Corrigé du TD10 : Séries entières

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1)* $\sum 2^n z^n = \sum (2z)^n$ *est une série géométrique : elle converge si et seulement si* $|2z| < 1$, *c'est-à-dire* $|z| < \frac{1}{2}$. *Son rayon de convergence est donc* $\boxed{R = \frac{1}{2}}$.

Quant à la valeur de la somme, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < \frac{1}{2}$,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (2z)^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(2z)^{n+1}}{1-2z} = \frac{1}{1-2z}.}$$

2) De même qu'en 1), cette série géométrique a un rayon de convergence $\boxed{R = \frac{1}{3}}$, *et pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < \frac{1}{3}$, *on a*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n z^n = \frac{1}{1-3z}.}$$

3) Cette troisième série entière est obtenue comme somme des deux premières, qui ont des rayons de convergence différents. Le rayon de convergence de $\sum (2^n + 3^n) z^n$ *est donc* $\boxed{R = \frac{1}{3}}$ *(le plus petit des deux).*

Enfin, pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < \frac{1}{3}$, *on a (puisque les deux séries convergent)*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 3^n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n z^n = \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{1-3z} = \frac{2-5z}{(1-2z)(1-3z)}.}$$

Corrigé de l'exercice 2.

1) Posons $u_n = \left|\frac{z^n}{\sqrt{n}}\right|$. *On a, pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{z^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n}}{z^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|$, *d'où* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |z|$.

On en déduit par le critère de d'Alembert (appliqué à la série à termes strictement **positifs** $\sum u_n$*) :*

- $0 < |z| < 1 \implies \sum u_n$ *converge.*
- $|z| > 1 \implies \sum u_n$ *diverge grossièrement.*

La série entière $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ *converge absolument pour* $|z| < 1$ *et diverge grossièrement pour* $|z| > 1$, *donc son rayon de convergence est* $\boxed{R = 1}$.

2) Posons $u_n = |n! z^n|$. *On a, pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n}\right| = (n+1)\,|z|$. *D'où* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, *ce qui montre que* $\sum u_n$ *diverge grossièrement pour tout* z *non nul. La série entière* $\sum n! z^n$ *diverge grossièrement pour tout* z *non nul, donc son rayon de convergence est* $\boxed{R = 0}$.

3) Posons $u_n(z) = |\ln(n+1) z^n|$. *On a, pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\,|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|,$$

car $\ln(n+2) = \ln(n) + \ln(1 + \frac{2}{n}) = \ln(n) + o(1) \sim \ln(n)$, *de même que* $\ln(n+1) \sim \ln(n)$. *D'où* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |z|$, *et on conclut comme en 1) que* $\boxed{R = 1}$.

4) Posons $u_n(z) = \left|\frac{z^n}{n^n}\right|$. *On a, pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\,|z| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|}{en},$$

car $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$*, ce qui montre (par le critère de d'Alembert) que* $\sum u_n$ *converge pour tout* z *non nul (mais aussi pour* $z=0$ *évidemment). La série entière* $\sum \frac{z^n}{n^n}$ *converge absolument pour tout* $z\in\mathbb{C}$*, donc son rayon de convergence est* $\boxed{R=+\infty}$.

5) *Posons* $u_n(z) = \left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n\right|$*. On a, pour tout* $z\in\mathbb{C}^*$*,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\times\frac{(2n)!}{(n!)^2}|z| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4n^2}|z|,$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{4}$*. On en déduit par le critère de d'Alembert (appliqué à la série à termes strictement* **positifs** $\sum u_n(z)$*) :*

- $0<|z|<4 \implies \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \implies \sum u_n$ *converge absolument.*
- $|z|>4 \implies \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \implies \sum u_n$ *diverge grossièrement.*

La série entière $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$ *converge absolument pour* $|z|<4$ *et diverge grossièrement pour* $|z|>4$*, donc son rayon de convergence est* $\boxed{R=4}$.

