TD12 : Espaces préhilbertiens et euclidiens

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1 (Un produit scalaire polynomial).
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$$

est un produit scalaire.

Exercice 2 (Produit scalaire de fonctions).
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ suivante est un produit scalaire :

$$(f|g) = f(0)g(0) + \int_{[0,1]} f'g'.$$

Exercice 3 (Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^4$).
On considère $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et F l'ensemble défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + 3z - t = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base $\mathcal{B}$.
2. Grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base $\mathcal{B}$, construire une base orthonormée de F que l'on notera $\mathcal{C}$.

Exercice 4 (Polynômes de Laguerre).

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 P(t)e^{-t}$.
   (b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\, dt$ converge.
2. On note $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $(P, Q) \in E^2$ on pose : $< P|Q >= \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$
   (a) Justifier que $< P|Q > \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $< .|. >$ définit un produit scalaire sur E.
3. E est désormais muni de ce produit scalaire.
   Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_2[X]$ en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de F.

Exercice 5 (Inégalité intégrale).
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Montrer que si f est une fonction continue et strictement positive sur $[a; b]$, on a :

$$\left(\int_a^b f(t)dt\right) \times \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right) \geqslant (b - a)^2,$$

et étudier le cas d'égalité.
On pourra munir l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par : $\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Exercice 6 (Inégalités).
Soit n un entier ≥ 2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer les inégalités suivantes :

$$1) \quad \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}, \qquad 2) \quad \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{(n-p)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{n-p} \right)^2.$$

Exercice 7 (*Orthogonalité dans un espace de fonctions).
On note $E = \mathcal{C}^0_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues et T-périodiques $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (où $T > 0$).

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que $\langle f, g \rangle = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.
3. On pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (la pulsation associée à la période T). On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n : t \mapsto \cos(n\omega t), \qquad s_n : t \mapsto \sin(n\omega t).$$

   (a) Montrer que les familles $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont orthogonales.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \cdots, c_n, s_n, \cdots)$ est orthogonale.
   (c) Calculer la norme des fonctions de la famille $\mathcal{F}$.

Exercice 8 (Projection et symétrie orthogonales dans $\mathbb{R}^3$).
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on considère le plan vectoriel
$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p sur $\mathcal{P}$.
2. En déduire la matrice dans cette même base de la symétrie orthogonale σ par rapport à $\mathcal{P}$.
3. Etant donné un point $M = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, quelle est la distance de M à $\mathcal{P}$?
4. Notons $\mathcal{Q}$ le plan affine de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $x - 2y + z = 1$.
   Etant donné un point $M = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, quelle est la distance de M à $\mathcal{Q}$?
   Attention, $\mathcal{Q}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$!

Exercice 9 (Projection orthogonale et calcul de distance dans $\mathbb{R}^4$).
Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On considère F le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}.$$

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $u = (1, 1, 1, -1)$ sur F et en déduire la distance $d(u, F)$.

Exercice 10 (Un problème de minimisation).
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire : $< P|Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
On pose $F = Vect(1, X)$.

1. Le but de cette question est de calculer $p_F(X^2)$.
   (a) En exploitant l'information $p_F(X^2) \in F$, déterminer le degré du polynôme $p_F(X^2)$.
   (b) Quelle information a-t-on sur $X^2 - p_F(X^2)$?
   (c) À l'aide des deux questions précédentes déterminer $p_F(X^2)$.
   On rappelle, qu'en dimension finie, $\overrightarrow{u} \in F^\perp$ si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à chacun des vecteurs d'une base de F.
2. (a) Justifier le fait que $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = d(X^2, F)^2$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (t^2-at-b)^2dt$

Exercice 11 (Endomorphisme "orthogonalisant").
Soit E un espace préhilbertien réel, et soit $v\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x\in E,\ \langle x, v(x)\rangle = 0$.

1. Montrer que pour tout $(x,y)\in E^2$, $\langle x, v(y)\rangle = -\langle y, v(x)\rangle$.
   Indication : on pourra considérer $\langle x+y, v(x+y)\rangle$.
2. Montrer que $Ker(v) = (Im\ v)^{\perp}$.

Exercice 12 (Extrait d'un oral Centrale 2013 - filière TSI).
Soit ω un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.
On considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\phi(y)=\omega\wedge y$ et on pose $D = Vect(\omega)$.
Montrer que $\phi^2 = -p_{D^\perp}$, où $p_{D^\perp}$ désigne la projection orthogonale sur $D^\perp$.

II Exercices supplémentaires

Exercice 13 (Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^3$).
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique :

1. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille (u_1,u_2,u_3) définie par
$$u_1=(1,2,0),\quad u_2=(1,0,-1),\quad u_3=(1,1,1).$$
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $u=(x,y,z)$ dans la base obtenue à la question précédente.

