse sur x*, on a* $v(x) = 0_E$*, donc*

$$\langle x, y\rangle = -\langle 0_E, t\rangle = 0_{\mathbb{R}},$$

ce qui montre que x *est orthogonal à tous les éléments de* $Im(v)$*, i.e.* $x \in (Im(v))^\perp$*.*

$\boxed{Ker(v) \supset (Im\ v)^\perp}$ *: soit* $x \in Im(v)^\perp$*. Montrons que* $x \in Ker(v)$*, i.e.* $v(x) = 0_E$*.*
Pour cela, on calcule $\langle v(x), y\rangle$ *pour tout* $y \in E$ *(en utilisant encore la première question) :*

$$\forall y \in E, \quad \langle v(x), y\rangle = -\langle x, v(y)\rangle.$$

Mais $v(y) \in Im(v)$*, donc (par hypothèse sur* x*),* $\langle x, v(y)\rangle = 0$*. Donc*

$$\forall y \in E, \quad \langle v(x), y\rangle = 0.$$

Le vecteur $v(x)$ *est donc orthogonal à tout vecteur de l'espace* E*, ce qui implique* $v(x) = 0_E$*, cqfd.*

Corrigé de l'exercice 12.
Comme nous sommes en dimension finie, D *et* $D^\perp$ *sont des supplémentaires orthogonaux.*
Donc, pour $y \in \mathbb{R}^3$ *fixé, il existe un unique réel* α *et un unique vecteur* $z \in D^\perp$ *tels que* $y = \alpha\omega + z$*.*
On a alors $\phi^2(y) = \omega \wedge (\omega \wedge y) = \omega \wedge (\omega \wedge z) = \langle \omega | z\rangle\, \omega - \langle \omega | \omega\rangle\, z = -z$*.*
Or, $p_{D^\perp}(y) = z$*.*
Donc on a bien $\phi^2 = -p_{D^\perp}$*.*

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 13. *1. La famille* (u_1, u_2, u_3) *est bien libre dans* $\mathbb{R}^3$ *car (par exemple), le déterminant dans la base canonique de cette famille est* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$

Ensuite, on construit successivement

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} = \frac{1}{\|(4;-2;-5)\|} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}_3 = u_3 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2 = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \frac{\tilde{e}_3}{\|\tilde{e}_3\|} = \frac{1}{\|(2;-1;2)\|} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt transforme donc la famille (u_1, u_2, u_3) *en la famille orthonormée* $\boxed{(e_1, e_2, e_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}$.

2. *Puisque la base* (e_1, e_2, e_3) *est orthonormée, les coordonnées du vecteur* $u = (x, y, z)$ *dans cette base sont*

$$\begin{cases} a = \langle u, e_1 \rangle = \frac{x+2y}{\sqrt{5}} \\ b = \langle u, e_2 \rangle = \frac{4x-2y-5z}{3\sqrt{5}} \\ c = \langle u, e_3 \rangle = \frac{2x-y+2z}{3} \end{cases}$$

Remarque : on peut aussi calculer les coordonnées dans la nouvelle base en résolvant le système linéaire :

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, *mais c'est bien plus long (car on ne profite pas du fait que la base* (e_i) *soit orthonormée) !*

Corrigé de l'exercice 14. 1. *On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz (dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$*), avec les vecteurs* $\boxed{a = (|a_1|, \cdots, |a_n|) \text{ et } u = (1, \cdots, 1)}$ *:*

$$|\langle a, u \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{n} |a_i| \times 1 \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \langle a, a \rangle^{1/2} \langle u, u \rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \times \sqrt{n}$$

2. *Il y a égalité si et seulement si la famille* (a, u) *est liée, c'est-à-dire ssi* $a \in Vect(u)$ *(puisque* $u \neq 0$*). Cela revient à dire que tous les* $|a_i|$ *sont égaux (pour* $1 \leq i \leq n$*).*
Donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_j| = \sqrt{n} \times \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \iff |a_1| = |a_2| = \cdots = |a_n|$
(les a_i *sont égaux au signe près).*

Corrigé de l'exercice 15. 1. (a) *Posons* $\overrightarrow{u}(1, 2, -2)$ *et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{OM} \right\rangle \right| \leq \|\overrightarrow{u}\| \left\| \overrightarrow{OM} \right\| &\Leftrightarrow |x + 2y - 2z| \leq \sqrt{1 + 2^2 + 2^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &\Leftrightarrow |x + 2y - 2z| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{|x + 2y - 2z|}{3} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

