Corrigé du TD9 : Courbes paramétrées

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1. On rappelle que* $\begin{cases} x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t) \\ y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t) \end{cases}$.

— *Si* $t \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right]$ *alors le vecteur de coordonnées* $(x'(t), y'(t))$ *(non nul) est un vecteur directeur de la tangente au point* $M(t)$*. On obtient donc une équation cartésienne de la tangente à* Γ *en* $M(t)$ *en écrivant :*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x - x(t) & x'(t) \\ y - y(t) & y'(t) \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow (x - \cos^3(t)) \times 3\cos(t)\sin^2(t) - (y - \sin^3(t)) \times (-3\sin(t)\cos^2(t)) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - \cos^3(t)) \times \sin(t) + (y - \sin^3(t)) \times \cos(t) = 0 \qquad \textit{car } 3\cos(t)\sin(t) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(t)x + \cos(t)y - \cos(t)\sin(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(t)x + \cos(t)y - \cos(t)\sin(t) = 0.
\end{aligned}$$

Lorsque $t \neq 0$*, une équation cartésienne de* D_t *est donc* $\sin(t)x + \cos(t)y - \cos(t)\sin(t) = 0$.

— *En* $t = 0$ *nous avons vu en cours que la tangente* D_0 *est l'axe des abscisses.*

2. Lorsque $t \neq 0$ *:*

— *Le point d'intersection de* D_t *avec l'axe des abscisses est le point* A_t *de coordonnées* $(\cos(t), 0)$.

— *Le point d'intersection de* D_t *avec l'axe des ordonnées est le point* B_t *de coordonnées* $(0, \sin(t))$.

— *On a* $A_tB_t = \sqrt{(0 - \cos(t))^2 + (\sin(t) - 0)^2} = 1$.

Corrigé de l'exercice 2. *1. On a* $\begin{cases} x(t) = -4t^3 + o(t^3) \\ y(t) = 2 + 3t^2 + o(t^3) \end{cases}$.

Donc, au voisinage de $M(0)$*,* $(x(t), y(t)) = (0, 2) + (0, 3)t^2 + (-4, 0)t^3 + \vec{o}(t^3)$.

Le point $M(0)$ *est donc un point de rebroussement de première espèce et la demi-tangente à la courbe au point* $M(0)$ *est dirigée par le vecteur de coordonnées* $(0, 3)$ *(demi-tangente verticale).*

2. — *Les fonctions* x *et* y *sont* 2π*-périodiques donc il suffit de tracer la courbe sur un intervalle de longueur* 2π *pour obtenir la totalité de la courbe. On réduit donc notre étude à* $[-\pi; \pi]$.

— *On a, pour tout* $t \in [-\pi; \pi]$, $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$. *On peut donc restreindre notre étude à l'intervalle* $[0; \pi]$ *et on obtiendra la courbe sur* $[-\pi; 0]$ *par une symétrie d'axe* (Oy).

— *On a, pour tout* $t \in [0; \pi]$, $\begin{cases} x(\pi - t) = x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}$. *On peut donc restreindre notre étude à l'intervalle* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *et on obtiendra la courbe sur* $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ *par une symétrie d'axe* (Ox).

— *Le calcul de* $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ *ne donne rien de remarquable donc on ne peut pas plus restreindre notre étude.*

3. On a tout d'abord : $x'(t) = 3\cos(3t) - 3\cos(t) = 3(\cos(2t + t) - \cos(2t - t)) = -6\sin(2t)\sin(t)$.

De même : $y'(t) = 3\sin(3t) - 3\sin(t) = 6\cos(2t)\sin(t)$.

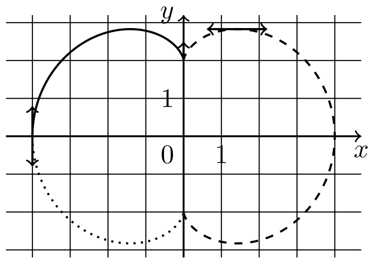
4. Nous avons réduit notre étude à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *et calculé les dérivées de* x *et* y*. Il nous reste à dresser le tableau de variations et étudier les point singuliers et remarquables.*

— ***Tableau de variations***

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0
$x(t)$	0	$\searrow$			-4
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$y(t)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0

— ***Points remarquables et singuliers***
Le point $M(0)$, étudié à la première question, est un point de rebroussement de première espèce.
En $M(\pi/4)$, la courbe possède une tangente horizontale.
En $M(\pi/2)$, la courbe possède une tangente verticale.

— ***Courbe***



Corrigé de l'exercice 3.
Pour tout couple $(t_0, t_1) \in I^2$ tel que $t_0 \neq t_1$:

$$M(t_0) = M(t_1) \iff \begin{cases} x(t_0) = x(t_1) \\ y(t_0) = y(t_1) \end{cases} \iff \begin{cases} 3(t_0^3 - t_1^3) + 2(t_0^2 - t_1^2) - (t_0 - t_1) = 0 \\ 3(t_0^2 - t_1^2) + 2(t_0 - t_1) = 0 \end{cases}.$$

En utilisant les factorisations $t_0^2 - t_1^2 = (t_0 - t_1)(t_0 + t_1)$ et $t_0^3 - t_1^3 = (t_0 - t_1)(t_0^2 + t_0 t_1 + t_1^2)$ (qui proviennent de l'identité de Bernoulli $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$), on obtient :

$$M(t_0) = M(t_1) \iff \begin{cases} (t_0 - t_1) \times (3(t_0^2 + t_0 t_1 + t_1^2) + 2(t_0 + t_1) - 1) = 0 \\ (t_0 - t_1) \times (3(t_0 + t_1) + 2) = 0 \end{cases}.$$

Vu que $t_0 - t_1 \neq 0$, on en déduit que

$$M(t_0) = M(t_1) \iff \begin{cases} 3(t_0^2 + t_0 t_1 + t_1^2) + 2(t_0 + t_1) - 1 = 0 \\ 3(t_0 + t_1) + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 = -t_0 - \frac{2}{3} \\ 3t_0^2 + 2t_0 - 1 = 0 \end{cases}.$$

On obtient deux couples solutions :

$$(t_0; t_1) = \left(-1; \frac{1}{3}\right) \text{ ou } (t_0; t_1) = \left(\frac{1}{3}; -1\right).$$

La courbe paramétrée admet donc un point double :

$$M(-1) = M(1/3) = (-1; 2).$$

Déterminons alors les tangentes en ce point double, en utilisant la dérivée :

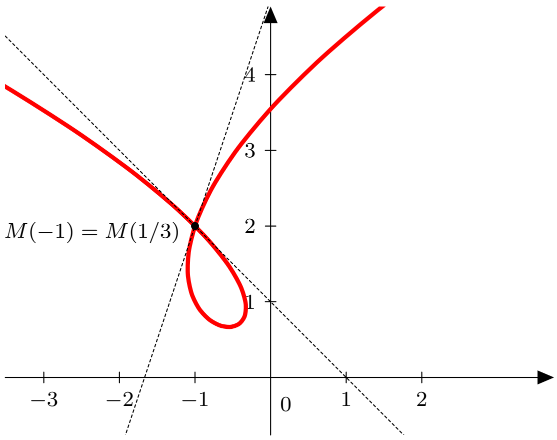
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad (x'(t); y'(t)) = (9t^2 + 4t - 1; 6t + 2).$$

- *En $t = -1$, $(x'(1); y'(1)) = (4; -4) = 4(1; -1) \neq (0, 0)$, donc le point est régulier et la tangente $\mathcal{T}_{-1}$ est dirigée par le vecteur $(1; -1)$. On a donc, pour tout $M = (x; y)$:*

$$M \in \mathcal{T}_{-1} \iff \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y-2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff y = -x + 1.$$

