Corrigé du TD11 : Equations différentielles linéaires

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. • **Résolution sur** $]0;+\infty[$ *: sur cet intervalle, on a*

$$(E) \iff y' + \left(1 - \frac{1}{t}\right) y = t, \qquad (H) \iff y' + \left(1 - \frac{1}{t}\right) y = 0.$$

Les solutions de (H) *sur* $]0;+\infty[$ *sont les* $y_{(H)}(t) = \alpha e^{-t+\ln(t)} = \alpha t e^{-t}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.
On utilise la méthode de variation de la constante : on cherche les solutions de (E) *sous la forme*

$$y(t) = f(t) t e^{-t},$$

avec f *dérivable. On a alors (après calculs) :*

$$(E) \iff f'(t) = e^t \iff f(t) = e^t + \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (E) *sur* $]0;+\infty[$ *sont donc les fonctions de la forme*

$$y(t) = \alpha t e^{-t} + t, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

• **Résolution sur** $]-\infty;0[$ *: sur cet intervalle, on a*

$$(E) \iff y' + \left(\frac{1}{t} - 1\right) y = -t, \qquad (H) \iff y' + \left(\frac{1}{t} - 1\right) y = 0.$$

Les solutions de (H) *sur* $]-\infty;0[$ *sont les* $y_{(H)}(t) = \beta e^{t-\ln(t)} = \beta \frac{e^t}{t}$ *avec* $\beta \in \mathbb{R}$.
On utilise la méthode de variation de la constante : on cherche les solutions de (E) *sous la forme*

$$y(t) = g(t) \frac{e^t}{t},$$

avec g *dérivable. On a alors (après calculs) :*

$$(E) \iff g'(t) = -t^2 e^{-t} \iff g(t) = (t^2 + 2t + 2) e^{-t} + \beta, \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

(le calcul de primitive se fait à l'aide de deux intégrations par parties).
Les solutions de (E) *sur* $]-\infty;0[$ *sont donc les fonctions de la forme*

$$y(t) = \beta \frac{e^t}{t} + \frac{t^2 + 2t + 2}{t}, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

• **Résolution sur** $\mathbb{R}$ *: si elles existent, les solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}$ *sont nécessairement de la forme*

$$y(t) = \begin{cases} \alpha t e^{-t} + t & si\ t > 0 \\ \beta \frac{e^t}{t} + \frac{t^2+2t+2}{t} & si\ t < 0 \end{cases},$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *(d'après ce qui précède).*
Parmi ces fonctions, cherchons celles qui admettent un prolongement dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel α, *on a* $\lim_{t \to 0^+} y(t) = 0$. *Pour le calcul de la limite en* 0^-, *on effectue un DL :*

$$\forall t < 0, \qquad y(t) = \frac{\beta + 2}{t} + (\beta + 2) + \left(\frac{\beta}{2} + 1\right) t + o(t).$$

Ceci montre que si $\beta \neq -2$, $y(t)$ *possède une limite infinie en* 0^-, *donc n'admet pas de prolongement continu en* 0.
La condition $\beta = -2$ *est donc nécessaire pour que* y *soit solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}$.

Supposons donc $\beta = -2$. *On a alors* $\lim_{t\to 0} y(t) = 0$, *donc* y *se prolonge continûment en* 0 *en posant* $y(0) = 0$. *En outre :*

$$\frac{y(t)-y(0)}{t} = \begin{cases} \alpha e^{-t}+1 & si\ t>0 \\ \frac{t^2+2t+2-2e^t}{t^2} & si\ t<0 \end{cases},$$

donc

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)-y(0)}{t} = \alpha+1, \qquad \lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)-y(0)}{t} = 0$$

(d'après le DL précédemment effectué). Ceci montre que y *est dérivable en* 0 *si et seulement si* $\alpha = -1$ *(afin que les nombres dérivés à gauche et à droite en* 0 *soient égaux), et on a* $y'(0) = 0$ *dans ce cas. Il y a donc* **au plus** *une solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}$ *: la fonction*

$$y : t \mapsto \begin{cases} t(1-e^{-t}) & si\ t>0 \\ 0 & si\ t=0 \\ \frac{t^2+2t+2-2e^t}{t} & si\ t<0 \end{cases}$$

Enfin, cette fonction est bien solution de (E) *sur* $\mathbb{R}$ *car elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *elle est solution de* (E) *sur* $]0;+\infty[$, *sur* $]-\infty,0[$ *mais aussi en* $t=0$ *car*

$$|0|y'(0) + (0-1)y(0) = 0^2.$$

Bilan : *l'équation différentielle* (E) *possède une seule solution sur* $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 2.
C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et réels.

- *Pour résoudre l'équation différentielle homogène* $y'' - 2ay' + y = 0$, *on résout l'équation caractéristique* $r^2 - 2ar + 1 = 0$, *c'est-à-dire* $(r-a)^2 = a^2 - 1$ *dans* $\mathbb{C}$.
  * *Si* $a^2 > 1$, *alors il y a deux racines réelles :* $r = a \pm \sqrt{a^2-1}$, *et donc les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions*

  $$y_h := x \mapsto C_1 e^{(a+\sqrt{a^2-1})x} + C_2 e^{(a-\sqrt{a^2-1})x}, \qquad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

  * *Si* $a^2 = 1$, *alors il y a une racine réelle double :* $r = a$, *et donc les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions*

  $$y_h := x \mapsto (C_1 + C_2 x)\, e^{ax}, \qquad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

  * *Si* $a^2 < 1$, *alors il y a deux racines complexes non réelles et conjuguées :* $r = a \pm i\sqrt{1-a^2}$, *et donc les solutions de l'équation différentielle homogène sont les fonctions*

  $$y_h := x \mapsto e^{ax}\left(C_1 \cos(x\sqrt{1-a^2}) + C_2 \sin(x\sqrt{1-a^2})\right), \qquad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- *Le second membre étant de la forme* $P(x)e^{mx}$, *où* $P = 1$ *est un polynôme réel et* $m = 1$ *un nombre complexe, on peut chercher une solution particulière sous la forme* $y_p(x) = Q(x)e^x$, *où* Q *est un polynôme. Une telle fonction vérifie l'équation différentielle avec second membre si et seulement si*

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (Q''(x) + 2Q'(x) + Q(x))e^x - 2a(Q'(x) + Q(x))e^x + Q(x)e^x = e^x,$$

  c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R},\ Q''(x) + 2(1-a)Q'(x) + 2(1-a)Q(x) = 1$.
  Deux cas se présentent alors :
  * *Si* $a \neq 1$ *alors le polynôme constant* $Q(x) = \frac{1}{2(1-a)}$ *convient, et donc la fonction* $x \mapsto \frac{e^x}{2(1-a)}$ *est une solution particulière.*
  * *Si* $a = 1$, *alors* Q *doit vérifier* $Q''(x) = 1$, *et du coup* $Q(x) = \frac{x^2}{2}$ *convient. Dans ce cas, la fonction* $x \mapsto \frac{x^2}{2}e^x$ *est une solution particulière.*

- **Bilan : quatre cas au total**.

* $\boxed{\textit{Si } a \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}$, *alors les solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions*
$$y := x \mapsto C_1 e^{(a+\sqrt{a^2-1})x} + C_2 e^{(a-\sqrt{a^2-1})x} + \frac{e^x}{2(1-a)}, \qquad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

* $\boxed{\textit{Si } a \in]-1,1[}$, *alors les solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions*
$$y := x \mapsto e^{ax}\left(C_1 \cos(x\sqrt{1-a^2}) + C_2 \sin(x\sqrt{1-a^2})\right) + \frac{e^x}{2(1-a)}, \qquad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

* $\boxed{\textit{Si } a = -1}$, *alors les solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions*
$$y := x \mapsto (C_1 + C_2 x)\, e^{-x} + \frac{e^x}{4}, \qquad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

* $\boxed{\textit{Si } a = 1}$, *alors les solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions*
$$y := x \mapsto \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2}\right) e^x, \qquad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Corrigé de l'exercice 3. *1. Sur chacun de ces trois intervalles, on a* $(E) \iff y' + \frac{1}{x(1-x)} y = \frac{1}{1-x}$.
En posant $a(x) = \frac{1}{x(1-x)}$, *on a* $a(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$, *donc une primitive de* a *est*
$$A : x \mapsto \ln|x| - \ln|1-x| = \ln\left|\frac{x}{1-x}\right|.$$
Les solutions de l'équation homogène (H) : $y' + \frac{1}{x(1-x)} y = 0$ *sont donc :*
$$y_h(x) = Ce^{-A(x)} = \frac{C}{\left|\frac{x}{1-x}\right|} = C\left|\frac{1-x}{x}\right|.$$

- *Sur* $I_1 =]-\infty;0[$, *on a donc* $y_h(x) = C_1\left(\frac{1-x}{-x}\right) = C_1\left(\frac{x-1}{x}\right)$, *avec* $C_1 \in \mathbb{R}$.
- *Sur* $I_2 =]0;1[$, *on a donc* $y_h(x) = C_2\left(\frac{1-x}{x}\right)$, *avec* $C_2 \in \mathbb{R}$.
- *Sur* $I_3 =]1;+\infty[$, *on a donc* $y_h(x) = C_3\left(\frac{x-1}{x}\right)$, *avec* $C_3 \in \mathbb{R}$.