(b) *On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+2y-2z=0$ alors :*

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|x+2y-2z|}{\sqrt{1+2^2+(-2)^2}} = \frac{|x+2y-2z|}{3}.$$

Comme $O \in \mathcal{P}$ et par définition de la distance d'un point à un plan $d(M,\mathcal{P}) \leq OM$ soit :

$$\frac{|x+2y-2z|}{3} \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

2. *Il y a égalité si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont liés soit M appartenant à la droite d passant par O de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (qui est normal à $\mathcal{P}$). On trace donc $\overrightarrow{u}$, d et $\mathcal{P}$.*

Corrigé de l'exercice 16. 1. (a) — *Comme la fonction $t \to f'(t)g'(t)$ est continue sur $[0;x]$, on a bien $\langle f|g\rangle \in \mathbb{R}$.*
— *L'application $\langle .|.\rangle$ est bien évidemment symétrique.*
— *Soient f, g et h trois fonctions de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\langle \lambda f + g|h\rangle = \int_0^x (\lambda f + g)'(t)h'(t)dt = \lambda \int_0^x f'(t)h'(t)dt + \int_0^x g'(t)h'(t)dt = \lambda\,\langle f|h\rangle + \langle g|h\rangle\,.$$

L'application $\langle .|.\rangle$ est donc linéaire par rapport à sa première variable, et symétrique, donc elle est bilinéaire.
— *$\langle f|f\rangle = \int_0^x (f'(t))^2 dt \geqslant 0$ car on intègre une fonction continue, positive et les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens.*
— *$\langle f|f\rangle = 0 \iff \int_0^x (f'(t))^2 dt = 0 \iff \forall t \in [0;x] f'(t) = 0 \iff f$ est constante.*
Comme $f(0)=0$, on a donc $\langle f|f\rangle = 0 \iff f = 0$.
L'application $\langle .|.\rangle$ est définie-positive.

En conclusion, l'application $\langle .|.\rangle$ définit bien un produit scalaire sur E.

(b) *On pose h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = t$.*
On a alors $\langle f|h\rangle = \int_0^x f'(t) \times 1dt = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0) = f(x)$ car $f(0) = 0$.

(c) *Appliquons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions f et h.*
On a : $|\langle f|h\rangle|^2 \leqslant ||f||^2 \times ||h||^2$. Or $||f||^2 = \int_0^x (f'(t))^2 dt$, $||h||^2 = \int_0^x 1dt = x$ et $|\langle f|h\rangle|^2 = (f(x))^2$.
On a donc bien $(f(x))^2 \leqslant x \int_0^x (f'(t))^2 dt$

2. *Pour $x = 0$ l'inégalité est bien évidemment vérifiée.*
3. *Supposons maintenant que $x < 0$. On considère alors l'espace vectoriel $E = \{f \in \mathcal{C}^1([x;0],\mathbb{R})/f(0) = 0\}$.*
Le produit scalaire que nous devons alors utiliser est : $\langle f|g\rangle = \int_x^0 f'(t)g'(t)dt$.
On peut aussi appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions f et h mais dans ce cas on a :
$||f||^2 = \int_x^0 (f'(t))^2 dt = -\int_0^x (f'(t))^2 dt$, $||h||^2 = \int_x^0 1dt = -x$
et $|\langle f|h\rangle|^2 = \left(\int_x^0 f'(t) \times 1dt\right)^2 = (-f(x))^2 = (f(x))^2$.
On obtient de nouveau l'inégalité demandée.

Corrigé de l'exercice 17. 1. *Puisque $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, alors (en développant) :*

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

c'est-à-dire $2\langle x,y\rangle = 0$. On a donc $\langle x,y\rangle = 0$, c'est-à-dire que les vecteurs x et y sont orthogonaux.

2. *Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, on pose*

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a $x+y+z = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\|x+y+z\|^2 = 4 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2$, et pourtant la famille (x,y,z) n'est pas orthogonale, puisque par exemple $\langle x,y\rangle = 1 \neq 0$.

Corrigé de l'exercice 18. *1.* $\boxed{(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp}$:

on a $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, donc (puisque l'orthogonalité renverse les inclusions) : $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$, c'est-à-dire $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

$\boxed{(F+G)^\perp \supset F^\perp \cap G^\perp}$:

si $x \in F^\perp \cap G^\perp$, alors x est orthogonal à tous les y_1 dans F (puisque $x \in F^\perp$) et à tous les y_2 dans G (puisque $x \in G^\perp$), donc par linéarité à droite du produit scalaire, x est orthogonal à tous les vecteurs de la forme $y_1 + y_2$ (puisque $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$), avec $y_1 \in F$ et $y_2 \in G$. On a donc $\langle x, z\rangle = 0$ pour tout $z \in F+G$, c'est-à-dire $x \in (F+G)^\perp$.