- *En $t = 1/3$, $(x'(1/3); y'(1/3)) = (4/3; 4) = \frac{4}{3}(1; 3) \neq (0, 0)$, donc le point est régulier et la tangente $\mathcal{T}_{1/3}$ est dirigée par le vecteur $(1; 3)$. On a donc, pour tout $M = (x; y)$:*

$$M \in \mathcal{T}_{1/3} \iff \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff y = 3x + 5.$$



Corrigé de l'exercice 4.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on remarque que le triplet $(x(t), y(t), z(t))$ vérifie une certaine relation affine :

$$x(t) + \frac{1}{2}y(t) - z(t) + 2 = 0.$$

Ceci montre que tous les points $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de la courbe sont situés dans le plan d'équation cartésienne

$$x + \frac{y}{2} - z + 2 = 0.$$

Corrigé de l'exercice 5. *1. (a) En notant $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, on a f dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ a\cos(t) \\ b \end{pmatrix}$, d'où $f'(t) \neq \overrightarrow{0}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (car $b \neq 0$). Ainsi, l'arc paramétré défini par f est régulier, donc sa tangente en tout point est dirigée par le vecteur $f'(t)$.*

Déterminons alors un vecteur non nul $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ faisant un angle constant avec $f'(t)$.

Pour tout $\overrightarrow{u}$ dans $\mathbb{R}^3$, et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\langle \overrightarrow{u}\, , \, f'(t)\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|\|f'(t)\|} = \frac{-\alpha a\sin(t) + \beta a\cos(t) + \gamma b}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \times \sqrt{a^2+b^2}},$$

donc le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. Avec ce choix, on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\langle \overrightarrow{u}\, , \, f'(t)\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|\|f'(t)\|} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, donc l'angle non orienté θ entre $\overrightarrow{u}$ et la tangente en tout point t de l'arc vérifie $\cos\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, soit $\theta = \arccos\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \in [0;\pi]$. Cet angle est constant (indépendant de t), donc l'arc est bien une hélice.

(b) Par définition, la longueur de la courbe entre $t = 0$ et $t = 2\pi$ est

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\|dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

2. Ce second arc paramétré est aussi régulier, car $f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t^2 \end{pmatrix} \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Cette fois, on cherche un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *tel que* $\frac{\langle \overrightarrow{u}\ ,\ f'(t)\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|\|f'(t)\|}$ *soit indépendant de* t.

On a :

$$\frac{\langle \overrightarrow{u}\ ,\ f'(t)\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|\|f'(t)\|} = \frac{\alpha+2\beta t+2\gamma t^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\times\sqrt{1+4t^2+4t^4}} = \frac{\alpha+2\beta t+2\gamma t^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\times\sqrt{(1+2t^2)^2}} = \frac{\alpha+2\beta t+2\gamma t^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\times(1+2t}$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *convient. Avec ce choix, on a*

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \frac{\langle \overrightarrow{u}\ ,\ f'(t)\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|\|f'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

donc la tangente fait un angle de $\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$ *avec le vecteur* $\overrightarrow{u}$ *en tout point de l'arc, qui est donc une hélice.*

Corrigé de l'exercice 6.

1. *Les fonctions* x *et* y *sont définies sur* $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. *Pour tout réel* $t \notin \{-1;0\}$, *on remarque que* $x(1/t) = y(t)$ *et* $y(1/t) = y(t)$, *donc le point* $M(1/t)$ *est le symétrique du point* $M(t)$ *par rapport à la droite d'équation* $y = x$.
On en déduit que la droite $y = x$ *est un axe de symétrie de la courbe* $\mathcal{C}$.

2. *L'image de l'intervalle* $]0;1]$ *(respectivement* $]-1;0[$*) par la fonction inverse* $t \mapsto 1/t$ *est l'intervalle* $[1;+\infty[$ *(resp.* $]-\infty;-1[$*). Donc par la question précédente, la portion de courbe correspondant aux* $t \in]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[$ *est symétrique de la portion correspondant aux* $t \in]-1;1]\setminus\{0\}$ *par rapport à la droite* $y = x$. *Quant au point* $t = 0$, *il est sur la droite* $y = x$, *puisque* $M(0) = (0;0)$.
Il suffit donc d'étudier la courbe pour $t \in]-1;1]$ *et de construire le symétrique par rapport à* $y = x$ *de la demi-trajectoire ainsi obtenue, pour reconstruire toute la courbe.*

3. *Etude de la courbe* $\mathcal{C}$ *:*

   - *Réduction du domaine d'étude : d'après la question précédente, on limite l'étude à l'intervalle* $I =]-1;1]$.

   - *Tableaux de variations : les fonctions* x *et* y *sont dérivables sur* I, *et*

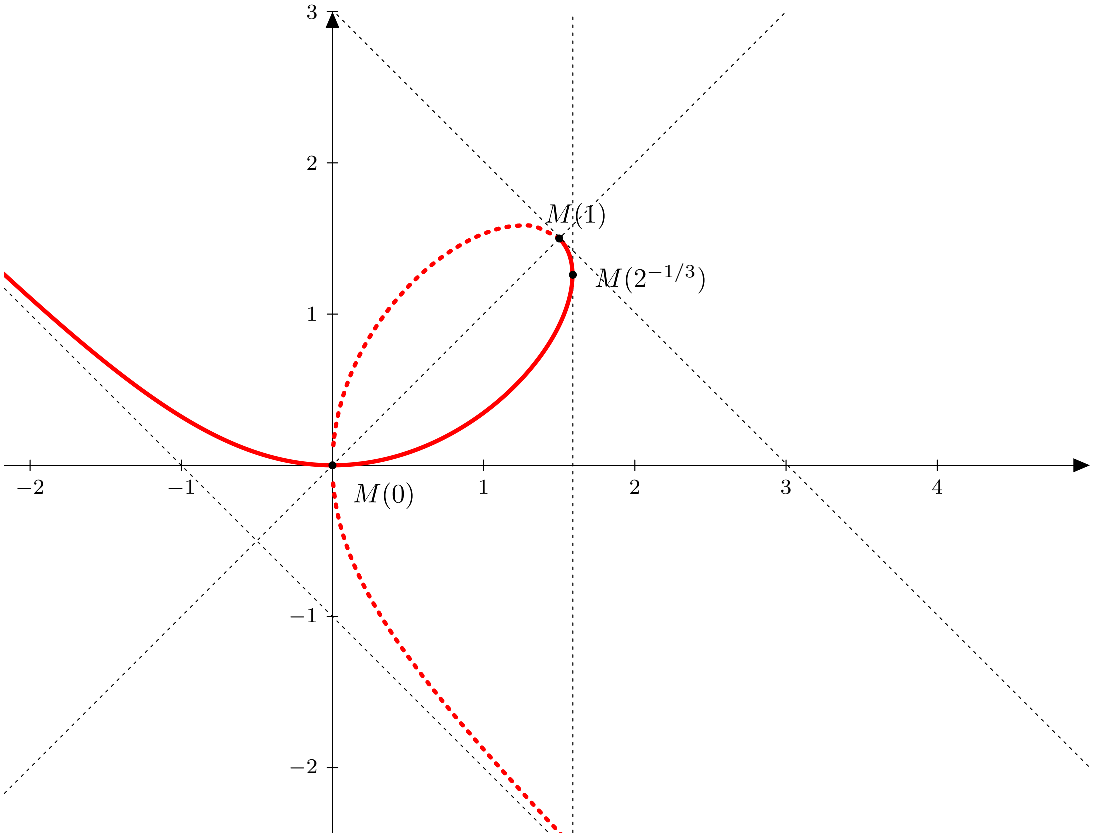
$$\forall t \in I,\quad \begin{cases} x'(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3t}{1+t^3}\right) = \dfrac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \\ y'(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3t^2}{1+t^3}\right) = \dfrac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \end{cases}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour les fonctions x et y :

t	-1		0		$\frac{1}{2^{1/3}}$		1
Signe de $x'(t)$	$\|$	$+$		$+$	0	$-$	
Variations de x	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2^{2/3}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$
Variations de y	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2^{1/3}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$
Signe de $y'(t)$	$\|$	$-$	0	$+$		$+$	