Quitte à changer C_2 *en* $-C_2$, *on obtient la même forme des solutions de* (H) *sur les trois intervalles :*
$$y_h(x) = C\left(\frac{x-1}{x}\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$
Cherchons une solution particulière de (E) *sous la forme*
$$y(x) = C(x)\left(\frac{x-1}{x}\right), \text{ avec } C \text{ dérivable.}$$
Une telle fonction est solution de (E) *sur* I_k *(pour* $k \in \{1,2,3\}$*) si et seulement si*
$$C'(x)\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x} \iff C'(x) = \frac{-x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2},$$
c'est-à-dire
$$C(x) = -\ln|1-x| - \frac{1}{1-x} + \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$
On en déduit que les solutions de (E) *sur chacun des intervalles* I_k *sont les*
$$y : x \mapsto \left(-\ln|1-x| - \frac{1}{1-x} + \alpha\right)\left(\frac{x-1}{x}\right), \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$
c'est-à-dire
$$y : x \mapsto \frac{x-1}{x}(\alpha - \ln|1-x|) + \frac{1}{x}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

2. **Analyse** *: Si elles existent, les solutions de (E) sur $]-\infty,1[$ sont nécessairement (d'après la question précédente) de la forme*

$$y : x \mapsto \begin{cases} \frac{x-1}{x}(\alpha - \ln(1-x)) + \frac{1}{x} & si\ x < 0 \\ y(0) & si\ x = 0 \\ \frac{x-1}{x}(\beta - \ln(1-x)) + \frac{1}{x} & si\ 0 < x < 1 \end{cases},$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Etudions alors la limite en 0 de telles solutions, à l'aide de développements limités en 0^+ et 0^- :

$$y(x) = \frac{x-1}{x}\left(\alpha - x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0^-}{o}(x^2)\right) + \frac{1}{x} = \frac{1-\alpha}{x} + (\alpha - 1) + \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0^-}{o}(x),$$

$$y(x) = \frac{x-1}{x}\left(\beta - x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0^+}{o}(x^2)\right) + \frac{1}{x} = \frac{1-\beta}{x} + (\beta - 1) + \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0^+}{o}(x).$$

Vu qu'une telle solution doit être dérivable en 0, elle est nécessairement continue en 0, ce qui impose $\alpha = \beta = 1$ (sinon, y aurait une limite infinie en 0^+ ou 0^-).

Synthèse : *Pour ces valeurs de α, β, on a donc y qui possède un DL_1 en 0 ($y(x) = \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$), ce qui montre sa dérivabilité (ainsi que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1/2$ au passage). En outre, y vérifie bien l'équation différentielle en $x = 0$ car $0 * (1-0) * y'(0) + y(0) = 0$. Donc y est bien solution de (E) sur $]-\infty; 1[$.*

Bilan : *L'équation (E) possède une seule solution sur $]-\infty; 1[$: la fonction*

$$y : x \mapsto \begin{cases} \frac{x-1}{x}(1 - \ln(1-x)) + \frac{1}{x} & si\ x \in]-\infty, 1[\setminus\{0\} \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$y : x \mapsto \begin{cases} 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} & si\ x \in]-\infty, 1[\setminus\{0\} \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

3. **Analyse** *: Si elles existent, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont (d'après les deux questions précédentes) de la forme :*

$$y : x \mapsto \begin{cases} 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ 1 + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} & si\ 0 < x < 1 \\ y(1) & si\ x = 1 \\ \frac{x-1}{x}(\gamma - \ln(x-1)) + \frac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases},$$

avec $\gamma \in \mathbb{R}$. Etudions alors ces fonctions au voisinage de 1, toujours à l'aide de développements limités : en posant $h = 1 - x$, on a

$$y(x) = y(1-h) = \begin{cases} 1 + \frac{h\ln h}{1-h} & si\ 0 < h < 1 \\ y(1) & si\ h = 0 \\ \frac{-h}{1-h}(\gamma - \ln(-h)) + \frac{1}{1-h} & si\ h < 0 \end{cases}$$

Puisque $\lim_{h\to 0^+} h\ln h = 0$, on en déduit que $y(1-h) \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, donc $y(1) = 1$ (puisque y doit être continue en 1). Etudions alors la dérivabilité à gauche en $x = 1$ de y :

$$\frac{y(1-h) - y(1)}{h} = \frac{\ln h}{1-h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty.$$

Quelle que soit la valeur de γ, la fonction y n'est donc pas dérivable à gauche en $x = 1$.
Bilan : *l'équation (E) ne possède pas de solution sur $\mathbb{R}$.*

Corrigé de l'exercice 4. *1. Ce système différentiel linéaire homogène se réécrit matriciellement $(S_1) :\ X' = AX$, avec $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.*

La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$: avec $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$. D'où

$$X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff \forall t \in \mathbb{R},\ \left(P^{-1}X(t)\right)' = D(P^{-1}X(t)).$$

Posons alors $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ pour tout réel t. On a

$$X' = AX \iff Y' = DY \iff \begin{cases} a' = a \\ b' = 2b \end{cases} \iff \begin{cases} a(t) = \alpha e^t \\ b(t) = \beta e^{2t} \end{cases},\quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Ceci équivaut à $X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 4\alpha e^t + \beta e^{2t} \\ 3\alpha e^t + \beta e^{2t} \end{pmatrix}$. Les solutions de (S_1) sont donc les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de la forme :

$$\begin{cases} x(t) = 4\alpha e^t + \beta e^{2t} \\ y(t) = 3\alpha e^t + \beta e^{2t} \end{cases},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Parmi les solutions de (S_1), il en existe une seule vérifiant la condition initiale donnée $X(0) = (x(0); y(0)) = (1; -1)$. Elle correspond aux constantes $(\alpha; \beta)$ qui vérifient le système :

$$\begin{cases} 1 = 4\alpha + \beta \\ -1 = 3\alpha + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -7 \end{cases}$$

Finalement, le couple cherché est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{cases} x(t) = 8e^t - 7e^{2t} \\ y(t) = 6e^t - 7e^{2t} \end{cases}.$$

3. Matriciellement, le système (S_2) se réécrit $X' = AX + b(t)$, avec A la matrice précédemment définie et $b(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En réutilisant la diagonalisation de A, on a :

$$X' = AX + b(t) \iff X' = PDP^{-1}X + b(t) \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X + P^{-1}b(t).$$

Le changement d'inconnue $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ nous ramène alors au système :

$$Y' = DY + v(t),$$

avec un nouveau second membre (qu'il faut calculer !) :

$$v(t) = P^{-1}b(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - e^t \\ -6 + 4e^t \end{pmatrix}.$$

Résolvons ce nouveau système (qui est découplé) :

$$Y' = DY + v(t) \iff \begin{cases} a' = a + 2 - e^t \\ b' = 2b - 6 + 4e^t \end{cases} \iff \begin{cases} a(t) = \alpha e^t - 2 - te^t \\ b(t) = \beta e^{2t} + 3 - 4e^t \end{cases}$$

(ces deux équations du premier ordre se résolvent avec la méthode de variation de la constante). On en déduit les solutions X de (S_2) en remultipliant par P :

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha e^t - 2 - te^t \\ \beta e^{2t} + 3 - 4e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(\alpha e^t - 2 - te^t) + \beta e^{2t} + 3 - 4e^t \\ 3(\alpha e^t - 2 - te^t) + \beta e^{2t} + 3 - 4e^t \end{pmatrix}.$$

Les solutions de (S_2) sont donc les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de la forme :

$$\begin{cases} x(t) = 4\alpha e^t + \beta e^{2t} - 4te^t - 4e^t - 5 \\ y(t) = 3\alpha e^t + \beta e^{2t} - 3te^t - 4e^t - 3 \end{cases},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Corrigé de l'exercice 5. *1. On a* (S) : $X' = AX + b(t)$ *en posant* $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $b(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4t \\ 0 \end{pmatrix}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

2. (a) La matrice A *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *mais pas sur* $\mathbb{R}$. *On montre facilement que* $\chi_A(X) = (X-1)(X^2+1) = (X-1)(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})$, *et* $A = PDP^{-1}$ *avec*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \\ 1 & 2-\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

D'où, en posant $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on a*

$$(H): \ X' = AX \iff PY' = PDP^{-1}PY \iff Y' = DY \iff \begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = \mathrm{i}v(t) \\ w'(t) = -\mathrm{i}w(t) \end{cases}.$$

Les solutions de ce dernier système sont les $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^t \\ \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \\ \gamma \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \end{pmatrix}$, *avec* $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$.

