TD11 : Equations différentielles linéaires

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1 (Equation d'ordre 1 avec recollement).
Résoudre l'équation différentielle (E) : $|t|y' + (t-1)y = t^2$ sur $]0; +\infty[$, sur $]-\infty; 0[$ puis sur $\mathbb{R}$.
On pourra d'abord la résoudre sur des intervalles où l'on peut la mettre sous "forme résolue" $y' + a(t)y = b(t)$.

Exercice 2 (Equation d'ordre 2 à coefficients constants).
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 2ay' + y = e^x$, suivant les valeurs du réel a.

Exercice 3 (Equation d'ordre 1 à deux recollements).
Soit l'équation différentielle (E) : $x(1-x)y' + y = x$.

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
2. Déterminer les solutions de (E) définies sur $]-\infty, 1[$.
3. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 (Système différentiel 2×2).

1. Déterminer les couples de fonctions (x, y) solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel
$$(S_1) : \quad \begin{cases} x' = -2x + 4y \\ y' = -3x + 5y \end{cases}.$$
On pourra écrire le système sous la forme $X' = AX$, avec $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et diagonaliser A.
2. Parmi ces solutions, préciser le couple vérifiant $x(0) = -y(0) = 1$.
3. Déterminer les couples de fonctions (x, y) solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel
$$(S_2) : \quad \begin{cases} x' = -2x + 4y + 2 \\ y' = -3x + 5y + e^t \end{cases}.$$
On pourra écrire le système sous la forme $X' = AX + b(t)$, où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, et on pourra réutiliser la méthode de changement de base de la question 1., en tenant compte de l'effet sur le second membre $b(t)$.

Exercice 5 (Système différentiel 3×3 non homogène).
On considère le système différentiel (S) : $\begin{cases} x' = 2x - z + 2 \\ y' = 2x - y - 2z + 4t \\ z' = x + y \end{cases}$.

1. Écrire le système (S) sous la forme $X' = AX + b(t)$ avec $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.
2. Résolution du système homogène (H) : $X' = AX$.
   (a) Diagonaliser A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ puis déterminer les solutions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^3$ du système homogène (H).
   (b) En déduire les solutions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de (H).
3. Montrer que le système (S) possède une solution dont les composantes sont des fonctions affines. On notera X_p cette solution particulière.
4. (a) Montrer que $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est solution de (S) si et seulement si $X - X_p$ est solution de (H).
   (b) En déduire les solutions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de (S).

Exercice 6 (Système différentiel 2×2 bis).

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel (S) : $\left\{ \begin{array}{l} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y \end{array} \right.$.
2. Parmi les solutions de (S), préciser le couple vérifiant $x(0) = 2$ et $y(0) = 1$.

Exercice 7 (*Système différentiel 2×2 avec second membre).
Résolution du système différentiel (S) : $\left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - 6y + t \\ y' = 3x - 4y + e^t \end{array} \right.$.
On pourra effectuer un changement de base directement sur (S).

Exercice 8 (*Système homogène du second ordre).
On considère le système différentiel (S) : $\left\{ \begin{array}{l} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' - y' + x \end{array} \right.$.
Pour deux fonctions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables, on considère la fonction vectorielle $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ définie par $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que (x, y) est solution de (S) si et seulement si Y est solution du système différentiel (Σ) : $Y' = AY$, où $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est une matrice à préciser.
2. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ?
   On pourra considérer l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A et construire une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est T.
3. Résoudre le système (Σ).
4. En déduire les solutions de (S).

Exercice 9 (Résolution "à tâtons" d'une équation d'ordre 2).
On considère l'équation différentielle (E) : $(1 - x)y'' + xy' - y = 1$.
On note (H) l'équation homogène associée.