- *Points singuliers ou remarquables : vu que x' et y' ne s'annulent jamais en même temps, la courbe est régulière (sans point stationnaire).*
  En $t = 0$, la courbe passe par l'origine ($M(0) = (0; 0)$), avec une tangente dirigée par le vecteur $(x'(0); y'(0)) = (3; 0)$, donc horizontale.
  En $t = \frac{1}{2^{1/3}}$, la courbe passe par le point $M\left(\frac{1}{2^{1/3}}\right) = (2^{2/3}; 2^{1/3})$, avec une tangente dirigée par le vecteur $\left(x'\left(\frac{1}{2^{1/3}}\right); y'\left(\frac{1}{2^{1/3}}\right)\right) = (0; 2^{2/3})$, donc verticale.
  En $t = 1$, la courbe passe par le point $M(1) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$, avec une tangente dirigée par le vecteur $(x'(1); y'(1)) = \frac{3}{4}(-1; 1)$.

- *Tracé : en trait plein, la portion de courbe correspondant à $t \in]-1; 1]$, et en pointillés épais, son symétrique par rapport à la droite $y = x$ (qui correspond à $t \in]-\infty; -1[\cup [1; +\infty[$).*



4. *La distance de $M(t)$ à la droite $\mathcal{D} : y = -x - 1$ est donnée par la formule suivante (vue dans le cours de TSI 1) :*

$$d(M(t);\mathcal{D}) = \frac{|x(t) + y(t) + 1|}{\sqrt{2}} = \left|\frac{1 + 3t + 3t^2 + t^3}{\sqrt{2}(1 + t^3)}\right|,$$

soit, en factorisant le numérateur et le dénominateur par $1 + t$:

$$d(M(t);\mathcal{D}) = \left|\frac{(1 + t)^2}{\sqrt{2}(1 - t + t^2)}\right|.$$

Cette quantité tend bien vers 0 lorsque $t \to -1$ (le numérateur tend vers 0 et le dénominateur tend vers $3\sqrt{2}$), donc la droite $\mathcal{D}$ est bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ lorsque $t \to -1$.
Pour connaître la position de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{C}$, on étudie le signe de $y(t) - (-x(t) - 1)$ au voisinage de $t = -1$:

$$y(t) - (-x(t) - 1) = x(t) + y(t) + 1 = \frac{1 + 3t + 3t^2 + t^3}{1 + t^3} = \frac{(1 + t)^2}{1 - t + t^2} \underset{t\to-1}{\sim} \frac{(1 + t)^2}{3},$$

donc $y(t) - (-x(t) - 1) > 0$ au voisinage de $t = -1$, ce qui montre que la courbe est au-dessus de son asymptote $\mathcal{D}$.

5. *On remarque que $y(t) = tx(t)$, donc étant donné un point $M = (x; y)$ du plan, on a*

$$M \in \mathcal{C} \iff \exists t \neq -1, \left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right. \iff \exists t \neq -1, \left\{\begin{array}{l} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = tx \end{array}\right. .$$

On cherche à "éliminer" le paramètre t : si $x \neq 0$, on a

$$M \in \mathcal{C} \iff \exists t \neq -1, \left\{\begin{array}{l} t = y/x \\ x = \frac{3(y/x)}{1+(y/x)^3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y \neq -x \\ x^3 + y^3 = 3xy \end{array}\right. .$$

Si $x = 0$, alors

$$M \in \mathcal{C} \iff \exists t \neq -1, \left\{\begin{array}{l} 0 = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = 0 \end{array}\right. \iff \exists t \neq -1, \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \iff y = 0.$$

Dans tous les cas, le couple $(x; y)$ vérifie $x^3 + y^3 = 3xy$.
En conclusion, une équation cartésienne de la courbe $\mathcal{C}$ est $x^3 + y^3 = 3xy$.

Corrigé de l'exercice 7.

- **Réduction du domaine d'étude**
  Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques, donc on obtient la trajectoire complète (la courbe $\mathcal{C}$) en étudiant les fonctions x et y sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
  En outre, x est paire et y est impaire, donc en notant $M(t) = (x(t), y(t))$, on a $M(-t) = (x(t), -y(t))$, ce qui montre que $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox). On obtient donc une demi-trajectoire en étudiant x et y sur $[0; \pi]$, qu'on complètera par symétrie d'axe (Ox) pour reconstituer toute la courbe.
  Enfin, $M(\pi - t)$ ne s'exprime pas simplement en fonction de $M(t)$ (car $1+\cos(\pi-t) = 1-\cos(t)$), donc il n'y a pas de symétrie supplémentaire évidente.
  On fera donc l'étude sur l'intervalle $I = [0; \pi]$.
- **Tableau de variations**
  Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\forall t \in I, \qquad x'(t) = -\sin(t)*(1+2\cos(t)), \qquad y'(t) = -\sin^2(t)+(1+\cos(t))\cos(t) = 2\cos^2(t)+\cos(t)-1,$$

donc en factorisant le polynôme $2X^2 + X - 1 = (X + 1)(2X - 1)$, on obtient :

$$\begin{cases} x'(t) = -\sin(t) * (2\cos(t) + 1) \\ y'(t) = (\cos(t) + 1) * (2\cos(t) - 1) \end{cases}.$$

Sur I, on a donc $x'(t) = 0 \iff \sin(t) = 0$ ou $\cos(t) = -1/2 \iff t \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$, ainsi que $y'(t) = 0 \iff \cos(t) \in \{-1; 1/2\} \iff t \in \{\frac{\pi}{3}; \pi\}$.
De plus : sur I, $\sin(t) \geq 0$ et $\cos(t) + 1 \geq 0$, donc en dehors des points d'annulation, $x'(t)$ a le signe de $-2\cos(t) - 1$ (qui croît sur I), et $y'(t)$ a le signe de $2\cos(t) - 1$ (qui décroît sur I).
On en déduit ainsi le signe des dérivées, et le tableau de variations de x et y :

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$		π
Signe de $x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
Variations de x	2	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$		0
Variations de y	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$		0
Signe de $y'(t)$	$+$	0	$-$		0

- **Etude des points remarquables**
  Le tableau de variation met en évidence 4 points remarquables :
  * *le point de paramètre $t = 0$ est $M(0) = (2; 0)$. Puisque $\overrightarrow{f}'(0) = (0, y'(0)) = (0, 2) \neq (0, 0)$, ce point est régulier et la tangente en ce point est dirigée par $\overrightarrow{f}'(0)$, donc verticale.*

* *le point de paramètre $t = \frac{\pi}{3}$ est $M(\frac{\pi}{3}) = (\frac{3}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4})$. Puisque $\overrightarrow{f}'(\frac{\pi}{3}) = (x'(\frac{\pi}{3}), 0) \neq (0,0)$, ce point est régulier et la tangente en ce point est dirigée par $\overrightarrow{f}'(\frac{\pi}{3})$, donc horizontale.*
* *le point de paramètre $t = \frac{2\pi}{3}$ est $M(\frac{2\pi}{3}) = (-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4})$. Puisque $\overrightarrow{f}'(\frac{2\pi}{3}) = (0, y'(\frac{2\pi}{3})) \neq (0,0)$, ce point est régulier et la tangente en ce point est dirigée par $\overrightarrow{f}'(\frac{2\pi}{3})$, donc verticale.*
* *le point de paramètre $t = \pi$ est $M(\pi) = (0;0)$. Puisque $\overrightarrow{f}'(\pi) = (x'(\pi), y'(\pi)) = (0,0)$, ce point est stationnaire. Pour déterminer la tangente en ce point, on effectue un DL de x et y au voisinage de $t = \pi$, en posant $h = t - \pi$:*

$$x(t) = x(\pi + h) = (1 + \cos(\pi + h))\cos(\pi + h) = -(1 - \cos(h))\cos(h) = -\frac{h^2}{2} + o(h^3),$$

$$y(t) = y(\pi + h) = (1 + \cos(\pi + h))\sin(\pi + h) = -(1 - \cos(h))\sin(h) = -\frac{h^3}{2} + o(h^4).$$