6) *Posons* $u_n(z) = \left|\frac{z^n}{n(\ln n)^\alpha}\right|$*. On a, pour tout* $z\in\mathbb{C}^*$*,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n(\ln n)^\alpha}{(n+1)(\ln(n+1))^\alpha}|z| = \frac{(\ln n)^\alpha}{(1+\frac{1}{n})(\ln n+\ln(1+\frac{1}{n}))^\alpha}|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|,$$

donc (comme en 1)), $\boxed{R=1}$.

Corrigé de l'exercice 3. • *Si* $|z|<1$*, alors puisque* $n^2\geq n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*, on a* $|z^{n^2}| = |z|^{n^2} \leq |z|^n$*, et donc (par le critère de comparaison pour les séries positives) la série* $\sum\limits_{n\geq 0} z^{n^2}$ *converge absolument, puisque la série géométrique* $\sum |z|^n$ *converge.*

- *Si* $|z|>1$*, alors la série* $\sum\limits_{n\geq0} z^{n^2}$ *diverge grossièrement, puisque* $|z^{n^2}| = |z|^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *(le terme général ne tend donc pas vers* 0*).*
- *Pour* $|z|=1$*, il y a également divergence grossière, puisque* $|z^{n^2}|=1$ *pour tout* n*, et donc le terme général ne tend pas vers* 0*.*

Le domaine de convergence est donc $D=\mathcal{D}(O;1)$ *(le disque unité ouvert).*

Corrigé de l'exercice 4. *1. Si* $(\cos n)$ *tendait vers* 0*, alors* $(\cos 2n)$ *aussi. Mais* $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$*, donc on aurait (par passage à la limite) :* $0=-1$*, ce qui est absurde.*

2. On a $|(\cos n)z^n| \leq |z|^n$*, donc la série converge absolument pour tout* $z\in\mathbb{C}$ *tel que* $|z|<1$*. De plus, en* $z=1$*, la série diverge grossièrement car son terme général ne tend pas vers* 0 *d'après la question précedente. Donc* $\boxed{R=1}$.

3. On calcule d'abord $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{in}x^n$ *(elle converge absolument pour* $x\in]-1;1[$*), puis on prend la partie réelle. On trouve, pour tout* $x\in]-1;1[$*,* $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\cos n)x^n = \frac{1-x\cos 1}{x^2-2x\cos 1+1}}$.

Corrigé de l'exercice 5. *1) Posons* $u_n = \left|\frac{n}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)}z^{2n+1}\right|$*. Pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *et tout* $z\in\mathbb{C}^*$*, on a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n(2n+3)}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|^2}{2n}.$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, *ce qui montre (par le critère de d'Alembert), que la série* $\sum u_n$ *converge pour tout* $z \in \mathbb{C}$. *La série entière* $\sum \frac{n}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)} z^{2n+1}$ *converge absolument pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *donc son rayon de convergence est* $\boxed{R = +\infty}$.

2) *Plusieurs cas sont à distinguer :*
   - *Si* $0 \le a < 1$, *alors on a* $a^n \in [0;1[$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *donc* $E(a^n) = 0$. *La série* $\sum E(a^n)z^n$ *est donc convergente pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *puisque la suite de ses sommes partielles est stationnaire. Le rayon de convergence est donc* $\boxed{R = +\infty}$.
   - *Si* $a = 1$, *alors la série* $\sum E(a^n)z^n = \sum z^n$ *a pour rayon de convergence* $\boxed{R = 1}$.
   - *Si* $a > 1$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $a^n - 1 < E(a^n) \le a^n$.
     Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$, *on a* $a^n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n$, *ce qui montre (par encadrement) que* $E(a^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n$. *Les séries entières* $\sum E(a^n)z^n$ *et* $\sum a^n z^n$ *ont donc le même rayon de convergence (puisque* $\sum |E(a^n)z^n|$ *et* $\sum |a^n z^n|$ *sont de même nature).*
     Or, la série géométrique $\sum a^n z^n$ *converge si et seulement si* $|az| < 1$, *i.e.* $|z| < \frac{1}{a}$, *ce qui montre que le rayon de convergence cherché est* $\boxed{R = \frac{1}{a}}$.