On retrouve alors les solutions de (H) *en multipliant par* P :

$$X(t) = PY(t) = \alpha \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} + \gamma \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3.$$

Formellement, l'ensemble des solutions à valeurs complexes de (H) *est donc*

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}^3}(H) = Vect_{\mathbb{C}} \left(t \mapsto \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto Z(t), t \mapsto \overline{Z(t)} \right),$$

où $Z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

(b) On déduit une base des solutions réelles de (H) *en prenant les parties réelle et imaginaire de* $t \mapsto Z(t)$:

$$Z(t) = (\cos t + \mathrm{i}\sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -2\sin t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\cos t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix},$$

donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3}(H) = Vect_{\mathbb{R}} \left(t \mapsto \mathrm{e}^t, t \mapsto \Re(Z(t)), t \mapsto \Im(Z(t)) \right)$. *Les solutions réelles de* (H) *sont donc les fonctions* (x, y, z) *définies par*

$$\begin{cases} x(t) = \alpha \mathrm{e}^t + \beta \cos t + \gamma \sin t \\ y(t) = -2\beta \sin t + 2\gamma \cos t \\ z(t) = \alpha \mathrm{e}^t + \beta(2\cos t + \sin t) + \gamma(-\cos t + 2\sin t) \end{cases}, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

3. On cherche une fonction de la forme $\begin{cases} x(t) = a_1 t + b_1 \\ y(t) = a_2 t + b_2 \\ z(t) = a_3 t + b_3 \end{cases}$ *qui vérifie* (S).

On doit donc déterminer les coefficients $a_1, b_1, \cdots, b_3$ *tels que pour tout* $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a_1 = 2(a_1 t + b_1) - (a_3 t + b_3) + 2 \\ a_2 = 2(a_1 t + b_1) - (a_2 t + b_2) - 2(a_3 t + b_3) + 4t \\ a_3 = (a_1 t + b_1) + (a_2 t + b_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (2a_1 - a_3)t + (2b_1 - b_3 - a_1 + 2) = 0 \\ (2a_1 - a_2 - 2a_3 + 4)t + (2b_1 - b_2 - 2b_3 - a_2) = 0 \\ (a_1 + a_2)t + (b_1 + b_2 - a_3) = 0 \end{cases}.$$

Par identification des coefficients de ces polynômes, cela revient à

$$\left\{\begin{array}{l} 2a_1 - a_3 = 0 \\ 2a_1 - a_2 - 2a_3 + 4 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ 2b_1 - b_3 - a_1 + 2 = 0 \\ 2b_1 - b_2 - 2b_3 - a_2 = 0 \\ b_1 + b_2 - a_3 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} (a_1, a_2, a_3) = (4, -4, 8) \\ (b_1, b_2, b_3) = (0, 8, -2) \end{array}\right. ,$$

donc la fonction définie par $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 4t \\ y(t) = -4t + 8 \\ z(t) = 8t - 2 \end{array}\right.$ *est une solution particulière de* (S).

4. *Notons* $X_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *la solution de* (S) *précédemment obtenue.*
   (a) *On a alors, puisque* $X_p' = AX_p + b(t)$:

   $$X \text{ solution de (S)} \iff X' - AX = b(t) = X_p' - AX_p \iff (X - X_p)' = A(X - X_p),$$

   c'est-à-dire que X *est solution de* (S) *si, et seulement si,* $X - X_p$ *est solution de* (H).

   (b) *D'après ce qui précède, les solutions réelles de* (S) *sont donc les fonctions* (x, y, z) *définies par*

   $$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \alpha \mathrm{e}^t + \beta\cos t + \gamma \sin t + 4t \\ y(t) = -2\beta \sin t + 2\gamma \cos t - 4t + 8 \\ z(t) = \alpha \mathrm{e}^t + \beta(2\cos t + \sin t) + \gamma(-\cos t + 2\sin t) + 8t - 2 \end{array}\right. , \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Corrigé de l'exercice 6. 1. *Le système* (S) *se réécrit* $X' = AX$ *avec* $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *On a* $\chi_A(X) = (X-1)^2$, *et* $E_1 = Vect(1, 1)$, *donc la matrice* A *n'est pas diagonalisable (ni sur* $\mathbb{R}$, *ni sur* $\mathbb{C}$).

En revanche, elle est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. *Si on pose* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *on a*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$$

En posant $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ *pour tout réel* t, *on a*

$$(S) :\ X' = AX \iff Y' = TY \iff \left\{\begin{array}{l} u'(t) = u(t) - 2v(t) \\ v'(t) = v(t) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} v(t) = \beta e^t \\ u'(t) = u(t) - 2\beta e^t \end{array}\right. , \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Résolution de $u' = u - 2\beta e^t$: *on utilise la méthode de variation de la constante. Les solutions sont les* $u(t) = \alpha(t)e^t$, *avec* $\alpha'(t)e^t = -2\beta e^t$, *c'est-à-dire* $\alpha(t) = -2\beta t + \alpha$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les solutions de $Y' = TY$ *sont donc les* $\left\{\begin{array}{l} u(t) = (-2\beta t + \alpha)e^t \\ v(t) = \beta e^t \end{array}\right.$, *avec* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

En multipliant par P, *on en déduit les solutions de* (S) : $X(t) = P\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, *c'est-à-dire :*

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = (-2\beta t + \alpha)e^t \\ y(t) = (-2\beta t + \alpha + \beta)e^t \end{array}\right. .$$

2. *Parmi les solutions précédemment déterminées, on a* $\left\{\begin{array}{l} x(0) = 2 \\ y(0) = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{array}\right.$, *donc la solution cherchée est* $\left\{\begin{array}{l} x(t) = (2t + 2)e^t \\ y(t) = (2t + 1)e^t \end{array}\right.$.

Corrigé de l'exercice 7.

On a $(S) \iff X' = AX + b(t)$ *en posant* $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *et* $b(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$. *La matrice* A *est diagonalisable : en posant* $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *on a*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

En posant $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, *on a donc*

$$X' = AX + b(t) \iff Y' = DY + P^{-1}b(t) \iff \begin{cases} u' = -u - t + 2e^t \\ v' = 2v + t - e^t \end{cases},$$

qui est découplé (deux équations différentielles linéaires du premier ordre).
La résolution de ces deux équations (par exemple avec la méthode de variation de la constante) donne :

$$\begin{cases} u(t) = \alpha e^{-t} + e^t - t + 1 \\ v(t) = \beta e^{2t} + e^t - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \end{cases}, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Après changement de base, on récupère les solutions générales de (S) $(X(t) = PY(t))$ *:*

$$\begin{cases} x(t) &= \alpha e^{-t} + 2\beta e^{2t} - 2t + \frac{1}{2} + 3e^t \\ y(t) &= \alpha e^{-t} + \beta e^{2t} - \frac{3}{2}t + \frac{3}{4} + 2e^t \end{cases}, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Corrigé de l'exercice 8.