Exercice 14 (Inégalité).

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \displaystyle\sum_{j=1}^n |a_j| \leq \sqrt{n}\times\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}.$
2. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Exercice 15 (Une inégalité dans $\mathbb{R}^3$ démontrée par deux méthodes).
On se place dans l'espace euclidien usuel muni d'un repère orthonormal $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit M un point de coordonnées (x,y,z). On souhaite démontrer que :
$$\frac{|x+2y-2z|}{3}\leq\sqrt{x^2+y^2+z^2}\qquad (I).$$

1. (a) Démontrer (I) en utilisant le produit scalaire usuel et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Retrouver cette inégalité à l'aide de la distance d'un point à un plan.
2. Quels sont les cas d'égalité ? Illustrer la situation par une figure.

Exercice 16 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et telle que $f(0)=0$.
On souhaite montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(f(x))^2\leqslant x\int_0^x (f'(t))^2dt$.

1. On suppose dans cette question que $x>0$.
   (a) On considère l'espace vectoriel $E=\{f\in\mathcal{C}^1([0;x],\mathbb{R})/f(0)=0\}$. On définit sur $E\times E$, l'application $\langle .|.\rangle$ par $\langle f|g\rangle=\int_0^x f'(t)g'(t)dt$.
   Montrer que cette application définit un produit scalaire sur E.
   (b) Déterminer une fonction $h\in E$, que l'on explicitera, telle que $\langle f|h\rangle = f(x)$.
   (c) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions f et h, démontrer l'égalité demandée.
2. Que peut-on dire du cas $x=0$?

3. On suppose maintenant que $x < 0$. Comment peut-on adapter la question 1. pour démontrer l'égalité demandée ?

Exercice 17 (Réciproque du théorème de Pythagore). 1. Dans un espace préhilbertien E, montrer que **si** deux vecteurs x, y vérifient
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, **alors** ces deux vecteurs sont orthogonaux.
C'est la réciproque du théorème de Pythagore.

2. Montrer que la réciproque du théorème de Pythagore est fausse si on considère au moins trois vecteurs (travailler dans $\mathbb{R}^2$ euclidien).

Exercice 18 (*Orthogonal d'une somme, d'une intersection).
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un ev préhilbertien E.

1. Comparer $(F+G)^\perp$ et $F^\perp \cap G^\perp$.
2. On suppose ici que E est **de dimension finie**. Comparer $(F \cap G)^\perp$ et $F^\perp + G^\perp$.

Exercice 19 (Forme générale des proj. et sym. ortho. de $\mathbb{R}^3$).
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.

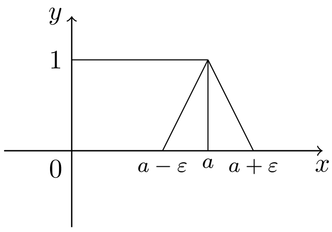
1. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\mathcal{D} = Vect(u)$ où u est un vecteur unitaire de coordonnées (α, β, γ).
2. En déduire la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur le plan vectoriel $\mathcal{P} = \{u\}^\perp$.
3. Déterminer les matrices dans $\mathcal{B}$ des symétries orthogonales par rapport à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

Exercice 20 (*Minimisation d'une fonction de deux variables).
Soit $E = \mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel réel des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$.
On définit l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ par $\quad \varphi(g,h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)h(x)e^{-2x}dx.$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
   On pensera d'abord à vérifier l'existence de l'intégrale !
2. Calculer le projeté orthogonal de $f_2 : x \mapsto x^2$ sur le sous-espace $F = Vect(x \mapsto 1, x \mapsto x) = \mathbb{R}_1[x]$.
3. Montrer que la fonction $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$H(a,b) = \int_0^{+\infty} (x^2 + ax + b)^2 e^{-2x} dx.$$
   possède un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et le calculer.

Exercice 21 (*Orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension infinie).
Soit $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire :
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$
On considère $F = \{f \in E / f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Le but de cette question est de montrer que $F^\perp = \{0\}$. Pour cela nous allons utiliser un raisonnement par l'absurde.
   Soit $g \in F^\perp$.
   (a) On suppose qu'il existe $a \in]0;1[$ tel que $g(a) \neq 0$.
   Expliquer pourquoi on peut supposer que $g(a) > 0$.
   (b) Comme g est continue, il existe alors $\varepsilon \in]0;a[$ tel que $\forall t \in [a-\varepsilon; a+\varepsilon]$, $g(t) > 0$.
   On considère alors la fonction h définie par le schéma suivant :



A l'aide de $\langle h, g\rangle$ montrer que $h(a)g(a) = 0$ et en déduire que $g(a) = 0$.

(c) Conclure.

3. Que vaut $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$?
4. A-t-on $F \oplus F^{\perp} = E$?