Finalement, on a donc $\boxed{(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp}$.

2. $\boxed{(F\cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp}$:

on a $F\cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$, donc (puisque l'orthogonalité renverse les inclusions) : $F^\perp \subset (F\cap G)^\perp$ et $G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$. Le sous-espace vectoriel $(F\cap G)^\perp$ contient donc les sous-espaces $F^\perp$ et $G^\perp$. Puisque $F^\perp + G^\perp$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F^\perp$ et $G^\perp$, on en déduit l'inclusion $F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$.

Attention ! *L'inclusion* $\boxed{(F\cap G)^\perp \subset F^\perp + G^\perp}$ *est fausse en général : ici, elle est vraie car l'espace E est de dimension finie. On peut donc utiliser la formule de Grassmann (vu que tous les sous-espaces vectoriels de E sont de dimension finie) :*

$$\begin{array}{rcl}\dim(F^\perp + G^\perp) & = & \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F^\perp \cap G^\perp)\\ & = & 2\dim(E) - \dim(F) - \dim(G) - \dim(F^\perp\cap G^\perp)\end{array}.$$

Or, d'après la question précédente, $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$, donc

$$\dim(F^\perp \cap G^\perp) = \dim((F+G)^\perp) = \dim(E) - \dim(F+G).$$

On en déduit que

$$\begin{array}{rcl}\dim(F^\perp + G^\perp) & = & \dim(E) - \dim(F) - \dim(G) + \dim(F+G)\\ & = & \dim(E) - \dim(F\cap G) = \dim((F\cap G)^\perp)\end{array}.$$

La première inclusion plus l'égalité des dimensions entraîne donc l'égalité des deux sous-espaces vectoriels, c'est-à-dire $\boxed{(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp}$

Corrigé de l'exercice 19. *1. Puisque (u) est une base orthonormée de la droite $\mathcal{D}$, on a*

$$\forall v \in E, \qquad p_{\mathcal{D}}(v) = \langle v, u\rangle u.$$

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base orthonormée de E fixée dans l'exercice. Puisque $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, on a

$$p_{\mathcal{D}}(e_1) = \langle e_1, u\rangle u = \alpha u = \alpha^2 e_1 + \alpha\beta e_2 + \alpha\gamma e_3,$$
$$p_{\mathcal{D}}(e_2) = \langle e_2, u\rangle u = \beta u = \alpha\beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta\gamma e_3,$$
$$p_{\mathcal{D}}(e_3) = \langle e_3, u\rangle u = \gamma u = \alpha\gamma e_1 + \beta\gamma e_2 + \gamma^2 e_3,$$

et donc $Mat_{\mathcal{B}}(p_{\mathcal{D}}) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$.

2. Le plan $\mathcal{P}$ est l'espace vectoriel $\mathcal{D}^\perp$, donc $\mathcal{D} \oplus \mathcal{P} = E$, si bien que $p_{\mathcal{P}} = Id_E - p_{\mathcal{D}}$. On en déduit :

$$Mat_{\mathcal{B}}(p_{\mathcal{P}}) = I_3 - Mat_{\mathcal{B}}(p_{\mathcal{D}}) = \begin{pmatrix} 1-\alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & 1-\beta^2 & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & 1-\gamma^2 \end{pmatrix}.$$

3. Notons $s_{\mathcal{D}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$. On a par définition $s_{\mathcal{D}} = p_{\mathcal{D}} - p_{\mathcal{P}} = 2p_{\mathcal{D}} - Id_E$, donc

$$Mat_{\mathcal{B}}(s_{\mathcal{D}}) = 2Mat_{\mathcal{B}}(p_{\mathcal{D}}) - I_3 = \begin{pmatrix} 2\alpha^2-1 & 2\alpha\beta & 2\alpha\gamma \\ 2\alpha\beta & 2\beta^2-1 & 2\beta\gamma \\ 2\alpha\gamma & 2\beta\gamma & 2\gamma^2-1 \end{pmatrix}.$$