3) *La suite* (a_n) *est une suite d'entiers compris entre* 0 *et* 9, *elle est donc bornée. D'où :*
   - *Si* $|z| < 1$, *alors* $|a_n z^n| \le 9|z|^n$, *d'où la série* $\sum a_n z^n$ *converge absolument, par comparaison à une série géométrique convergente.*
   - *Posons* $z = 1$: *la série* $\sum a_n$ *est grossièrement divergente car son terme général ne tend pas vers* 0. *En effet, si cette suite d'entiers tendait vers* 0, *alors elle serait nulle à partir d'un certain rang. Le nombre* e *serait alors décimal (nombre fini de chiffres après la virgule), donc rationnel (quotient d'entiers), ce qui est faux.*

   Ceci montre que $\boxed{R = 1}$.

Corrigé de l'exercice 6.
1. *Si* $|x| < 1$, *alors* $\left|(-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}\right| \le |x|^n$ *(puisque* $n(n-1) \ge 2$*), et la série géométrique* $\sum |x|^n$ *converge, donc (par le critère de comparaison) la série* $\sum\limits_{n\ge2} (-1)^n \dfrac{x^n}{n(n-1)}$ *converge absolument.*
   Si $|x| > 1$, *alors* $\left|(-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}\right| = \frac{|x|^n}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *(par croissances comparées), donc la série* $\sum\limits_{n\ge2} (-1)^n \dfrac{x^n}{n(n-1)}$ *diverge grossièrement (son terme général ne tend pas vers* 0*).*
   Ceci montre que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\ge2} (-1)^n \dfrac{x^n}{n(n-1)}$ *est* $R = 1$, *et l'intervalle ouvert de convergence est* $I =]-1;1[$.
2. *La question précédente montre que* $]-1;1[\subset D \subset [-1;1]$.
   En $x = -1$ *et* $x = 1$, *la série converge absolument, puisque* $\sum\limits_{n\ge2} \dfrac{1}{n(n-1)}$ *converge (par le critère des équivalents et le fait que* $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^2}$ *converge).*
   Le domaine réel de convergence est donc $D = [-1;1]$.
3. *On sait que la fonction somme* f *est de classe* C^∞ *sur l'intervalle ouvert de convergence, donc sur* $I =]-1;1[$, *et on peut dériver la série terme à terme : en posant* $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$ *pour* $n \ge 2$, *on a :*

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n.$$

On reconnaît alors une série géométrique :

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad f''(x) = \frac{1}{1+x}.$$

4. *On en déduit par intégration :*

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)dt = f'(0) + \ln(1+x).$$

Mais $f'(0) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right)\Big|_{x=0} = 0$*, donc*

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad f'(x) = \ln(1+x).$$

Enfin, en intégrant de nouveau, on obtient pour tout $x \in]-1;1[$ *:*

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = f(0) + \int_0^x \ln(1+t)dt = f(0) + (x+1)\ln(1+x) - x.$$

Puisque $f(0) = \left(\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}\right)\Big|_{x=0} = 0$*, on a finalement*

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad f(x) = (x+1)\ln(1+x) - x.$$

Corrigé de l'exercice 7.

Cette série entière a pour rayon de convergence $R = +\infty$*, car en posant* $u_n(x) = \frac{n^3}{n!}x^n$*, on a (pour* $x \in \mathbb{C}^*$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$*),* $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^3}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*, donc la série converge absolument pour tout* $x \in \mathbb{C}^*$ *(d'après le critère de d'Alembert). Son domaine réel de convergence est donc* $\mathbb{R}$ *tout entier.*
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{n!}x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(n-1)!}x^{n-1} = x \times \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^n\right).$$

Or,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1} = x \times \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n\right),$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = xe^x.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3}{n!}x^n = x \times \frac{d}{dx}\left(x \times \frac{d}{dx}(xe^x)\right) = x \times \frac{d}{dx}\left((x+x^2)e^x\right) = (x+3x^2+x^3)e^x.$$

Corrigé de l'exercice 8.