1. *On a* $Y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$, *donc* (x, y) *est solution de* (S) *si et seulement si*

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ x'(t) + y'(t) - y(t) \\ x'(t) - y'(t) + x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

En posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, *on a donc l'équivalence voulue.*

2. *Notons* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice* A. *Pour montrer que* A *est semblable à* T, *il suffit de montrer qu'il existe une base* $(u_1, \cdots, u_4)$ *de* $\mathbb{R}^4$ *telle que* $Mat_{(u_1,\cdots,u_4)}(f) = T$, *c'est-à-dire telle que* $\begin{cases} f(u_1) = -u_1 \\ f(u_2) = u_1 - u_2 \\ f(u_3) = u_3 \\ f(u_4) = u_3 + u_4 \end{cases}$, *i.e.* $\begin{cases} (f + Id)(u_1) = 0 \\ (f + Id)(u_2) = u_1 \\ (f - Id)(u_3) = 0 \\ (f - Id)(u_4) = u_3 \end{cases}$
Les deux premières équations disent que $u_1 \in Ker(f + Id) \cap Im(f + Id)$, *et les deux dernières que* $u_3 \in Ker(f - Id) \cap Im(f - Id)$.
Travaillons matriciellement : la matrice de $f + Id$ *dans la base canonique* $(e_1, \cdots, e_4)$ *de* $\mathbb{R}^4$ *est*

$$A + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $Ker(f + Id) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + z = 0,\ y + t = 0,\ -y + 2z + t = 0\} = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Posons $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *La lecture des colonnes de* $A + I_4$ *montre que* $u_1 = (f + Id_4)(e_1 - e_4)$,

donc on peut poser $u_2 = e_1 - e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. *On a bien* $\left\{ \begin{array}{l} (f+Id)(u_1) = 0 \\ (f+Id)(u_2) = u_1 \end{array} \right.$

On fait pareil avec $A - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *pour construire* u_3 *et* u_4.

On a $Ker(f - Id) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ -x+z=0,\ -y+t=0,\ x+z-2t=0\} = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose donc $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et on cherche* u_4 *tel que* $(f - Id)(u_4) = u_3$ *: on doit résoudre :*

$$\left\{ \begin{array}{c} -x+z = 1 \\ -y+t = 1 \\ x+z-2t = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = 1+x \\ t = 1+y \\ x = 1+y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = 2+y \\ t = 1+y \\ x = 1+y \end{array} \right.$$

Le vecteur $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *convient.*

Reste à vérifier que $(u_1, \cdots, u_4)$ *est une base de* $\mathbb{R}^4$. *La matrice de cette famille par rapport à la base canonique est*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donc P *est inversible, ce qui montre bien que* $(u_1, \cdots, u_4)$ *est une base de* $\mathbb{R}^4$, *dans laquelle la matrice de* f *est* $T = P^{-1}AP$. *Finalement,* A *est bien semblable à* T.
La matrice T *n'est pas diagonalisable (car* 1 *est valeur propre de multiplicité* 2 *mais le sous-espace propre* $Ker(T - I_4)$ *est de dimension* $1 < 2$*), donc* A *non plus.*

3. *Posons* $X(t) = P^{-1}Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \\ d(t) \end{pmatrix}$ *pour tout réel* t. *On a alors :*

$$Y'(t) = AY(t) \iff PX'(t) = PTP^{-1}Y(t) \iff X'(t) = TX(t).$$

Or :

$$X'(t) = TX(t) \iff \left\{ \begin{array}{l} a'(t) = -a(t) + b(t) \\ b'(t) = -b(t) \\ c'(t) = c(t) + d(t) \\ d'(t) = d(t) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} b(t) = \beta e^{-t} \\ a'(t) = -a(t) + \beta e^{-t} \\ d(t) = \delta e^t \\ c'(t) = c(t) + \delta e^t \end{array} \right. , \quad (\beta, \delta) \in \mathbb{R}^2.$$

Les solutions de $a'(t) = -a(t) + \beta e^{-t}$ *sont les* $a(t) = f(t)e^{-t}$, *avec* $f'(t)e^{-t} = \beta e^{-t}$, *c'est-à-dire les* $a(t) = (\beta t + \alpha)e^{-t}$, *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.
De même, les solutions de $c'(t) = c(t) + \delta e^t$ *sont les* $c(t) = g(t)e^t$, *avec* $g'(t)e^t = \delta e^t$, *c'est-à-dire les* $c(t) = (\delta t + \gamma)e^t$, *avec* $\gamma \in \mathbb{R}$.

Finalement, $X' = TX \iff X(t) = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta t)e^{-t} \\ \beta e^{-t} \\ (\gamma+\delta t)e^{t} \\ \delta e^{t} \end{pmatrix}$*, avec* $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$.

On en déduit les solutions de (Σ) *:* $Y(t) = PX(t)$*, ce sont donc les fonctions* $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ *définies par*

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} (\alpha+\beta+\beta t)e^{-t} + (\gamma+\delta+\delta t)e^{t} \\ -(\alpha+\beta t)e^{-t} + (\gamma+\delta t)e^{t} \\ -(\alpha+\beta t)e^{-t} + (\gamma+2\delta+\delta t)e^{t} \\ (\alpha-\beta+\beta t)e^{-t} + (\gamma+\delta+\delta t)e^{t} \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} \\ -te^{-t} \\ -te^{-t} \\ (-1+t)e^{-t} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} (1+t)e^{t} \\ te^{t} \\ (2+t)e^{t} \\ (1+t)e^{t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. En sélectionnant les deux premières composantes des solutions Y *du système* (Σ)*, on obtient les solutions de* (S) *:*

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = (\alpha+\beta+\beta t)e^{-t} + (\gamma+\delta+\delta t)e^{t} \\ y(t) = -(\alpha+\beta t)e^{-t} + (\gamma+\delta t)e^{t} \end{array} \right. , \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4.$$

Plus formellement :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(S) = Vect\left(t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} (1+t)e^{-t} \\ -te^{-t} \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} (1+t)e^{t} \\ te^{t} \end{pmatrix}\right).$$

Corrigé de l'exercice 9. *1. (a) Soit* $x \mapsto P(x)$ *une fonction polynomiale de degré* $d \in \mathbb{N}$*. Notons* $a_d \neq 0$ *le coefficient dominant de* P*.* **Si $d \geqslant 2$**, *alors* $\deg((1-x)P''(x)) = d-1$ *et* $\deg(xP'(x)) = \deg(-P(x)) = d$ *donc*

$$(1-x)P''(x) + xP'(x) - P(x) = \underbrace{(d-1)a_d}_{\neq 0} x^d + R(x),$$

avec R *de degré* $\leqslant d-1$*, si bien que* $\deg((1-x)P''(x) + xP'(x) - P(x)) = d \geqslant 2$*, et donc* P *n'est pas solution de* (H) *(ni de* (E) *d'ailleurs).*
Donc les **éventuelles** *solutions polynomiales de* (H) *sont nécessairement de degré* $\leqslant 1$.
Ensuite, on les cherche : si $P(x) = ax+b$ *avec* a, b *réels alors*

$$P \text{ solution de } (H) \iff xa - (ax+b) = 0 \iff b = 0.$$

Tout ceci montre que les seules solutions polynomiales non nulles de (H) *sont les* $x \mapsto ax$ *avec* $a \in \mathbb{R}^*$.

(b) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$*, la fonction* $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ *est solution de* (H) *sur* $\mathbb{R}$ *si, et seulement si,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (1-x)\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + x\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{\lambda x} = 0,$$

c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\lambda - \lambda^2)x + (\lambda^2 - 1) = 0$*, ce qui équivaut, par identification des coefficients, à* $\lambda = 1$.
Conclusion : parmi les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$*, seule la fonction* $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ *est solution de* (H).

(c) On observe que la fonction constante $x \mapsto -1$ *est solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}$.