On en déduit que

$$\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{f}(\pi + h) = (0,0) + h(0,0) + h^2(-1/2, 0) + h^3(0, -1/2) + \overrightarrow{o(h^3)}.$$

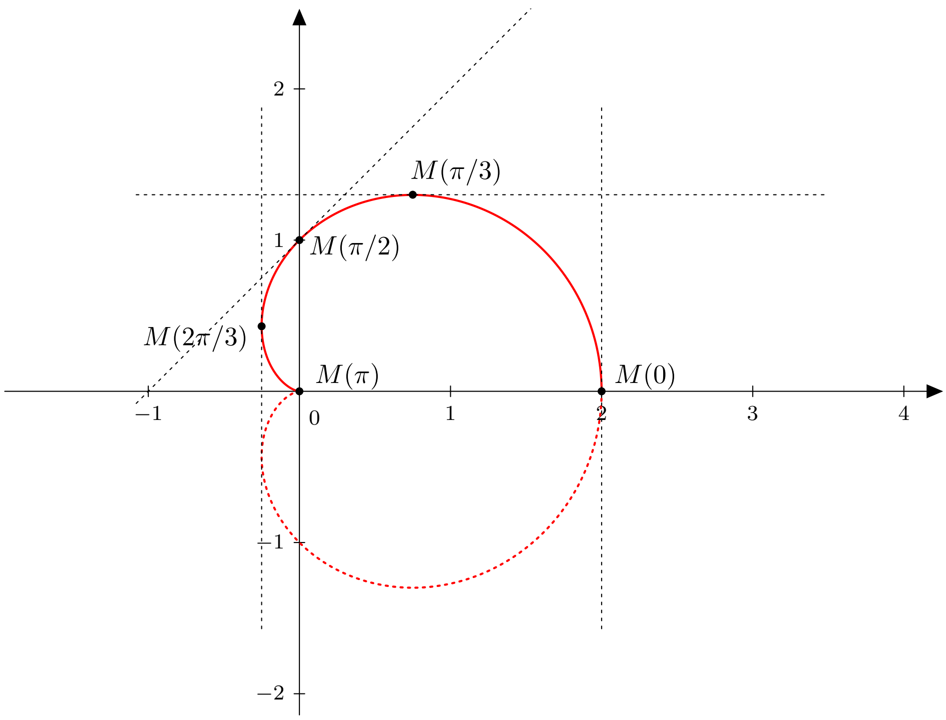
Par identification avec la formule de Taylor-Young, on obtient $\overrightarrow{f}''(\pi) = (-1, 0) \neq (0,0)$, donc ce vecteur dirige la tangente, qui est horizontale.

Remarque.— *Le vecteur $\overrightarrow{f}'''(\pi) = (0, -3)$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{f}''(\pi)$, donc les entiers caractéristiques du point $t = \pi$ sont $(p, q) = (2, 3)$: on a affaire à un point de rebroussement de première espèce.*

— *On peut aussi rajouter un point intéressant : le point de paramètre $t = \pi/2$, car $M(\pi/2) = (0; 1)$ (c'est l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées). En ce point, $\overrightarrow{f}'(\pi/2) = (-1; -1) \neq (0; 0)$, donc le point est régulier et la tangente est la droite $y = x + 1$.*

- **Tracé**

Tracé de la demi-trajectoire $t \in [0; \pi]$ en trait plein et de l'autre demi-trajectoire symétrique ($t \in [-\pi, 0]$) en pointillés :



Corrigé de l'exercice 8.

- **Réduction du domaine d'étude**
Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$, y est 2π-périodique, mais attention, ce n'est pas le cas de x, car on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad M(t+2\pi) = (x(t+2\pi), y(t+2\pi)) = (2\pi + x(t), y(t)) = M(t) + (2\pi, 0).$$

Le point $M(t+2\pi)$ est donc l'image de $M(t)$ par la translation horizontale de vecteur $2\pi\overrightarrow{i}$. Il suffit donc d'étudier la courbe sur $[-\pi, \pi]$ puis de translater la trajectoire obtenue indéfiniment (vers la gauche et la droite) pour reconstituer toute la courbe.
De plus, on a $M(-t) = (x(-t), y(-t)) = (-x(t), y(t))$, donc $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Oy).
On limitera donc l'étude à l'intervalle $I = [0; \pi]$, puis on reconstituera la trajectoire complète par symétrie par rapport à (Oy) puis translations successives de vecteurs $\pm 2\pi\overrightarrow{i}$.

- **Tableau de variations**
Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\forall t \in I, \qquad x'(t) = 1 - \cos(t), \qquad y'(t) = \sin(t).$$

On obtient directement le signe des dérivées, et le tableau de variations de x et y :

t	0		π
Signe de $x'(t)$	0	$+$	
Variations de x	0	$\nearrow$	π
Variations de y	0	$\nearrow$	2
Signe de $y'(t)$	0	$+$	0

- **Etude des points remarquables**
Le tableau de variation met en évidence 2 points remarquables :
  - * *le point de paramètre $t = 0$ est $M(0) = (0; 0)$. Puisque $\overrightarrow{f}'(0) = (x'(0), y'(0)) = (0, 0)$, ce point est stationnaire. Pour déterminer la tangente en ce point, on effectue un DL de x et y au voisinage de $t = 0$:*

$$x(t) = \frac{t^3}{6} + o(t^3), \qquad y(t) = \frac{t^2}{2} + o(t^3).$$

On en déduit que

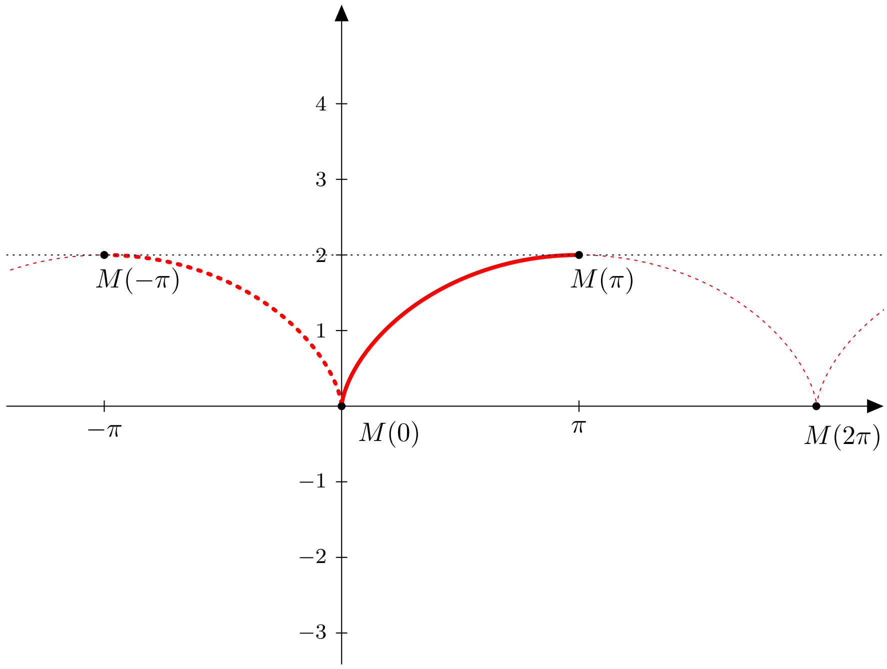
$$\overrightarrow{f}(t) = (x(t), y(t)) = (0, 0) + t(0, 0) + t^2(0, 1/2) + t^3(1/6, 0) + \overrightarrow{o(t^3)}.$$

Par identification avec la formule de Taylor-Young, on obtient $\overrightarrow{f}''(0) = (0, 1) \neq (0, 0)$, donc ce vecteur dirige la tangente, qui est verticale.