De même, en notant $s_{\mathcal{P}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$, on a $s_{\mathcal{P}} = p_{\mathcal{P}} - p_{\mathcal{D}} = -s_{\mathcal{D}}$, donc

$$Mat_{\mathcal{B}}(s_{\mathcal{P}}) = \begin{pmatrix} 1-2\alpha^2 & -2\alpha\beta & -2\alpha\gamma \\ -2\alpha\beta & 1-2\beta^2 & -2\beta\gamma \\ -2\alpha\gamma & -2\beta\gamma & 1-2\gamma^2 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 20. *1.* • *L'intégrale définissant φ existe.*
En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction positive $x \mapsto x^k e^{-2x}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$ car elle est continue sur $[0;+\infty[$ et car $x^k e^{-2x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Par linéarité de l'intégrale impropre, on en déduit que pour toutes fonctions polynomiales f, g, l'intégrale $\varphi(f,g) = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-2x}dx$ converge. On a donc bien une fonction $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$.

- *L'application φ est évidemment symétrique :*

$$\forall (f,g) \in E^2, \qquad \varphi(g,f) = \varphi(f,g).$$

- *L'application φ est bilinéaire : pour toutes f, g, h dans E et pour tout réel λ, on a (toujours par linéarité de l'intégrale impropre)*

$$\varphi(\lambda f + g, h) = \int_0^{+\infty} (\lambda f(x) + g(x))h(x)e^{-2x}dx = \lambda\varphi(f,g) + \varphi(f,h),$$

ce qui montre la linéarité à gauche, et dès lors, la linéarité à droite est automatique par symétrie de φ.

- *L'application φ est définie-positive car : pour tout $f \in E$, l'intégrale $\varphi(f,f) = \int_0^{+\infty} f(x)^2 e^{-2x}dx$ est positive (puisque c'est l'intégrale impropre convergente d'une fonction positive).*
D'autre part, si $\varphi(f,f) = 0$, alors $\int_0^{+\infty} f(x)^2 e^{-2x}dx = 0$. Vu que la fonction $x \mapsto f(x)^2 e^{-2x}$ est continue et positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$, cela entraîne sa nullité. Puisque $e^{-2x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x \geq 0$. Ainsi, la fonction polynomiale f possède une infinité de racines, elle est donc identiquement nulle : $f = 0_E$.

Tout ceci montre bien que φ est un produit scalaire sur E.

Remarque.
Dans la suite, on aura besoin de calculer $\varphi(x \mapsto x^i, x \mapsto x^j) = \int_0^{+\infty} x^{i+j}e^{-2x}dx$ pour certaines valeurs de $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Calculons donc $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-2x}dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
En effectuant une IPP, on obtient $I_k = \frac{k}{2}I_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc par récurrence, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad I_k = \frac{k!}{2^k} I_0 = \frac{k!}{2^{k+1}}.$$

2. *Notons $p_F(f_2)$ le projeté orthogonal de $f_2 : x \mapsto x^2$ sur $F = \mathbb{R}_1[x]$. Puisque $p_F(f_2) \in F$, il existe deux réels α et β tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad p_F(f_2)(x) = \alpha x + \beta.$$

Par définition de $p_F(f_2)$, on a aussi $f_2 - p_F(f_2) \in F^\perp = \{x \mapsto 1, x \mapsto x\}^\perp$, donc en notant $f_0 : x \mapsto 1$ et $f_1 : x \mapsto x$, on a

$$\varphi(f_2 - p_F(f_2), f_0) = \varphi(f_2 - p_F(f_2), f_1) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} (x^2 - \alpha x - \beta)e^{-2x}dx = 0, \qquad \int_0^{+\infty} (x^2 - \alpha x - \beta)xe^{-2x}dx = 0.$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} I_2 - \alpha I_1 - \beta I_0 = 0 \\ I_3 - \alpha I_2 - \beta I_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{4} - \alpha\frac{1}{4} - \beta\frac{1}{2} = 0 \\ \frac{3}{8} - \alpha\frac{1}{4} - \beta\frac{1}{4} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Le projeté orthogonal de $f_2 : x \mapsto x^2$ sur $F = \mathbb{R}_1[x]$ est donc la fonction $p_F(f_2) : x \mapsto 2x - \frac{1}{2}$.