(d) **Sur l'intervalle $]1;+\infty[$** *: le coefficient devant* y'' *dans l'équation* (E) *ne s'annule pas, donc* (E) *peut se mettre sous forme résolue :*

$$(E) \iff y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = \frac{1}{1-x}.$$

D'après le cours, l'ensemble des solutions de (H) *est alors un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension 2. Puisque* $x \mapsto x$ *et* $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ *forment une famille libre de solutions de* (H)*, on en déduit que*

$$\mathcal{S}_{]1;+\infty[}(H) = Vect_{\mathbb{R}}\left(x \mapsto x; x \mapsto \mathrm{e}^{x}\right),$$

et donc que $\mathcal{S}_{]1;+\infty[}(E) = \mathcal{S}_{]1;+\infty[}(H) - 1 = \{x \mapsto ax + b\mathrm{e}^{x} - 1,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

(e) **Résolution sur l'intervalle** $\mathbb{R}$ *: par le même argument que précédemment, on obtient*

$$\mathcal{S}_{]-\infty;1[}(E) = \{x \mapsto cx + d\mathrm{e}^x - 1,\ (c,d) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Si elles existent, les solutions de (E) *sur* $\mathbb{R}$ *sont donc nécessairement de la forme :*

$$y(x) = \begin{cases} cx + d\mathrm{e}^x - 1 & si\ x < 1 \\ ? & si\ x = 1 \\ ax + b\mathrm{e}^x - 1 & si\ x > 1 \end{cases}.$$

Parmi ces fonctions, déterminons celles qui sont deux fois dérivables en $x = 1$*.*
Tout d'abord, la continuité en $x = 1$ *impose alors (en examinant les limites à gauche et à droite)*

$$y(1) = c + d\mathrm{e}^1 = a + b\mathrm{e}^1.$$

Ensuite, y *doit être de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*, donc sa dérivée doit être continue en* 1*. Puisque*

$$y'(x) = \begin{cases} c + d\mathrm{e}^x & si\ x < 1 \\ a + b\mathrm{e}^x & si\ x > 1 \end{cases},$$

on doit donc avoir (par coïncidence des limites à gauche et à droite de cette dérivée) :

$$c + d\mathrm{e}^1 = a + b\mathrm{e}^1,$$

(encore la même condition), et sous cette condition, y *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *avec* $y'(1) = a + b\mathrm{e}^1$*.*
Enfin, l'existence de $y''(1)$ *impose que* $\frac{y'(x)-y'(1)}{x-1}$ *possède une limite finie lorsque* $x \to 1$*. Puisque*

$$\forall x \neq 1, \qquad \frac{y'(x) - y'(1)}{x-1} = \begin{cases} d\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^1}{x-1}\right) & si\ x < 1 \\ b\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^1}{x-1}\right) & si\ x > 1 \end{cases}$$

et puisque $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^1}{x-1} = \exp'(1) = \mathrm{e}^1$*, on en déduit que* y *est deux fois dérivable en* $x = 1$ *si, et seulement si,* $\begin{cases} c + d\mathrm{e}^1 = a + b\mathrm{e}^1 \\ d = b \end{cases}$*, ce qui revient à* $(c,d) = (a,b)$*.*

Ainsi, les solutions sur $\mathbb{R}$ *de* (E) *sont les fonctions* $x \mapsto ax + b\mathrm{e}^x - 1$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*.*

2. *Examinons les conditions initiales, à partir de l'expression des solutions sur* $\mathbb{R}$ *de* (E) *:*

$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} ax_0 + b\mathrm{e}^{x_0} - 1 = \alpha \\ a + b\mathrm{e}^{x_0} = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} a + b\mathrm{e}^{x_0} = \beta \\ a(x_0 - 1) = \alpha - \beta + 1 \end{cases}.$$

Deux cas se présentent, alors :

— **si $x_0 \neq 1$**, *alors ce système admet une unique solution :* $\begin{cases} a = \dfrac{\alpha - \beta + 1}{x_0 - 1} \\ b = \left(\beta - \dfrac{\alpha - \beta + 1}{x_0 - 1}\right)\mathrm{e}^{-x_0} \end{cases}$,

donc il existe une unique solution de (E) *vérifiant les conditions initiales données.*

— **si $x_0 = 1$**, *alors*

$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} a + b\mathrm{e}^{x_0} = \beta \\ 0 = \alpha - \beta + 1 \end{cases}.$$

Le système présente alors une condition de compatibilité ($\alpha - \beta + 1 = 0$*) :*

— *si* $\beta \neq 1+\alpha$*, alors le système est impossible, donc* (E) *ne possède aucune solution vérifiant les conditions initiales données.*

— *si* $\beta = 1+\alpha$*, alors le système équivaut à* $a + b\mathrm{e}^{x_0} = \beta$*, et dans ce cas, il existe une infinité de solutions* y *vérifiant la condition initiale* $\begin{cases} y(1) = \alpha \\ y'(1) = 1 + \alpha \end{cases}$.

Cette distinction de cas est tout à fait normale, car si $x_0 \neq 1$*, alors on peut (d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations d'ordre* 2*) imposer les valeurs initiales* $y(x_0)$ *et* $y'(x_0)$*, et une seule solution de* (E) *les satisfait, puisque* (E) *peut s'écrire sous forme résolue sur tout intervalle ne contenant pas la valeur* 1*.*
En revanche, impossible d'imposer les conditions initiales en $x_0 = 1$ *: on le voit très bien en évaluant l'équation* (E) *en* $x = 1$*, elle donne la condition :* $y'(1) - y(1) = 1$*, c'est-à-dire* $\beta = 1+\alpha$*.*

Corrigé de l'exercice 10.
Vu que $t \mapsto e^t$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (H) et ne s'annule pas sur cet intervalle, on peut chercher les solutions de (H) sous la forme $x(t) = e^t f(t)$, où f est une fonction deux fois dérivable.
Avec ce changement d'inconnue, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(t+1)x''(t) - x'(t) - tx(t) = (t+1)f''(t) + (2t+1)f'(t).$$

Donc x est solution de (H) si, et seulement si, $z = f'$ est solution de $(t+1)z' + (2t+1)z = 0$. Sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$, on a

$$(t+1)z' + (2t+1)z = 0 \iff z'(t) + \left(2 - \frac{1}{t+1}\right) z(t) = 0,$$

donc les solutions sont les fonctions de la forme :

$$z(t) = \alpha e^{\ln|t+1| - 2t} = \alpha |t+1| e^{-2t}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Vu que $t \mapsto |t+1|$ est positive sur I, on peut donc réécrire

$$f'(t) = z(t) = \alpha(t+1)e^{-2t}.$$

En primitivant (par parties !) on obtient $f(t) = -\alpha\left(\frac{3}{4} + \frac{t}{2}\right)e^{-2t} + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. En remultipliant par e^t, on obtient **toutes** *les solutions de (H) sur I :*

$$x(t) = -\frac{\alpha}{4}(2t+3)\, e^{-t} + \beta e^t, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Formellement, on a donc $\mathcal{S}_I(H) = Vect_{\mathbb{R}}\left(t \mapsto (2t+3)e^{-t}, t \mapsto e^t\right)$.

Corrigé de l'exercice 11.

1. *En posant $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et en injectant dans l'équation (E), on obtient (par dérivation terme à terme) :*

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_n x^n.$$

Puisque $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1; 1[$, on obtient par identification :

$$a_0 = 0, \qquad \forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}.$$

Donc la seule éventuelle solution DSE est $y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)(n+2)} x^n$.
On vérifie que le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$. On obtient donc ainsi une fonction développable en série entière sur $]-1; 1[$ (et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$), qui est solution de (E) sur $]-1; 1[$.

2. *On utilise la décomposition en élements simples : il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que*

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}.$$

En réduisant au même dénominateur et en identifiant les coefficients, on obtient $(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in]-1; 1[, \qquad \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)(n+2)} x^n = \frac{(-1)^{n+1} x^n}{2n} - \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{2(n+2)}.$$

Sous réserve de convergence des trois séries entières suivantes, on a donc :

$$\forall x \in]-1; 1[, \qquad y(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n+2}.$$

En effectuant des changements d'indice, on obtient, pour tout $x \in]-1;1[\setminus\{0\}$ *:*

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n-2}}{n} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \frac{1}{2x^2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \ . \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{x}(\ln(1+x)-x) + \frac{1}{2x^2}\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

A la fin, on obtient

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{2x^2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. *En posant* $y(x) = x^r$*, on obtient que* y *est solution de* (H) *sur un intervalle* I *si et seulement si*

$$\forall x \in I, \qquad x^2 r(r-1)x^{r-2} + 4xrx^{r-1} + 2x^r = 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in I, \qquad (r+1)(r+2)x^r = 0.$$

Ceci équivaut à $r \in \{-1;-2\}$*, donc on obtient ainsi que les fonctions* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *et* $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ *sont solutions de* (H) *sur tout intervalle ne contenant pas* 0*.*