Notons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$*. On vérifie facilement que cette série entière a pour rayon de convergence* $\boxed{R=1}$*, et diverge pour* $x=-1$ *et* $x=1$ *(on peut appliquer le critère des équivalents car* $u_n(1) \sim \frac{1}{4n}$*,* $u_n(-1) \sim -\frac{1}{4n}$*, et la série harmonique* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *diverge).*
Le domaine réel de convergence est donc $\boxed{]-1;1[}$*, et* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur cet ouvert.*
Le théorème de dérivation "terme à terme" des séries entières donne également la formule :

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}x^{4n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^{4n+2} = x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(x^4)^n = \frac{x^2}{1-x^4}.$$

Il suffit ensuite d'intégrer : puisque $f(0)=0$*, on a*

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad f(x) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^4}dt.$$

Or, on peut décomposer $\frac{t^2}{1-t^4} = \frac{1/2}{1-t^2} - \frac{1/2}{1+t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t} - \frac{1}{1+t^2}\right)$, *donc*

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[, \qquad f(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\arctan(x).}$$

Corrigé de l'exercice 9. *1. D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence, on a, pour tout* $x \in I$ *:*

$$\begin{aligned}
4xf''(x) + 2f'(x) - f(x) &= 4x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} 4n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 4(n+1)na_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \;\; .. \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1)(4n+2)a_{n+1} - a_n\right] x^n + [2a_1 - a_0] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[2(n+1)(2n+1)a_{n+1} - a_n\right] x^n
\end{aligned}$$

Donc (par unicité du DSE), f *est solution de* (E) *si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2(n+1)(2n+1)a_{n+1} - a_n = 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}a_n.}$$

2. *On procède par analyse-synthèse :*

- *Si* φ *est une solution DSE de* (E) *vérifiant* $\varphi(0) = 1$, *alors d'après la question précédente,* φ *est de la forme*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie les relations* $\left\{\begin{array}{l} a_0 = \varphi(0) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}a_n \end{array}\right.$.

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{1}{2n(2n-1)} \times \frac{1}{(2n-2)(2n-3)} \times \cdots \times \frac{1}{2\times 1}a_0 = \frac{1}{(2n)!}$$

(et cela se vérifie facilement par récurrence), d'où l'unicité d'une telle fonction φ.

- *La série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ *est absolument convergente pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *(d'après le critère de d'Alembert), son rayon de convergence est donc* $R = +\infty$.

La fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ *est donc DSE sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie* (E), *ainsi que* $\varphi(0) = 1$.

Ceci montre que l'équation différentielle (E) *possède une unique solution développable en série entière vérifiant* $\varphi(0) = 1$ *: il s'agit de* $\boxed{\varphi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}}$.

Elle est définie sur $]-\infty;+\infty[$ *car la série entière a pour rayon de convergence* $R = +\infty$.

3. (a) *Pour tout réel t, on a*

$$\cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \qquad e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!},$$

donc par composition, on obtient pour tout réel $y \geq 0$:

$$\cos(\sqrt{y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{y}^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^n}{(2n)!},$$

$$e^{\sqrt{y}} + e^{-\sqrt{y}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{y}^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\sqrt{y})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(1+(-1)^n)}_{=0 \text{ si } n \text{ est impair}} \frac{\sqrt{y}^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \frac{\sqrt{y}^{2k}}{(2k)!},$$

c'est-à-dire

$$e^{\sqrt{y}} + e^{-\sqrt{y}} = 2 \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{(2k)!},$$

ce qui montre bien que les fonctions $y \mapsto \cos(\sqrt{y})$ et $y \mapsto e^{\sqrt{y}} + e^{-\sqrt{y}}$ s'écrivent comme somme de séries entières sur $[0; +\infty[$.

(b) *On reconnaît les deux DSE de la question précédente suivant le signe de x :*

- *si $x \geq 0$, alors* $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{(2n)!} = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{|x|}} + e^{-\sqrt{|x|}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}\right)$.
- *si $x < 0$,* $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{(2n)!} = \cos(\sqrt{|x|}) = \cos(\sqrt{-x})$.