Remarque.
Le vecteur $\overrightarrow{f}'''(0) = (1, 0)$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{f}''(0)$, donc les entiers caractéristiques du point $t = 0$ sont $(p, q) = (2, 3)$: on a affaire à un point de rebroussement de première espèce.

  - * *le point de paramètre $t = \pi$ est $M(\pi) = (\pi; 2)$. Puisque $\overrightarrow{f}'(\pi) = (2, 0) \neq (0, 0)$, ce point est régulier et la tangente en ce point est dirigée par $\overrightarrow{f}'(\pi)$, donc horizontale.*

- **Tracé**
  Tracé de la trajectoire $t \in [0;\pi]$ en trait plein, de la trajectoire symétrique ($t \in [-\pi,0]$) en pointillés épais, et complétion par translation en pointillés fins :



Corrigé de l'exercice 9.
Notons $\overrightarrow{f}(t) = (x(t);y(t))$ pour tout réel t.
Si t_0 est un point d'inflexion, alors on a $(\overrightarrow{f}'(t_0), \overrightarrow{f}''(t_0))$ liée. En effet, si $(\overrightarrow{f}'(t_0), \overrightarrow{f}''(t_0))$ était libre, alors on aurait $\overrightarrow{f}'(t_0) \neq 0$ et $\overrightarrow{f}''(t_0)$ non colinéaire à $\overrightarrow{f}'(t_0)$, donc les entiers caractéristiques du point t_0 seraient $(p;q) = (1;2)$, ce qui est contradictoire (pour un point d'inflexion, p et q sont impairs).
On a donc nécessairement $\det(\overrightarrow{f}'(t_0), \overrightarrow{f}''(t_0)) = 0$. Or

$$\det(\overrightarrow{f}'(t_0), \overrightarrow{f}''(t_0)) = \begin{vmatrix} 3(t_0-2)^2 & 6(t_0-2) \\ 2t_0 & 2 \end{vmatrix} = 6(t_0-2)\begin{vmatrix} (t_0-2) & 2 \\ t_0 & 1 \end{vmatrix} = -6(t_0-2)(t_0+2).$$

Ceci amène $t_0 \in \{-2;2\}$. Il y a donc au maximum deux points d'inflexion.
On vérifie ensuite que $t_0 = 2$ et $t_0 = -2$ sont bien des points d'inflexions, par exemple en calculant les dérivées successives :

- *Pour $t_0 = 2$:*

$$\overrightarrow{f}'(2) = (0,4) \neq \overrightarrow{0}, \qquad \overrightarrow{f}''(2) = (0,2) \in Vect(\overrightarrow{f}'(2)), \qquad \overrightarrow{f}'''(2) = (6,0) \notin Vect(\overrightarrow{f}'(2)),$$

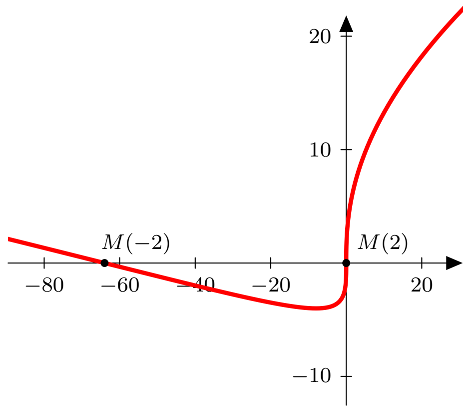
  donc les entiers caractéristiques du point $t_0 = 2$ sont $(p,q) = (1,3)$, ce qui confirme que $t_0 = 2$ est un point d'inflexion.

- *Pour $t_0 = -2$:*

$$\overrightarrow{f}'(-2) = (48,-4) \neq \overrightarrow{0}, \qquad \overrightarrow{f}''(-2) = (-24,2) \in Vect(\overrightarrow{f}'(-2)), \qquad \overrightarrow{f}'''(-2) = (6,0) \notin Vect(\overrightarrow{f}'(-2)),$$

  donc les entiers caractéristiques du point $t_0 = -2$ sont $(p,q) = (1,3)$, ce qui confirme que $t_0 = -2$ est un point d'inflexion.

En conclusion, la courbe possède deux points d'inflexion : $M(2) = (0;0)$ et $M(-2) = (-64;0)$.
Dessin de la courbe :



Corrigé de l'exercice 10.

On a $\begin{cases} x'(t) = 6t \\ y'(t) = 6t^2 \end{cases}$ *donc tous les points de* Γ *sont réguliers sauf le point* $M(0)$.

- *Commençons par nous intéresser aux points réguliers. On souhaite déterminer les points* $M(t_1)$ *et* $M(t_2)$ *tels que les tangentes en ces deux points soient perpendiculaires.*
  Le vecteur directeur de la tangente en $M(t_1)$ *est le vecteur de coordonnées* $(6t_1, 6t_1^2)$ *et celui de la tangente en* $M(t_2)$ *est le vecteur de coordonnées* $(6t_2, 6t_2^2)$.
  Ces deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si,
  $$36t_1t_2 + 36t_1^2t_2^2 = 0 \iff 1 + t_1t_2 = 0$$
  car t_1 *et* t_2 *sont supposés non nuls.*
  Ainsi, pour $t \neq 0$, *les tangentes en* $M(t)$ *et* $M\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ *sont orthogonales et ce sont les seuls points réguliers qui vérifient cette propriété.*
  Déterminons maintenant le point d'intersection des tangentes en $M(t)$ *et* $M\left(-\dfrac{1}{t}\right)$, *noté* $N(t)$.
  Ce point $N(t)$, *de coordonnées* $(X;Y)$, *doit vérifier :*
  $$\begin{vmatrix} X - 3t^2 & 6t \\ Y - 2t^3 & 6t^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} X - 3(-1/t)^2 & -6/t \\ Y - 2(-1/t)^3 & 6(-1/t)^2 \end{vmatrix} = 0.$$
  Après quelques calculs, cela nous donne $\begin{cases} X = \dfrac{t^6+1}{t^2(t^2+1)} \\ Y = \dfrac{1-t^4}{t(t^2+1)} \end{cases}$.
- *Etudions maintenant le point singulier :*
  Comme $x''(0) = 6$ *et* $y''(0) = 0$ *la tangente en* $M(0)$ *est dirigée par le vecteur de coordonnées* $(6,0)$ *qui n'est orthogonal à aucun des vecteurs directeurs des tangentes aux points réguliers.*

Ainsi, une représentation paramétrique de la courbe Γ' *est* $\begin{cases} X(t) = \dfrac{t^6+1}{t^2(t^2+1)} \\ Y(t) = \dfrac{1-t^4}{t(t^2+1)} \end{cases}$, $t \neq 0$, *qu'on peut simplifier par* t^2+1 *en utilisant les factorisations :*

$$t^6 + 1 = (t^2)^3 - (-1)^3 = (t^2+1)(t^4 - t^2 + 1), \qquad 1 - t^4 = (1-t^2)(1+t^2).$$