4. *Si* $I =]-1;0[$ *ou* $I =]0;+\infty[$*, on peut appliquer le théorème de structure de l'ensemble des solutions, puisque le coefficient* $x \mapsto x^2$ *devant* y'' *ne s'annule pas sur* I*. La famille libre* $\left(x \mapsto \frac{1}{x}; x \mapsto \frac{1}{x^2}\right)$ *est donc une base de* $\mathcal{S}_I(H)$*.*
En outre, la fonction $y_p : x \mapsto \frac{x^2+2x+1}{2x^2}\ln(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4}$ *est solution de* (E) *sur* $]-1;+\infty[$ *(d'après la question 2., c'est une solution DSE sur* $]-1;1[$ *et cette fonction se prolonge à l'intervalle* $]-1;+\infty[$*, d'après son expression), donc l'ensemble des solutions de* (E) *sur* I *est :*

$$\mathcal{S}_I(E) = \mathcal{S}_I(H) + y_p = \left\{x \mapsto \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{x^2+2x+1}{2x^2}\ln(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

5. *D'après la question précédente, les éventuelles solutions de* (E) *sur l'intervalle* $]-1;+\infty[$ *sont de la forme :*

$$y(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{x^2+2x+1}{2x^2}\ln(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4} & \text{si } x > 0 \\ \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{x^2+2x+1}{2x^2}\ln(1+x) - \frac{1}{2x} - \frac{3}{4} & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$*.*
Mais la continuité en 0 *de* y *impose* $a = b = c = d = 0$*, sinon* y *possède une limite infinie en* 0^+ *ou* 0^-*. Donc la seule solution possible de* (E) *sur* $]-1;+\infty[$ *est la fonction*

$$y_p : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{2x^2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

, et elle convient car elle est clairement $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1;+\infty[\setminus\{0\}$*, et elle est DSE sur* $]-1;1[$*, donc également de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *au voisinage de* 0*.*
Finalement, l'équation (E) *possède une seule solution sur* $]-1;+\infty[$*.*

Corrigé de l'exercice 12. 1. *En posant* $u(x) = x^2y(x)$*, on a* $u'(x) = 2xy(x) + x^2y'(x)$ *et* $u''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + x^2y''(x)$*, donc*

$$(E) \iff u''(x) + u(x) = 0 \iff u(x) = A\cos(x) + B\sin(x), \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

En divisant par x^2*, on en déduit les solutions de* (E) *sur* $]-\infty,0[$ *et sur* $]0,+\infty[$ *:*

$$y(x) = \frac{u(x)}{x^2} = \frac{A\cos(x) + B\sin(x)}{x^2}, \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. *Les éventuelles solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :*

$$y(x) = \begin{cases} \frac{A\cos(x)+B\sin(x)}{x^2} & si\ x > 0 \\ \frac{C\cos(x)+D\sin(x)}{x^2} & si\ x < 0 \end{cases},$$

avec $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$, et sont deux fois dérivables en 0. Puisqu'on a

$$y(x) = \frac{A + Bx - \frac{A}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} - \frac{A}{2} + o(1),$$

la continuité de y en 0 impose que $A = B = 0$ (sinon, y possède une limite infinie en 0^+. Idem au voisinage de 0^-, on doit avoir $C = D = 0$.
Finalement, la seule solution possible sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle, et elle convient car elle est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
L'équation (E) possède donc une seule solution définie sur $\mathbb{R}$: la fonction nulle.

Corrigé de l'exercice 13. 1. *Puisque $y = z \circ \ln \iff z = y \circ \exp$, on a l'équivalence (par composition) : z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, y est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$*

$$y'(x) = \frac{z'(\ln(x))}{x}, \quad y''(x) = \frac{z''(\ln(x)) - z'(\ln(x))}{x^2},$$

d'où $x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) + z'(\ln(x)) + z(\ln(x))$. On en déduit

$$(F) \iff \forall x > 0,\ z''(\ln(x)) + z(\ln(x)) = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) + z(t) = 0.$$

Finalement, y est solution de (F) sur $]0; +\infty[$ si, et seulement si, z est solution de (H) : $z''+z = 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. *Les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les $z(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.*
En composant par $\ln$, on retrouve les solutions de (F) sur $]0; +\infty[$: ce sont les fonctions définies par :

$$y(x) = A\cos(\ln(x)) + B\sin(\ln(x)), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

3. *Les conditions initiales imposées donnent $(A, B) = (0, 1)$, donc la solution au problème de Cauchy proposé est la fonction $x \mapsto \sin(\ln(x))$.*

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 14. • *Sur $]0; +\infty[$, $(E) \iff y' + \left(1 - \frac{1}{t}\right)y = t^2$.*
Les solutions de l'équation homogène (H) : $y' + \left(1 - \frac{1}{t}\right)y = 0$ sont les $t \mapsto Ce^{-t+\ln(t)} = Cte^{-t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. On résout (E) par la méthode de variation de la constante : les solutions sont les $y(t) = f(t)te^{-t}$, où f vérifie

$$f'(t)te^{-t} = t^2 \iff f'(t) = te^t \iff f(t) = (t-1)e^t + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

On a donc $\mathcal{S}_{]0;+\infty[}(E) = \left\{t \mapsto \alpha te^{-t} + t^2 - t,\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

• *Sur $]-\infty; 0[$, $(E) \iff y' + \left(\frac{1}{t} - 1\right)y = -t^2$.*
Les solutions de l'équation homogène (H) : $y' + \left(\frac{1}{t} - 1\right)y = 0$ sont les $t \mapsto Ce^{-\ln(|t|)+t} = \frac{Ce^t}{|t|} = \frac{-Ce^t}{t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. On résout (E) par la méthode de variation de la constante : les solutions sont les $y(t) = \frac{f(t)e^t}{t}$, où f vérifie

$$\frac{f'(t)e^t}{t} = -t^2 \iff f'(t) = -t^3e^{-t} \iff f(t) = (t^3 + 3t^2 + 6t + 6)e^{-t} + \beta,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

On a donc $\mathcal{S}_{]-\infty;0[}(E) = \left\{t \mapsto \beta\frac{e^t}{t} + t^2 + 3t + 6 + \frac{6}{t},\ \beta \in \mathbb{R}\right\}$.

- *Si (E) possède des solutions sur $\mathbb{R}$, alors (d'après les deux points précédents), elles sont nécessairement de la forme :*

$$y(t) = \begin{cases} \alpha t e^{-t} + t^2 - t & si\ t > 0 \\ \beta \frac{e^t}{t} + t^2 + 3t + 6 + \frac{6}{t} & si\ t < 0 \end{cases},$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Effectuons alors un DL_1 en 0^+ et en 0^- :

$$y(t) = \begin{cases} (\alpha - 1)t + \underset{t\to 0^+}{o}(t) \\ \frac{\beta+6}{t} + (\beta+6) + \left(\frac{\beta}{2} + 3\right) t + \underset{t\to 0^-}{o}(t) \end{cases}$$

Puisqu'une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ est nécessairement dérivable en 0, elle est continue en 0, ce qui impose $\beta = -6$ (sinon, $y(t)$ aurait une limite infinie en 0^-). Pour cette valeur de β, on a

$$y(t) = \begin{cases} (\alpha - 1)t + \underset{t\to 0^+}{o}(t) \\ \underset{t\to 0^-}{o}(t) \end{cases}.$$

La dérivabilité en 0 de y impose alors $\alpha = 1$ (sinon, y possède des nombres dérivés à gauche et à droite en 0 qui sont différents). Ceci montre qu'il y a **au plus** *une solution de (E) sur $\mathbb{R}$: la fonction*

$$y : t \mapsto \begin{cases} t(t - 1 + e^{-t}) & si\ t > 0 \\ 0 & si\ t = 0 \\ \frac{6(1-e^t)}{t} + 6 + 3t + t^2 & si\ t < 0 \end{cases}$$

- *La fonction précédente est bien dérivable en 0 (car elle possède le DL_1 en 0 : $y(t) = \underset{t\to 0}{o}(t)$; qui montre que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$). Elle vérifie de plus l'équation différentielle (E) pour $t = 0$, car*

$$|0|y'(0) + (0-1)y(0) = 0^3.$$

C'est donc bien une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

- **Bilan :** *l'équation différentielle (E) possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.*

Corrigé de l'exercice 15. *1. Cherchons une fonction DSE de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (avec $x \in]-R; R[$ et les $a_n \in \mathbb{R}$) qui vérifie l'équation (E) sur $]0; R[$.*

Analyse : *Pour une telle fonction, nous avons*

$$2xy'(x) + y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^n.$$

De plus, le second membre de (E) est DSE sur $]0; +\infty[$:

$$\forall x > 0, \qquad 3x \cos(x^{3/2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3(-1)^k}{(2k)!} x^{3k+1}.$$

Par unicité du DSE, on en déduit que y est solution de (E) sur $]0; R[$ si et seulement si

$$(2n+1)a_n = \begin{cases} \frac{3(-1)^k}{(2k)!} & si\ n = 3k+1\ avec\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & sinon \end{cases},$$

ce qui équivaut à

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} a_{3k} = 0 \\ (2*(3k+1)+1)a_{3k+1} = \frac{3(-1)^k}{(2k)!} \\ a_{3k+2} = 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} a_{3k} = a_{3k+2} = 0 \\ a_{3k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \end{cases}.$$

Le DSE de y est donc $y(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{3k+1}$.