Finalement, $\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}}$.

Corrigé de l'exercice 10. 1. *Puisque $x \mapsto 1 + x^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement positive sur $\mathbb{R}$ et puisque $y \mapsto \sqrt{y}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$, on en déduit par composition que la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas.*
De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$, donc la fonction $x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$ reste également strictement positive sur $\mathbb{R}$, ce qui assure que la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Tout ceci montre que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

2. *Par dérivation de fonctions composées, on a pour tout réel x :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left((1+x^2)^{-1/2} \ln(x + \sqrt{1+x^2})\right) \\ &= -\frac{1}{2} 2x (1+x^2)^{-3/2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + (1+x^2)^{-1/2} \left(\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \right), \\ &= -x(1+x^2)^{-3/2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + (1+x^2)^{-1} \end{aligned}$$

donc $(1+x^2)f'(x) = -xf(x) + 1$, ce qui montre bien que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (1+x^2)f'(x) + xf(x) = 1,$$

et donc que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

3. (a) **Si** *f est DSE (ce qu'on ne sait pas encore !), alors il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une suite de coefficients $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert I, le fait que f soit solution de (E) sur I équivaut à :

$$(1+x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n x^{n+1} = 1,$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n-1}x^n = 1.$$

Par unicité du DSE, cela équivaut aux relations : $\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, \quad (n+1)a_{n+1} + n a_{n-1} = 0 \end{cases}$,

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = -\frac{n}{n+1}a_{n-1} \end{cases}.$$

Si f est DSE, ses coefficients (a_n) vérifient donc cette relation de récurrence.

(b) *On a aussi $a_0 = f(0) = \ln(1) = 0$, donc* $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = -\frac{n}{n+1}a_{n-1} \end{cases}$.

(c) *Facile.*

(d) *Le DSE* **possible** *de f est donc :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1}.$$

On vérifie (par le critère de d'Alembert) que cette série entière est absolument convergente pour tout $|x| < 1$ et grossièrement divergente pour tout $|x| > 1$; son rayon de convergence est donc égal à $R = 1$.

(e) *Il faut maintenant montrer que f est bien DSE :*

* *Posons $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.*
  D'après la question précédente, le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$, donc $g \in C^\infty(]-1;1[, \mathbb{R})$.
* *Les calculs faits aux questions $3.(a), (b), (c)$ montrent que la série qui définit g vérifie :*

$$\begin{cases} (1+x^2)g'(x) + xg(x) = 1, \quad x \in]-1;1[\\ g(0) = 0 \end{cases},$$

donc g est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + xy = 1, \quad x \in]-1;1[\\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Vu que f vérifie le même problème de Cauchy, on a $\boxed{f = g}$ sur $]-1;1[$.

En définitive, le DSE de f est $\boxed{\forall x \in]-1;1[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}}$.

Corrigé de l'exercice 11. *1) Le plus simple est ici de linéariser et d'additionner les DSE : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right).$$

On peut réécrire ceci sous la forme :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\left(2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} x^{2n}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{2 \times (2n)!} x^{2n}.$$

Le développement en série entière de $x \mapsto \cos^2(x)$ (valable pour tout $x \in \mathbb{R}$) est donc

$$\boxed{\cos^2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k, \text{ avec } \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ a_{2n} = \frac{(-4)^n}{2\times(2n)!} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ a_{2n+1} = 0 \end{cases}.}$$

2) *Puisque $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, la fonction $x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$ est définie sur $D =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$, et pour tout $x \in D$:*

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln((x-2)(x-3)) = \ln((2-x)(3-x)).$$

Si on se place au voisinage de 0 (donc $x \in]-\infty; 2[$), alors $2 - x > 0$ et $3 - x > 0$, donc on peut réécrire :

$$\forall x \in]-\infty; 2[, \quad \ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(2-x) + \ln(3-x) = \ln(2) + \ln(1 - \frac{x}{2}) + \ln(3) + \ln(1 - \frac{x}{3}).$$