Finalement on obtient comme représentation paramétrique de Γ' *:*

$$\begin{cases} X(t) = \dfrac{t^4 - t^2 + 1}{t^2} = t^2 - 1 + \dfrac{1}{t^2} \\ Y(t) = \dfrac{1-t^2}{t} = \dfrac{1}{t} - t \end{cases}, \quad t \neq 0.$$

Remarque. • *Vu que $t \mapsto -\frac{1}{t}$ est une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$, égale à sa propre inverse, on obtient directement que pour tout $t \neq 0$:*

$$N\left(-\frac{1}{t}\right) = \mathcal{T}_{-\frac{1}{t}} \cap \mathcal{T}_{-\left(\frac{1}{-1/t}\right)} = \mathcal{T}_{-\frac{1}{t}} \cap \mathcal{T}_t = \mathcal{T}_t \cap \mathcal{T}_{-\frac{1}{t}} = N(t)$$

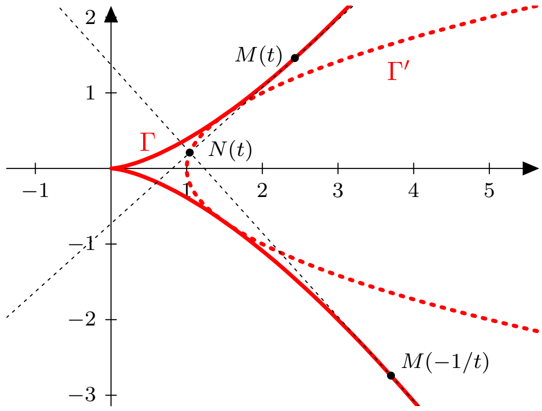
(ce qui se vérifie directement sur les formules : $X(-1/t) = X(t)$ et $Y(-1/t) = Y(t)$).
Puisque cette bijection échange $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, il suffit d'étudier la courbe Γ' sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ pour obtenir toute la trajectoire.

- *On peut enfin remarquer que pour tout $t > 0$:*

$$Y(t)^2 = \left(\frac{1}{t} - t\right)^2 = \frac{1}{t^2} + t^2 - 2 = X(t) - 1,$$

donc la courbe Γ' est en fait la parabole d'équation cartésienne $X = Y^2 + 1$.

- *Représentation de la courbe Γ en trait plein, et de son orthoptique Γ' en pointillés épais :*



II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 11.
Dans la suite, on note x et y les composantes respectives de f :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ e^{-1/t^2} & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

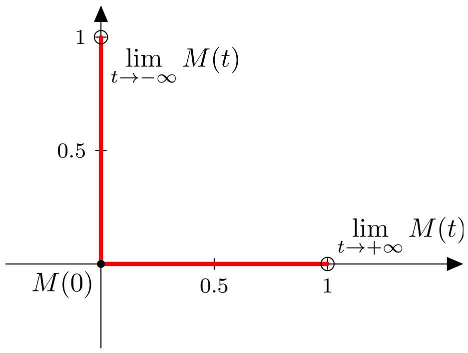
1. *Les fonctions x et y sont clairement continues en tout point de $\mathbb{R}^*$ mais aussi en 0 car*

$$\lim_{t \to 0^+} e^{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to 0^-} e^{-\frac{1}{t^2}} = 0 = x(0) = y(0).$$

Vu que la fonction $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit que x est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
De même, $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$, donc y est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.
D'où le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de x	0 $\longrightarrow$	0 $\nearrow$	1
Variations de y	1 $\searrow$	0 $\longrightarrow$	0

Ce tableau montre que la demi-trajectoire des $t \geq 0$ est incluse dans l'axe (Oy) et celle des $t < 0$ est incluse dans l'axe (Ox).
Tracé :



2. *On étudie l'existence des limites en 0^+ et 0^- de $\frac{\overrightarrow{M(0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(0)M(t)}\|}$:*

$$\frac{\overrightarrow{M(0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(0)M(t)}\|} = \begin{cases} \frac{e^{-1/t^2}\overrightarrow{i}}{\|e^{-1/t^2}\overrightarrow{i}\|} = \overrightarrow{i} & si\ t > 0 \\ \frac{e^{-1/t^2}\overrightarrow{j}}{\|e^{-1/t^2}\overrightarrow{j}\|} = \overrightarrow{j} & si\ t < 0 \end{cases},$$

donc

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\overrightarrow{M(0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(0)M(t)}\|} = \overrightarrow{i}, \qquad \lim_{t\to 0^-} \frac{\overrightarrow{M(0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(0)M(t)}\|} = \overrightarrow{j},$$

ce qui montre que la courbe Γ possède deux demi-tangentes perpendiculaires en $t = 0$ (une horizontale et une verticale).
Ces deux demi-tangentes n'étant pas colinéaires, la courbe ne possède pas de tangente au point de paramètre $t = 0$ (point "anguleux").

3. *Il suffit de montrer que la fonction x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (pour y c'est similaire).*
x est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.
L'étude au voisinage de 0 est difficile : il faut montrer par récurrence que toutes les dérivées de x ont une limite nulle en 0.
On renvoie pour cela à la feuille d'exercices sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 12.

- **Réduction du domaine d'étude**
Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$. Vu que x est paire et y est impaire, le point $M(-t) = (x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$ est le symétrique de $M(t) = (x(t), y(t))$ par rapport à l'axe (Ox). Il suffit donc d'étudier la courbe sur $I = [0; +\infty[$ pour avoir une demi-trajectoire, que l'on complètera par symétrie d'axe (Ox) pour reconstituer la courbe complète.

- **Tableau de variations**
Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x'(t) = 6t, \qquad y'(t) = 9t^2 - 1 = (3t-1)(3t+1).$$

On en déduit ainsi le tableau de variations de x et y sur I :

t	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $x'(t)$	0		$+$		
Variations de x	-1	$\nearrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$
Variations de y	0	$\searrow$	$-\frac{2}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $y'(t)$		$-$	0	$+$	

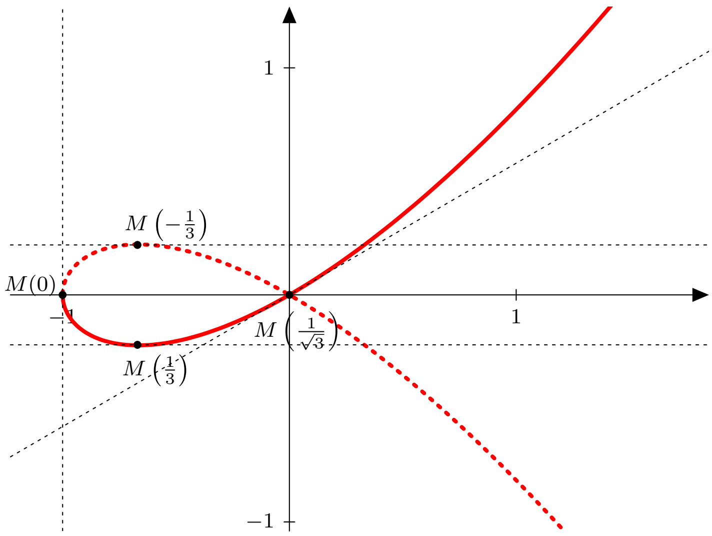
- **Etude des points remarquables**
  Le tableau de variation met en évidence 2 points remarquables :

  * *le point de paramètre* $t = 0$ *est* $M(0) = (-1; 0)$. *Puisque* $\overrightarrow{f}'(0) = (x'(0), y'(0)) = (0, -1) \neq (0, 0)$, *ce point est régulier et la tangente en ce point est dirigée par* $\overrightarrow{f}'(0)$, *donc verticale.*