Synthèse *: La série entière* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{3k+1}$ *a un rayon de convergence $R = +\infty$ (facile par le critère de d'Alembert), donc sa somme y est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, qui vérifie l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On a donc obtenu une solution DSE de (E) sur $]0;+\infty[$.*

Enfin, en réécrivant $y(x) = x^{-\frac{1}{2}} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{2k+1}$ *pour tout $x > 0$, on remarque que*

$$\forall x > 0, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{3k+1} = x^{-\frac{1}{2}} \sin(x^{\frac{3}{2}}).$$

Bilan : *On a montré que la fonction $y : x \mapsto x^{-\frac{1}{2}} \sin(x^{\frac{3}{2}})$ est une solution DSE de (E) sur $]0;+\infty[$.*

2. *Les solutions de (H) : $2xy' + y = 0$ sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{C}{\sqrt{x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ (car l'équation (H) est équivalente à $y' + \frac{1}{2x} y = 0$ sur cet intervalle). Donc d'après la question précédente, on en déduit les solutions de (E) sur $]0;+\infty[$:*

$$\mathcal{S}_{]0;+\infty[}(E) = \left\{ x \mapsto \frac{C}{\sqrt{x}} + \frac{\sin(x^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{x}},\ C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Corrigé de l'exercice 16.

La matrice A est diagonalisable : en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *on a*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D.$$

Dès lors, en posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, on a :

$$X'(t) = AX(t) \iff PY'(t) = PDY(t) \iff Y'(t) = DY(t).$$

On obtient facilement

$$Y'(t) = DY(t) \iff Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{6t} \\ \beta e^{3t} \\ \gamma e^{3t} \end{pmatrix},$$

donc

$$X'(t) = AX(t) \iff X(t) = P \begin{pmatrix} \alpha e^{6t} \\ \beta e^{3t} \\ \gamma e^{3t} \end{pmatrix} \iff X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{6t} - \beta e^{3t} - \gamma e^{3t} \\ \alpha e^{6t} + \gamma e^{3t} \\ \alpha e^{6t} + \beta e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Parmi ces solutions, on a

$$X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha - \beta - \gamma = 2 \\ \alpha + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 17.
On résout d'abord le système homogène associé :

$$(H):\quad \left\{\begin{array}{l} x' = 3x - 2y \\ y' = -x + 2y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x(t) = \alpha e^t - 2\beta e^{4t} \\ y(t) = \alpha e^t + \beta e^{4t} \end{array}\right. ,\qquad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

(cela se fait en diagonalisant la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$*, qui a pour valeurs propres* 1 *et* 4*).*
En outre, il existe une solution particulière de (S) *dont les composantes sont des polynômes de degré* 2*. En effet, en posant* $\left\{\begin{array}{l} x(t) = a_1t^2 + b_1t + c_1 \\ y(t) = a_2t^2 + b_2t + c_2 \end{array}\right.$*, on a*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est solution de } (S) \iff \left\{\begin{array}{c} 3a_1 - 2a_2 - 3 = 0 \\ -a_1 + 2a_2 + 1 = 0 \\ 3b_1 - 2b_2 + 4 = 2a_1 \\ -b_1 + 2b_2 - 2 = 2a_2 \\ 3c_1 - 2c_2 = b_1 \\ -c_1 + 2c_2 + 1 = b_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{array}\right. ,$$

ce qui montre que la fonction $t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$ *est solution de* (S)*.*
Les solutions réelles de (S) *sont donc :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \alpha e^t - 2\beta e^{4t} + t^2 \\ y(t) & = & \alpha e^t + \beta e^{4t} + t \end{array}\right. ,\qquad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

Corrigé de l'exercice 18.
Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$*. Cette fonction* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *deux fois dérivable est solution de* (S) *si et seulement si*

$$\forall t \in \mathbb{R},\qquad X''(t) = AX(t) + b(t),$$

avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$*. On procède alors comme d'habitude, en réduisant la matrice* A *: son polynôme caractéristique vaut*

$$P_A(X) = (X-3)(X-2) - 2 = X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4).$$

Ayant deux valeurs propres réelles distinctes, A *est donc diagonalisable dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*.*
Des calculs simples montrent en outre que les sous-espaces propres de A *sont*

$$E_1 = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\qquad E_4 = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$*, on a* $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$*.*
On résout ensuite le système (S) *en posant* $Y(t) = P^{-1}X(t)$*. On a alors*

$$X'' = AX + b(t) \iff X'' = PDP^{-1}X + b(t) \iff P^{-1}X'' = DP^{-1}X + P^{-1}b(t) \iff Y'' = DY + P^{-1}b(t).$$

On montre facilement que $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$*, donc, en notant* $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$*, on a*

$$Y'' = DY + P^{-1}b(t) \iff \left\{\begin{array}{l} u''(t) = u(t) + \frac{1}{3}(e^t - e^{2t}) \\ v''(t) = 4v(t) + \frac{1}{3}(2e^t + e^{2t}) \end{array}\right. .$$

Il reste à résoudre ces deux équations d'ordre 2*, à coefficients constants.*

- **Résolution de $u'' = u + \frac{1}{3}(e^t - e^{2t})$**
  Les solutions de l'équation homogène $u'' - u = 0$ sont les $t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
  En cherchant une solution particulière de l'équation $u'' - u = \frac{1}{3}e^t$ sous la forme $t \mapsto P(t)e^t$ (où P est un polynôme), on trouve que $t \mapsto \frac{t}{6}e^t$ convient.
  En cherchant une solution particulière de l'équation $u'' - u = -\frac{1}{3}e^{2t}$ sous la forme $t \mapsto P(t)e^{2t}$ (où P est un polynôme), on trouve que $t \mapsto -\frac{1}{9}e^{2t}$ convient.
  Par le théorème de superposition, on en déduit que $t \mapsto \frac{t}{6}e^t - \frac{1}{9}e^{2t}$ est une solution particulière de l'équation complète $u'' - u = \frac{1}{3}(e^t - e^{2t})$.
  Finalement, les solutions de $u'' = u + \frac{1}{3}(e^t - e^{2t})$ sont les fonctions de la forme :

$$u(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t} + \frac{t}{6}e^t - \frac{1}{9}e^{2t}, \qquad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

- **Résolution de $v'' = 4v + \frac{1}{3}(2e^t + e^{2t})$**
  En procédant de même que pour l'équation précédente, on obtient que les solutions de l'équation $v'' = 4v + \frac{1}{3}(2e^t + e^{2t})$ sont les fonctions de la forme :

$$v(t) = \gamma e^{2t} + \delta e^{-2t} - \frac{2}{9}e^t + \frac{t}{12}e^{2t}, \qquad (\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2.$$

Revenons à notre système différentiel (S) :

$$X'' = AX + b(t) \iff Y'' = DY + P^{-1}b(t) \iff Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t + \beta e^{-t} + \frac{t}{6}e^t - \frac{1}{9}e^{2t} \\ \gamma e^{2t} + \delta e^{-2t} - \frac{2}{9}e^t + \frac{t}{12}e^{2t} \end{pmatrix}, \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4,$$

où $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
Les solutions du système différentiel (S) sont donc les fonctions vectorielles de la forme :

$$X(t) = P\begin{pmatrix} \alpha e^t + \beta e^{-t} + \frac{t}{6}e^t - \frac{1}{9}e^{2t} \\ \gamma e^{2t} + \delta e^{-2t} - \frac{2}{9}e^t + \frac{t}{12}e^{2t} \end{pmatrix}, \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x(t) = (\alpha + \frac{t}{6} - \frac{2}{9})e^t + \beta e^{-t} + (\gamma + \frac{t}{12} - \frac{1}{9})e^{2t} + \delta e^{-2t} \\ y(t) = (-2\alpha - \frac{t}{3} - \frac{2}{9})e^t - 2\beta e^{-t} + (\gamma + \frac{t}{12} + \frac{2}{9})e^{2t} + \delta e^{-2t} \end{cases}, \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4.$$

Corrigé de l'exercice 19.
Le second membre vaut e^{-x} si $x \geq 0$ et e^x si $x < 0$.