On utilise alors la relation $\ln(1-u) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$, valable pour tout $u \in]-1; 1[$, avec $u = x/2$ puis $u = x/3$, ce qui donne :

$$\boxed{\forall x \in]-2; 2[, \quad \ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(6) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n} + 3^{-n}}{n} x^n}.$$

3) *Décomposons la fraction rationnelle en éléments simples :*

$$\frac{1}{X^2 + 2X - 3} = \frac{1}{(X-1)(X+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+3}\right).$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$:

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1/3}{1 + \frac{x}{3}}\right).$$

Il est alors facile de développer en série entière :

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n; \qquad \forall x \in]-3; 3[, \quad \frac{1}{1 + \frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n.$$

Pour que les deux DSE soient valables **simultanément**, *il faut donc se placer sur l'intersection, soit l'intervalle $]-1; 1[$:*

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = -\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n\right) = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right) x^n.$$

Finalement, le DSE voulu est

$$\boxed{\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right) x^n,}$$

et il est valable sur $]-1; 1[$.

4) *On décompose la fraction rationnelle en éléments simples :*

$$\frac{\sin(\theta)}{1 - (2\cos\theta)X + X^2} = \frac{\sin(\theta)}{(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{X - e^{i\theta}} - \frac{1}{X - e^{-i\theta}}\right).$$

Les deux racines étant de module 1, on peut développer en série entière sur le disque unité ouvert : pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\theta)}{1-(2\cos\theta)x+x^2} &= \frac{1}{2i}\left(\frac{-e^{-i\theta}}{1-e^{-i\theta}x} - \frac{-e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(-e^{-i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-i\theta}x)^n + e^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{i\theta}x)^n\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta})x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n
\end{aligned}$$

Finalement, le DSE voulu est

$$\boxed{\frac{\sin(\theta)}{1-(2\cos\theta)x+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left((n+1)\theta\right)x^n}$$

et il est valable sur $]-1;1[$.

Corrigé de l'exercice 12. *1. On pose $x = 1+u$, on a donc*

$$f(x) = f(1+u) = \frac{\ln(1+u)}{u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u}{u} = 1,$$

d'où $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, ce qui montre que f se prolonge continûment en 1.
La fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = f(x)$ si $x \neq 1$ et $g(1) = 1$ est donc un prolongement continu de f.

2. Pour tout $u \in]-1,1[$, on a

$$\ln(1+u) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n},$$

donc pour $u \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on a

$$\varphi(u) = f(1+u) = \frac{\ln(1+u)}{u} = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{u^{n-1}}{n} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{u^n}{n+1},$$

et cette formule reste vraie pour $u = 0$, puisque

$$\varphi(0) = g(1) = 1 = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{0^n}{n+1}.$$

On a donc $\varphi(u)$ qui s'écrit comme somme d'une série entière sur $]-1,1[$:

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{u^n}{n+1},$$

c'est-à-dire que φ est bien développable en série entière au voisinage de 0.

3. La question précédente montre que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-1,1[$, puisqu'elle est développable en série entière sur cet intervalle.
Puisque $g(x) = \varphi(x-1)$ pour tout $x > 0$, on obtient par composition que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,2[$ (donc au voisinage de $x = 1$, c'est ça qui nous intéresse). Par ailleurs, vu que g est trivialement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, on obtient que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 13. *1) Posons* $a_n = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ *pour tout* $n \geq 1$.

- *Si* $|z| < 1$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n z^n| \leq \frac{|z|^n}{n} \leq |z|^n$, *donc par comparaison avec la série géométrique convergente* $\sum |z|^n$, *on en déduit que la série entière* $\sum a_n z^n$ *converge absolument. Ceci montre que* $R \geq 1$.
- *Si* $z = 1$, *alors la série* $\sum |a_n z^n| = \sum |a_n|$ *diverge, car*

$$|a_n| = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n = 3p \\ \frac{1}{2n} & \text{si } n = 3p+1 \text{ ou } n = 3p+2 \end{cases},$$

donc pour tout $n \geq 1$, *on a* $|a_n| \geq \frac{1}{2n}$, *et on conclut par comparaison avec la série de Riemann divergente* $\sum \frac{1}{2n}$.

