TD10 : Séries entières

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1 (Pour commencer).
Déterminer le rayon de convergence des séries entières proposées et calculer leur somme sur le domaine de convergence :

$$1)\quad \sum_{n\geq 0} 2^n z^n, \qquad 2)\quad \sum_{n\geq 0} 3^n z^n, \qquad 3)\quad \sum_{n\geq 0} (2^n+3^n) z^n.$$

Exercice 2 (Calculs de rayons de convergence).
Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ 3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln(n+1) z^n$ 5) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n! z^n$ 4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^n}$ 6) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{z^n}{n(\ln n)^\alpha}$

Exercice 3 (Une série lacunaire).
Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$.

Exercice 4 (Série entière à coeff. trigonométriques).

1. Montrer que la suite $(\cos n)$ ne tend pas vers 0.
   Indication : on pourra utiliser une sous-suite.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (\cos n) z^n$.
3. Déterminer sa fonction somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 5 (Calculs de rayons de convergence plus astucieux).
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} z^{2n+1}$,

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} E(a^n) z^n$, où $a\geq 0$, et E désigne la fonction partie entière,

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, où a_n est la n^e décimale du nombre e.

Exercice 6 (Calculs autour de la série logarithmique).
On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$.

1. Déterminer son rayon de convergence et son intervalle ouvert de convergence, noté I.
2. Déterminer son domaine réel de convergence, noté D.
3. Pour tout $x\in D$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$.
   Calculer $f''(x)$ pour tout x dans un intervalle à préciser.
4. En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout x dans un intervalle à préciser.

Exercice 7 (Calculs autour de la série exponentielle).
Déterminer le domaine réel de convergence et la somme S de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}x^n$.

Exercice 8 (*Calcul de série entière un peu astucieux).
Etudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$, où $u_n(x) = \dfrac{x^{4n-1}}{4n-1}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Exercice 9 (Recherche d'une solution DSE d'équa diff).
Soit l'équation différentielle (E) : $4xy'' + 2y' - y = 0$.

On considère une fonction développable en série entière $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ définie sur un intervalle $I =]-R; R[$ avec $R > 0$.

1. Montrer que f est solution de (E) sur I si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)}a_n$.
2. En déduire que (E) possède une unique solution φ développable en série entière qui vérifie $\varphi(0) = 1$. On donnera son développement en série entière et son domaine de définition.
   On pourra procéder par analyse-synthèse.
3. On veut maintenant exprimer φ à l'aide de fonctions usuelles.
   (a) Montrer que les fonctions $y \mapsto \cos(\sqrt{y})$, et $y \mapsto \exp(\sqrt{y}) + \exp(-\sqrt{y})$ sont développables en série entière sur $[0; +\infty[$, et calculer leurs développements.
   (b) Reconnaître ainsi $\varphi(x)$ à partir de son développement en série entière.
   On séparera les cas $x \geq 0$ et $x < 0$.

Exercice 10 (Calcul d'un DSE via une équation différentielle).
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle
$$(E) \qquad (1+x^2)y' + xy = 1.$$
3. On veut montrer que f est développable en série entière.
   On propose par analyse-synthèse.
   (a) Si f est DSE, alors notons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ son développement en série entière, valable sur un intervalle ouvert I contenant 0. En utilisant l'équation différentielle (E), montrer que
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = -\frac{n}{n+1}a_{n-1} \end{cases}.$$
   (b) Que vaut a_0 ?
   (c) Montrer par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2p} = 0 \\ a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$.
   (d) En déduire le développement en série entière **éventuel** de f. On précisera le rayon de convergence.
   (e) Montrer enfin que f est développable en série entière.
   On utilisera le fait que le problème de Cauchy $\begin{cases} (1+x^2)y' + xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ *possède une unique solution sur un intervalle à préciser.*

Exercice 11 (Calculs de DSE).
Développer en série entière les fonctions suivantes (on précisera le domaine de validité) :

1) $x \mapsto \cos^2(x)$
2) $x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$.
3) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$
4) $x \mapsto \dfrac{\sin(\theta)}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$.

Indication : pour 3) et 4), on décomposera les fractions rationnelles en éléments simples.

Exercice 12 (Prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$).
Soit $f :]0,1[\cup]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.

1. Montrer que f admet un prolongement $g \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et préciser ce prolongement.
2. On pose $\varphi(u) = g(1+u)$ pour $u > -1$. Montrer que φ est développable en série entière au voisinage de 0 (on donnera explicitement un développement en série entière et son domaine de validité).
3. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

II Exercices supplémentaires

Exercice 13 (*Rayons de cv plus durs).
Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) z^n$
2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n} z^n$

Exercice 14 (Série géométrique lacunaire).
On considère la série entière

$$1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \cdots + x^{3p} - x^{3p+1} + \cdots .$$

1. Déterminer son rayon de convergence et son domaine réel de convergence.
2. Calculer la somme de cette série.

Exercice 15 (Somme de deux séries entières).
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Exercice 16 (Calculs autour des séries géométriques).
Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} x^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$, après avoir déterminé leur domaine réel de cv.

Exercice 17 (Démonstration d'inégalités par les DSE).
Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}$.

Exercice 18 (*Fonction $\mathcal{C}^\infty$ mais pas DSE).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
   On pourra d'abord montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la dérivée n^e de f sur $\mathbb{R}^*$ est de la forme $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$, où P_n est un polynôme que l'on ne cherchera pas à calculer.
2. En déduire que f n'est pas développable en série entière.