1. **Résolution sur $\mathbb{R}^+$ de $y'' + y = e^{-x}$.**
   Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont les $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, et on remarque que $x \mapsto \frac{e^{-x}}{2}$ est solution de l'équation avec second membre. Les solutions sont donc les fonctions :

$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \frac{e^{-x}}{2}, \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. **Résolution sur $\mathbb{R}^-$ de $y'' + y = e^x$.**
   On remarque que $x \mapsto \frac{e^x}{2}$ est solution de l'équation avec second membre. Les solutions sont donc les fonctions :

$$y(x) = C\cos(x) + D\sin(x) + \frac{e^x}{2}, \qquad (C,D) \in \mathbb{R}^2.$$

3. **Résolution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = e^{-|x|}$.**
   Les éventuelles solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$y(x) = \begin{cases} A\cos(x) + B\sin(x) + \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x > 0 \\ C\cos(x) + D\sin(x) + \frac{e^x}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

   avec $(A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4$, et doivent être deux fois dérivables en 0. Un développement limité au voisinage de 0 donne :

$$y(x) = \begin{cases} \left(A + \frac{1}{2}\right) + \left(B - \frac{1}{2}\right)x + o(x) & \text{si } x > 0 \\ \left(C + \frac{1}{2}\right) + \left(D + \frac{1}{2}\right)x + o(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

La fonction y est dérivable en 0 si et seulement si elle possède un développement limité d'ordre 1 en 0, ce qui équivaut à $A+\frac{1}{2}=C+\frac{1}{2}$ et $B-\frac{1}{2}=D+\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $C=A$ et $D=B-1$. On a donc

$$y(x)=\begin{cases} A\cos(x)+B\sin(x)+\frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x>0 \\ A\cos(x)+(B-1)\sin(x)+\frac{e^{x}}{2} & \text{si } x<0 \end{cases},$$

et y est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $y'(0)=B-\frac{1}{2}$ (le coefficient d'ordre 1 du DL).
Reste à voir si cette fonction est bien deux fois dérivable, en étudiant le taux d'accroissement de la dérivée. On a

$$y'(x)=\begin{cases} -A\sin(x)+B\cos(x)-\frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x>0 \\ -A\sin(x)+(B-1)\cos(x)+\frac{e^{x}}{2} & \text{si } x<0 \end{cases},$$

donc

$$\frac{y'(x)-y'(0)}{x}=\begin{cases} \frac{-A\sin(x)+B\cos(x)-\frac{e^{-x}}{2}-B+\frac{1}{2}}{x} & \text{si } x>0 \\ \frac{-A\sin(x)+(B-1)\cos(x)+\frac{e^{x}}{2}-B+\frac{1}{2}}{x} & \text{si } x<0 \end{cases}.$$

En effectuant encore un DL, on obtient

$$\frac{y'(x)-y'(0)}{x}=\begin{cases} \frac{(-A+\frac{1}{2})x+o(x)}{x} & \text{si } x>0 \\ \frac{(-A+\frac{1}{2})x+o(x)}{x} & \text{si } x<0 \end{cases},$$

donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y'(x)-y'(0)}{x}=-A+\frac{1}{2}$, ce qui montre que y est deux fois dérivable en 0 et $y''(0)=-A+\frac{1}{2}$.
Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y''+y=e^{-|x|}$ sont les fonctions :

$$y(x)=\begin{cases} A\cos(x)+B\sin(x)+\frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x\geq 0 \\ A\cos(x)+(B-1)\sin(x)+\frac{e^{x}}{2} & \text{si } x<0 \end{cases},\qquad (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

Corrigé de l'exercice 20.

1. *Pour tout réel λ, la fonction $x\mapsto e^{\lambda x}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si,*

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad (1+x)\lambda^2-2\lambda+(1-x)=0 \iff \forall x\in\mathbb{R},\quad (\lambda^2-1)x+(\lambda-1)^2=0,$$

et cela équivaut (par identification des coefficients) à $\lambda=1$.
Donc la fonction $x\mapsto e^x$ est la seule solution de (H) de la forme $x\mapsto e^{\lambda x}$.

2. *On utilise la méthode d'abaissement d'ordre : puisque $x\mapsto e^x$ est une solution de (H) qui ne s'annule pas sur I, on cherche les solutions de (E) sous la forme :*

$$y(x)=e^x f(x),$$

où f est une fonction deux fois dérivable sur I.
Avec ces notations, on a, pour tout $x\in I$:

$$(1+x)y''(x)-2y'(x)+(1-x)y(x)=xe^x \iff (1+x)f''(x)+2xf'(x)=x.$$

On en déduit que la fonction y est solution de (E) sur I si, et seulement si, $z=f'$ est solution sur I de :

$$(F):\ z'(x)+\frac{2x}{1+x}z(x)=\frac{x}{1+x}$$

(car $x\mapsto 1+x$ ne s'annule pas sur I).
Résolution de (F) *: les solutions de l'équation homogène associée $z'(x)+\dfrac{2x}{1+x}z(x)=0$ sont les*

$$x\mapsto Ae^{-\int\frac{2x}{1+x}\mathrm{d}x},\qquad A\in\mathbb{R}.$$

En remarquant que $\dfrac{2x}{1+x}=2-\dfrac{2}{1+x}$, on obtient donc les solutions

$$x\mapsto Ae^{-2x+2\ln(1+x)}=A(1+x)^2e^{-2x},\qquad A\in\mathbb{R}.$$

En outre, on peut observer que la fonction constante $x \mapsto \frac{1}{2}$ *est solution de* (F)*, c'est pourquoi les solutions de* (F) *sont les*

$$z(x) = A(1+x)^2 e^{-2x} + \frac{1}{2}, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

Résolution de (*E*) *: y est solution de* (E) *si, et seulement si,*

$$f'(x) = A(1+x)^2 e^{-2x} + \frac{1}{2}, \qquad A \in \mathbb{R},$$

ce qui donne (en intégrant par parties) :

$$f(x) = -\frac{A}{4}(2x^2+6x+5)e^{-2x} + \frac{x}{2} + B, \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

Donc les solutions de (E) *sur* I *sont les fonctions de la forme :*

$$y(x) = -\frac{A}{4}(2x^2+6x+5)e^{-x} + \frac{x}{2}e^x + Be^x, \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

Quitte à changer A *en* $A/4$*, on peut réécrire :*

$$y(x) = A(2x^2+6x+5)e^{-x} + Be^x + \frac{x}{2}e^x, \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

Corrigé de l'exercice 21.
Notons $(H):\ y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$*, on veut*

$$\forall t \in I, \qquad \begin{cases} \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} + a(t)\alpha t^{\alpha-1} + b(t)t^\alpha = 0 \\ (\lambda^2 + a(t)\lambda + b(t))e^{\lambda t} = 0 \end{cases},$$

soit

$$\begin{pmatrix} \alpha t^{\alpha-1} & t^\alpha \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha)t^{\alpha-2} \\ -\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Or, $\det \begin{pmatrix} \alpha t^{\alpha-1} & t^\alpha \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = t^{\alpha-1}(\alpha - \lambda t) \neq 0$ *pour* t *suffisamment grand, donc la matrice est inversible et le système a une unique solution :*

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{t^{\alpha-1}(\alpha-\lambda t)} \begin{pmatrix} 1 & -t^\alpha \\ -\lambda & \alpha t^{\alpha-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha)t^{\alpha-2} \\ -\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(\alpha-1)-\lambda^2 t^2}{(\lambda t-\alpha)t} \\ \\ \frac{\lambda\alpha(\lambda t+1-\alpha)}{(\lambda t-\alpha)t} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc l'équation différentielle :

$$(H): \qquad t(\lambda t - \alpha)y'' + (\alpha(\alpha-1) - \lambda^2 t^2)y' + (\lambda\alpha(\lambda t + 1 - \alpha))y = 0$$