Finalement, $\boxed{R = 1}$.

2) Posons $a_n = \frac{\sin n}{n}$ *pour tout* $n \geq 1$.

- *Si* $|z| < 1$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n z^n| \leq \frac{|z|^n}{n} \leq |z|^n$, *donc par comparaison avec la série géométrique convergente* $\sum |z|^n$, *on en déduit que la série entière* $\sum a_n z^n$ *converge absolument. Ceci montre que* $R \geq 1$.
- *Si* $|z| > 1$, *alors* $\sum a_n z^n$ *diverge grossièrement. En effet, si on avait* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0$, *alors la suite* $(a_n z^n)$ *serait bornée, donc il existerait* $M > 0$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\sin(n)}{n} z^n\right| \leq M$, *c'est-à-dire* $|\sin(n)| \leq M \frac{n}{|z|^n}$. *Ceci conduit à* $\sin(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *(par croissance comparées), mais c'est faux.*
  Cela montre que $R \leq 1$.

Finalement, $\boxed{R = 1}$.

Remarque.
Le fait que la suite $(\sin n)$ *diverge n'est pas facile à prouver. On pourra se référer à la feuille de TD de révisions sur les suites numériques.*

Corrigé de l'exercice 14. *1. Il s'agit de la série entière* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, *où* $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3p \\ -1 & \text{si } n = 3p+1 \\ 0 & \text{si } n = 3p+2 \end{cases}$

Vu que $|a_n| \leq 1$, *on a* $|a_n x^n| \leq |x|^n$.
Donc la série converge absolument pour tout $x \in \mathbb{C}$ *tel que* $|x| < 1$.
Pour $x = 1$, *la série diverge grossièrement car son terme général* a_n *ne tend pas vers* 0 *(la sous-suite* (a_{3p}) *est constante égale à* 1*). Et en* $x = -1$, *c'est pareil. Ceci montre que* $\boxed{R = 1}$ *et que le domaine réel de convergence est* $\boxed{]-1;1[}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *notons* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. *On sait que la suite* $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$ *pour tout* $x \in]-1;1[$. *Pour calculer la limite* $f(x)$, *il suffit de raisonner sur la sous-suite* $(S_{3n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

$$S_{3n+1}(x) = \sum_{k=0}^{3n+1} a_k x^k = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \cdots + x^{3n} - x^{3n+1}.$$

En regroupant les termes suivant leur reste modulo 3, *on peut réécrire*

$$S_{3n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{3k} - \sum_{k=0}^{n} x^{3k+1} = (1-x)\sum_{k=0}^{n} (x^3)^k = (1-x) \times \frac{1-(x^3)^{n+1}}{1-x^3}.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, *on obtient (puisque* $(x^3)^{n+1} \to 0$*) :*

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1+x+x^2}.}$$

Corrigé de l'exercice 15. • *Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a; R_b)$.*
En effet, si par exemple $R_a < R_b$, alors étant donné un nombre complexe z :
* *si $|z| < R_a$, alors les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent, donc par somme la série $\sum(a_n + b_n)z^n$ converge. Ceci montre que $R \geq R_a$.*
* *si $R_a < |z| < R_b$, alors $\sum a_n z^n$ diverge et $\sum b_n z^n$ converge, donc par somme la série $\sum(a_n + b_n)z^n$ diverge. Ceci montre que $R \leq R_a$.*

• *Si $R_a = R_b$, alors on peut seulement dire que $R \geq R_a$.*
En effet, si $|z| < R_a$, alors $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent, donc $\sum(a_n + b_n)$ converge, ce qui montre que $R \geq R_a$.
Parfois, on a $R > R_a$. Par exemple, si $a_n = 1$ et $b_n = \frac{1}{n!} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $R_a = R_b = 1$, mais $R = +\infty$.