  * *le point de paramètre* $t = \frac{1}{3}$ *est* $M(\frac{1}{3}) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{9})$. *Puisque* $\overrightarrow{f}'(\frac{1}{3}) = (x'(\frac{1}{3}), y'(\frac{1}{3})) = (2, 0) \neq (0, 0)$, *ce point est régulier et la tangente en ce point est dirigée par* $\overrightarrow{f}'(\frac{1}{3})$, *donc horizontale.*

  Remarque.
  On peut aussi chercher les points où la courbe coupe l'un des deux axes de coordonnées.
  Puisque pour tout $t \in I$, $x(t) = 0 \iff t \in \frac{1}{\sqrt{3}}$ *et* $y(t) = 0 \iff t \in \{0; \frac{1}{\sqrt{3}}\}$, *on obtient que sur* I, *la courbe coupe les axes en deux points :* $t = 0$ *et* $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
  On a alors $M(0) = (-1; 0)$ *et* $M(\frac{1}{\sqrt{3}}) = (0, 0)$.
  Au point de paramètre $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$, *on a* $\overrightarrow{f}'(\frac{1}{\sqrt{3}}) = (2\sqrt{3}, 2) \neq (0, 0)$, *donc ce point est régulier et la tangente en ce point est dirigée par ce vecteur : il s'agit de la droite d'équation* $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.
  Par symétrie d'axe (Ox), *on aura également* $M(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = (0, 0)$.

- **Tracé**
  Tracé de la demi-trajectoire $t \in [0; +\infty[$ *en trait plein et de l'autre demi-trajectoire symétrique* $(t \in]-\infty, 0])$ *en pointillés :*



- **Calcul de la longueur de la boucle**
  D'après le tracé, la boucle en question est la portion de courbe délimitée par les points de paramètre $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$. En utilisant la symétrie d'axe (Ox), on peut calculer simplement la longueur de cette boucle :

$$L = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \|\overrightarrow{f}'(t)\| dt = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \|\overrightarrow{f}'(t)\| dt = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

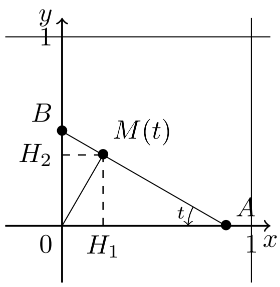
c'est-à-dire

$$L = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{36t^2 + (9t^2-1)^2} dt = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{81t^4 + 18t^2 + 1} dt,$$

ou encore

$$L = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{(9t^2+1)^2} dt = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (9t^2+1) dt = 2\left(3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Corrigé de l'exercice 13. *1.*



Il est tout d'abord important de remarquer que A a pour coordonnées $(\cos(t), 0)$ (en effet, $\cos(t) = \frac{OA}{AB} = OA = x_A$) et B a pour coordonnées $(0, \sin(t))$.
Dans le triangle OAM, $\sin(t) = \frac{OM}{OA} = \frac{OM}{\cos(t)}$.
Donc $OM = \sin(t)\cos(t)$.
Dans le triangle OH_2M, $\sin(t) = \frac{H_2M}{OM} = \frac{x(t)}{OM}$ et $\cos(t) = \frac{OH_2}{OM} = \frac{y(t)}{OM}$.
On en déduit bien que $\begin{cases} x(t) = \sin^2(t)\cos(t) \\ y(t) = \cos^2(t)\sin(t) \end{cases}$.

2. (a) ***Réduction du domaine d'étude***
- *Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$.*
- *Les fonctions x et y sont 2π-périodiques donc on peut restreindre notre étude à l'intervalle $[-\pi;\pi]$ et on obtiendra la totalité de la courbe.*
- *On a $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$. On peut donc restreindre notre étude à l'intervalle $[0;\pi]$ et grâce à une symétrie d'axe (Ox) on obtiendra la courbe sur $[-\pi;0]$.*
- *On a $\begin{cases} x(\pi-t) = -x(t) \\ y(\pi-t) = y(t) \end{cases}$. On peut donc restreindre notre étude à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et grâce à une symétrie d'axe (Oy) on obtiendra la courbe sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.*

— *On a* $\left\{\begin{array}{l} x(\pi/2-t)=y(t) \\ y(\pi/2-t)=x(t) \end{array}\right.$ *. On peut donc restreindre notre étude à l'intervalle* $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ *et grâce à une symétrie par rapport à la première bissectrice on obtiendra la courbe sur* $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

En résumé : étude sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ *puis symétrie par rapport à la première bissectrice, puis symétrie par rapport à* (Oy) *et enfin symétrie par rapport à* (Ox).

(b) ***Tableaux de variations***

On a

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t)=2\sin(t)\cos^2(t)-\sin^3(t) \\ y'(t)=-2\cos(t)\sin^2(t)+\cos^3(t) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x'(t)=\sin(t)(2\cos^2(t)-\sin^2(t)) \\ y'(t)=\cos(t)(-2\sin^2(t)+\cos^2(t)) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x'(t)=\sin(t)(3\cos^2(t)-1) \\ y'(t)=\cos(t)(3\cos^2(t)-2) \end{array}\right. .$$

On remarque alors que, pour tout $t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $3\cos^2(t)-1\geqslant\frac{1}{2}>0$. *Donc* $x'(t)\geqslant 0$.

De plus, $3\cos^2(t)-2=0\Leftrightarrow\cos(t)=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. *On pose alors* $t_0=\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

On obtient le tableau suivant :

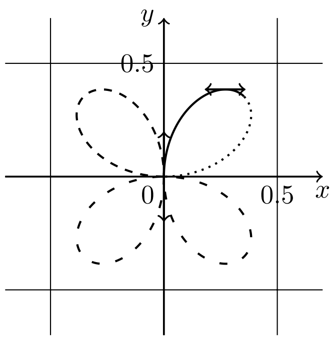
t	0		t_0		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$+$		$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(c) ***Points singuliers ou remarquables***

Pas de point singulier ici.

On notera une tangente verticale au point de paramètre $t=0$ *et une tangente horizontale au point de paramètre* t_0.

(d) ***Courbe***



Corrigé de l'exercice 14.

- **Réduction du domaine d'étude**
  Les fonctions x *et* y *sont définies sur* $\mathbb{R}^*$.
  On ne peut pas a priori réduire le domaine d'étude (par exemple, $x(-t)=-x(t)$*, mais* $y(-t)$ *ne s'exprime pas simplement en fonction de* $y(t)$*).*
- **Tableau de variations**

Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad \begin{cases} x'(t) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{1 - \frac{1}{t^2}}{2} = \dfrac{(t-1)(t+1)}{2t^2} \\[2ex] y'(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2}{t} - t^2\right) = -\dfrac{2}{t^2} + \dfrac{2}{t^3} = \dfrac{2(1-t)}{t^3} \end{cases}.$$

On en déduit facilement le signe de x', y' et donc les variations de x et y sur $\mathbb{R}^*$:

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $x'(t)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
Variations de x	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
Variations de y	0	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
Signe de $y'(t)$		$-$		$-$	||	$+$	0	$-$	

- **Etude des points remarquables**
  Le tableau de variation met en évidence 2 points remarquables :
  * *le point de paramètre $t = -1$ est $M(-1) = (-1; -3)$. Puisque $\overrightarrow{f}'(-1) = (x'(-1), y'(-1)) = (0, -4) \neq (0, 0)$, ce point est régulier et la tangente en ce point est dirigée par $\overrightarrow{f}'(-1)$, donc verticale.*
  * *le point de paramètre $t = 1$ est $M(1) = (1; 1)$. Puisque $\overrightarrow{f}'(1) = (x'(1), y'(1)) = (0, 0)$, ce point est stationnaire. Pour déterminer la tangente en ce point, on peut calculer les dérivées successives en $t = 1$:*

    $$\overrightarrow{f}''(1) = (x''(1), y''(1)) = (t^{-3}, 4t^{-3} - 6t^{-4})_{|t=1} = (1; -2) \neq (0, 0),$$

    donc la tangente à la courbe est dirigée par $\overrightarrow{f}''(1)$, c'est la droite d'équation cartésienne :

    $$y = -2x + 3.$$

    L'entier caractéristique du point de paramètre $t = 1$ est donc $p = 2$, ce qui montre qu'il s'agit d'un point de rebroussement (car p est pair).
    On peut préciser le type de rebroussement en calculant la dérivée suivante :