3. *Notons* $H(a,b) = \int_0^{+\infty} (x^2+ax+b)^2 e^{-2x}dx$.
On reconnaît dans l'expression de $H(a,b)$ *le carré d'une norme (on parle bien entendu de la norme associée au produit scalaire* φ*, définie par* $\|f\|^2 = \varphi(f,f)$*) :*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad H(a,b) = \varphi(x \mapsto x^2+ax+b, x \mapsto x^2+ax+b) = \|x \mapsto x^2 - (-ax-b)\|^2.$$

L'expression $H(a,b)$ *est donc le carré d'une distance : en conservant les notations adoptées à la question précédente, on a*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad H(a,b) = d(f_2, -af_1 - bf_0)^2.$$

Lorsque (a,b) *décrit* $\mathbb{R}^2$*, la fonction* $-af_1 - bf_0$ *décrit* $Vect(f_0,f_1) = \mathbb{R}_1[x] = F$*, donc on sait que la distance* $\sqrt{H(a,b)}$ *sera minimale lorsque* $-af_1 - bf_0 = p_F(f_2)$*. Mathématiquement, cela s'écrit :*

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} H(a,b) = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} d(f_2, -af_1-bf_0)^2 = \inf_{g\in F} d(f_2,g)^2 = d(f_2, p_F(f_2))^2.$$

Ceci montre que H *possède un minimum sur* $\mathbb{R}^2$*. Calculons-le :*

$$\min_{\mathbb{R}^2} H = \|f_2 - p_F(f_2)\|^2 = \|f_2\|^2 - \|p_F(f_2)\|^2$$

(d'après le théorème de Pythagore). Or :

$$\|f_2\|^2 = \varphi(f_2,f_2) = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-2x}dx = I_4 = \frac{3}{4}.$$

$$\|p_F(f_2)\|^2 = \int_0^{+\infty} \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 e^{-2x}dx = 4I_2 - 2I_1 + \frac{1}{4}I_0 = \frac{5}{8},$$

donc finalement

$$\min_{\mathbb{R}^2} H = \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}.$$

Remarque.
On a également montré que le minimum de H *sur* $\mathbb{R}^2$ *est atteint en un seul point : le couple* $(a;b)$ *tel que* $-af_1 - bf_0 = p_F(f_2) = (x \mapsto 2x - \frac{1}{2})$*. Il s'agit donc du couple* $(a;b) = \left(-2; \frac{1}{2}\right)$ *:*

$$\min_{\mathbb{R}^2} H = H\left(-2; \frac{1}{2}\right).$$

Corrigé de l'exercice 21. 1. *F est un sous-ensemble de E.*
F *n'est pas vide car la fonction nulle appartient à* F.
Soient f *et* g *deux fonctions de* F *et* α *un réel.*
On a $\alpha f + g \in E$ *(car E est un espace vectoriel) et de plus* $(\alpha f + g)(0) = \alpha f(0) + g(0) = 0$*, car* $f(0) = 0$ *et* $g(0) = 0$.
Donc $\alpha f + g \in F$.
En conclusion F *est un sous-espace vectoriel de* E.

2. (a) *On peut supposer que* $g(a) > 0$ *car si* $g(a) < 0$ *on fait la démonstration avec la fonction* $-g$.
   (b) *On voit sur le graphique que* $h(0) = 0$ *donc* $h \in F$.
   Comme on a supposé que $g \in F^\perp$*, on a donc* $\langle h, g\rangle = 0$ *et donc* $\int_0^1 h(t)g(t)dt = 0$.
   Or h *est nulle en dehors de* $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$ *donc* $\int_0^1 h(t)g(t)dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} h(t)g(t)dt$ *et de plus* $h \times g$ *est continue et positive sur* $[a-\varepsilon; a+\varepsilon]$.
   Donc pour tout $t \in [a-\varepsilon; a+\varepsilon]$*,* $h(t)g(t) = 0$ *et en particulier* $h(a)g(a) = 0$ *ce qui donne* $g(a) = 0$*, car* $h(a) \neq 0$.
   (c) *Le fait que* $g(a) = 0$ *contredit l'hypothèse de départ.*
   On a donc montré que, pour tout $x \in]0;1[$*, on a* $g(x) = 0$*. Et comme* g *est continue sur* $[0;1]$ *on a* $g(x) = 0$ *pour tout* $x \in [0;1]$.
   En conclusion $F^\perp = \{0\}$.

3. *Comme* $F^\perp = \{0\}$*, on a* $\left(F^\perp\right)^\perp = \{0\}^\perp = E$*. On remarque donc que* $\left(F^\perp\right)^\perp \neq F$ *(contrairement à ce qui se passe en dimension finie).*
4. *Comme* $F \neq E$ *et que* $F^\perp = \{0\}$*,* $F \oplus F^\perp \neq E$ *(encore une fois contrairement à ce qui se passe en dimension finie).*