Corrigé de l'exercice 16. • *La série $\sum\limits_{n\geq p} x^n$ a pour domaine réel de cv $]-1;1[$ (série géométrique de raison x).*
De plus, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+p} = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}.$$

• *La série $\sum\limits_{n\geq 1} nx^{n-1}$ est la série dérivée de la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$, elle a donc le même rayon de convergence : $R = 1$. Multiplier le terme général par x ne change pas le rayon de convergence, donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} nx^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. De plus, elle diverge grossièrement pour $x \in \{-1;1\}$, donc son domaine réel de convergence est $]-1;1[$.*
De plus, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x \times \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = x \times \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

• *La série $\sum\limits_{n\geq 0} n^2x^n$ a pour domaine réel de convergence $]-1;1[$ (le rayon de convergence est $R = 1$ et la série diverge grossièrement pour $x \in \{-1;1\}$). De plus, pour tout $x \in]-1;1[$,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1} = x \times \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n\right).$$

On réutilise le résultat précédent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = x \times \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = x \times \left(\frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4}\right) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Corrigé de l'exercice 17.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, donc $e^z - 1 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Par convergence absolue, on a

$$|e^z - 1| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} - 1 = e^{|z|} - 1,$$

d'où la première inégalité $\boxed{|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1}$.
Ensuite :

$$e^{|z|} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} = |z|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{(n+1)!} \leq |z|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z|e^{|z|}.$$

(car $(n+1)! \geq n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). D'où la seconde inégalité $\boxed{e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}}$.

Corrigé de l'exercice 18.

1. • *Par composition, la fonction* f *est clairement de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^*$ *et pour tout* $x \neq 0$, *on a*

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2},$$

$$f''(x) = \frac{4-6x^2}{x^6}e^{-1/x^2},$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{8-36x^2+24x^4}{x^9}e^{-1/x^2}.$$

On conjecture donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, *il existe un polynôme* P_n *à coefficients réels tel que* $P_n(0) \neq 0$ *et*

$$\forall x \neq 0, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}.$$

On vérifie ceci par récurrence sur n, *car si*

$$\forall x \neq 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2},$$

avec $P_n(0) \neq 0$, *alors en redérivant :*

$$\forall x \neq 0, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}\right) = \frac{x^3P_n'(x)+(2-3nx^2)P_n(x)}{x^{3n+3}}e^{-1/x^2},$$

donc

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}}e^{-1/x^2},$$

en posant $P_{n+1}(x) = x^3P_n'(x) + (2-3nx^2)P_n(x)$. *De plus, on a* $P_{n+1}(0) = 2P_n(0) \neq 0$, *ce qui prouve la conjecture.*

• *Montrons par récurrence sur* n *que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $f^{(n)}(0) = 0$.

* *C'est vrai pour* $n = 0$, *car* $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$, *donc* $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$.

* *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* f *soit de classe* $\mathcal{C}^n$ *sur* $\mathbb{R}$ *et que* $f^{(n)}(0) = 0$.
La fonction $f^{(n)}$ *est donc continue en* 0. *D'après la question 1, la fonction* $f^{(n)}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et :*

$$\forall x \neq 0, \qquad \left(f^{(n)}\right)'(x) = f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}}e^{-1/x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{P_{n+1}(0)}{x^{3n+3}}e^{-1/x^2}.$$

Par croissances comparées, on a

$$\lim_{x\to 0}\left(f^{(n)}\right)'(x) = \lim_{y\to\pm\infty} P_{n+1}(0)y^{3n+3}e^{-y^2} = 0.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée appliqué à $f^{(n)}$, *on en déduit que* $f^{(n)}$ *est dérivable en* 0, *avec*

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\left(f^{(n)}\right)'(x) = 0.$$

Ainsi, la fonction $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, *ce qui montre que* $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Par récurrence, on conclut que f *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *pour tout* n, *et donc que* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *On a montré également que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

2. *Si* f *était développable en série entière, alors on aurait :*

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in\,]-\alpha,\alpha[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0,$$

ce qui est faux : f *ne s'annule qu'en* 0, *pas sur un voisinage de* 0.