1. (a) Déterminer les polynômes non nuls solutions de (H) sur $\mathbb{R}$.
   Indication : raisonner d'abord sur leur degré.
   (b) Déterminer les fonctions du type $x \mapsto e^{\lambda x}$ solutions de (H) sur $\mathbb{R}$.
   (c) Trouver une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.
   (d) Résoudre l'équation (E) sur $]1; +\infty[$.
   (e) Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $(x_0, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$. Combien y a-t-il de solutions de (E) vérifiant $\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{array} \right.$?

Exercice 10 (Méthode d'abaissement d'ordre).
Résoudre (H) : $(t + 1)x''(t) - x'(t) - tx(t) = 0$ sur $I =]-1; +\infty[$ en remarquant que $t \mapsto e^t$ est solution.

Exercice 11 (Résolution à l'aide des séries entières).
On considère l'équation différentielle

$$(E) : \ x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1 + x).$$

1. Montrer l'existence d'une solution développable en série entière sur $]-1, 1[$.
2. Exprimer la fonction somme de cette série entière à l'aide des fonctions classiques.
3. Déterminer les réels r tels que la fonction $x \mapsto x^r$ soit solution de l'équation homogène associée (H) sur un intervalle ne contenant pas 0.

4. En déduire les solutions de (E) sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
5. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $]-1,+\infty[$?

Exercice 12 (Changement d'inconnue).
On considère l'équation différentielle

$$(E):\ x^2y'' + 4xy' + (2+x^2)y = 0.$$

1. Résoudre (E) sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ en posant $u = x^2y$.
2. Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13 (Extrait de CCP 2004).
On considère l'équation différentielle

$$(F):\ x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0, \qquad x > 0.$$

1. Soit z une application deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $\forall x \in]0,+\infty[$, $y(x) = z(\ln x)$. Montrer que y est solution de (F) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si l'application z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle à préciser que l'on notera (H).
2. Résoudre (H). En déduire l'ensemble des solutions de (F).
3. Déterminer l'unique solution du système suivant : $\left\{\begin{array}{l}(F)\\ y(1)=0\\ y'(1)=1\end{array}\right.$.

II Exercices supplémentaires

Exercice 14 (Equation avec une valeur absolue, bis).
L'équation différentielle $(E):\ |t|y' + (t-1)y = t^3$ admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 15 (*Résolution à l'aide des séries entières).
Soit l'équation différentielle $(E):\ 2xy' + y = 3x\cos(x^{3/2}), \quad x > 0$.

1. Déterminer une solution particulière de (E) développable en série entière
(c'est-à-dire une solution sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$, avec la suite (a_n) à déterminer). Pour "reconnaître" la solution obtenue, on pourra utiliser le DSE de la fonction sin.
2. En déduire la solution générale de (E) sur $]0,+\infty[$.

Exercice 16.
Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Résoudre le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} X'(t) = AX(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$.

Exercice 17.
Résolution du système différentiel

$$(S):\quad \left\{\begin{array}{l} x' = 3x - 2y - 3t^2 + 4t \\ y' = -x + 2y + (t-1)^2 \end{array}\right..$$

On pourra chercher une solution particulière polynomiale.

Exercice 18 (*Système du second ordre avec second membre).
Résoudre le système différentiel $(S):\ \left\{\begin{array}{l} x'' = 3x + y + e^t \\ y'' = 2x + 2y + e^{2t} \end{array}\right.$.

Exercice 19 (Coefficients constants exotique).
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = e^{-|x|}$.

Exercice 20 (Recherche de solutions exponentielles).
On considère l'équation différentielle $(E): \ (1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^x$,
et on note (H) l'équation homogène associée.

1. Y a-t-il des solutions de (H) de la forme $x \mapsto e^{\lambda x}$?
2. Résoudre (E) sur $I =]-1; +\infty[$.

Exercice 21.
Pour tous réels (α, λ), trouver une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2, notée (H), et un intervalle I tels que

$$\mathcal{S}_I(H) = Vect(t \mapsto t^\alpha, t \mapsto e^{\lambda t}).$$