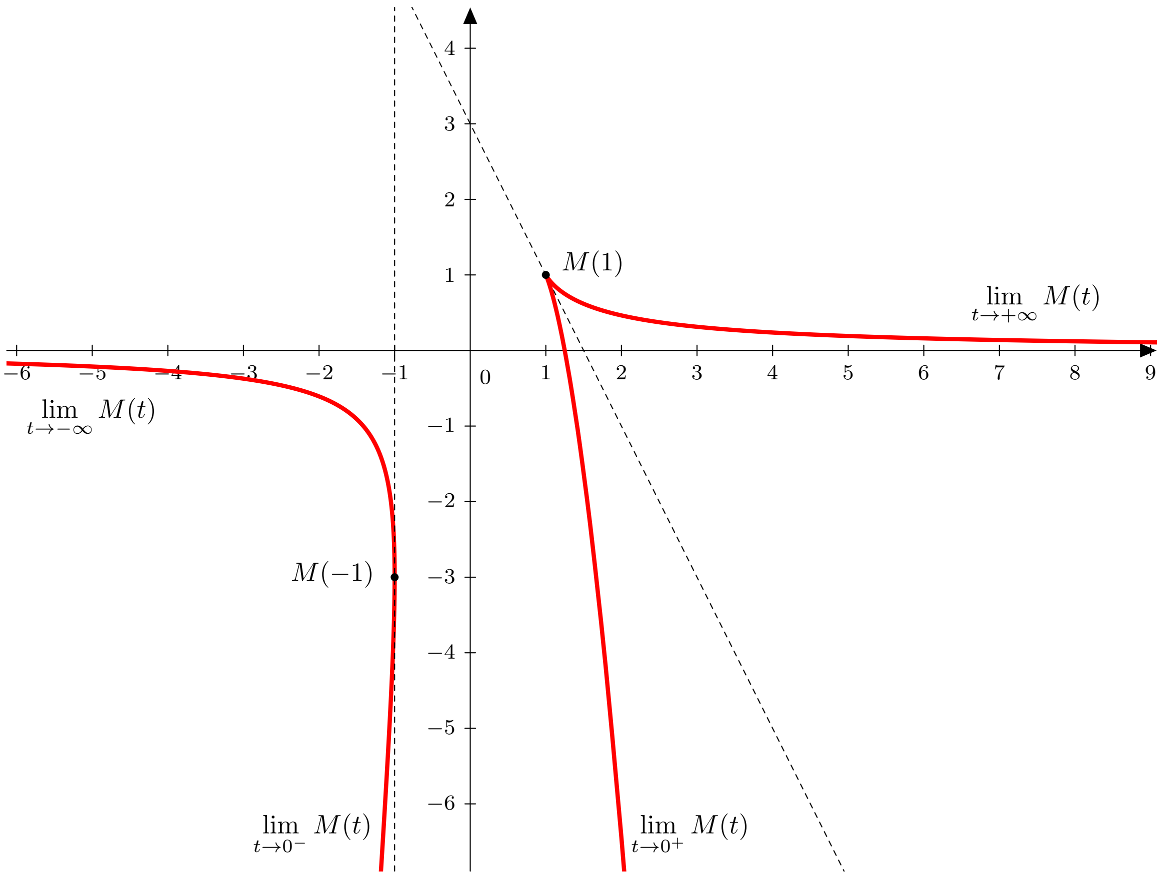
    $$\overrightarrow{f}'''(1) = (x'''(1), y'''(1)) = (-3t^{-4}, -12t^{-4} + 24t^{-5})_{|t=1} = (-3; 12) \notin Vect(\overrightarrow{f}''(1)),$$

    donc le second entier caractéristique est $q = 3$ (impair), ce qui montre qu'il s'agit d'un rebroussement de première espèce.

  On peut également remarquer les faits suivants :

* *lorsque $t \to -\infty$, $x(t) \to -\infty$ et $y(t) \to 0^-$, donc la courbe admet l'axe $y = 0$ comme asymptote horizontale "en montant vers la gauche";*
* *lorsque $t \to +\infty$, $x(t) \to +\infty$ et $y(t) \to 0^+$, donc la courbe admet l'axe $y = 0$ comme asymptote horizontale "en descendant vers la droite".*

- **Tracé**



Corrigé de l'exercice 15.

- **Réduction du domaine d'étude**

Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$, x est $\frac{2\pi}{3}$-périodique (car $x(t+\frac{2\pi}{3}) = \cos(3t+2\pi) = \cos(3t) = x(t)$), et y est π périodique (car $y(t+\pi) = \sin(2t+2\pi) = \sin(2t) = y(t)$). Donc la courbe est 2π-périodique puisque 2π est le plus petit multiple entier de $\frac{2\pi}{3}$ et π :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad M(t+2\pi) = (x(t+2\pi), y(t+2\pi)) = (x(t+3*\frac{2\pi}{3}, y(t+2*\pi)) = (x(t), y(t)) = M(t).$$

On obtient donc la trajectoire complète en réalisant une étude sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
En outre :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad M(-t) = (x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t)),$$

donc le point $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses.
On obtient donc une demi-trajectoire en étudiant x et y sur l'intervalle $[0;\pi]$.
Enfin :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad M(\pi-t) = (x(\pi-t), y(\pi-t)) = (\cos(3\pi-3t), \sin(2\pi-2t)) = (-\cos(3t), -\sin(2t)) = -(x(t), y(t)),$$

donc le point $M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport au centre O.
On peut donc encore réduire l'étude à l'intervalle $I = [0; \frac{\pi}{2}]$.
On obtient ainsi un quart de trajectoire, que l'on complètera par symétrie de centre O pour avoir la demi-trajectoire ($t \in [0,\pi]$), puis par symétrie d'axe (Ox) pour avoir la trajectoire complète.

- **Tableau de variations**

Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x'(t) = -3\sin(3t) \\ y'(t) = 2\cos(2t) \end{cases}$,
donc sur I, x' s'annule en 0 et $\frac{\pi}{3}$ et y' s'annule en $\frac{\pi}{4}$.
Lorsque t parcourt $I = [0; \frac{\pi}{2}]$, $3t$ parcourt $[0; \frac{3\pi}{2}]$, donc, connaissant les variations de cos, *on en déduit que x est décroissante sur $[0; \frac{\pi}{3}]$ et croissante sur $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$.*
De même, puisque $2t$ parcourt $[0; \pi]$, la fonction y est croissante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.
On en déduit aisément le tableau de variations de x et y sur I :

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $x'(t)$	0	$-$	0	$+$
Variations de x	1 $\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\searrow$	-1 $\nearrow$	0
Variations de y	0 $\nearrow$	1 $\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\searrow$	0
Signe de $y'(t)$	$+$	0	$-$	

- **Etude des points remarquables**

Le tableau de variation met en évidence 4 points remarquables :

  * *le point de paramètre $t = 0$ est $M(0) = (1; 0)$. Puisque $\overrightarrow{f}'(0) = (0, y'(0)) = (0, 2) \neq (0, 0)$, ce point est régulier et la tangente en ce point est dirigée par $\overrightarrow{f}'(0)$, donc verticale.*

  * *le point de paramètre $t = \frac{\pi}{4}$ est $M(\frac{\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$. Puisque $\overrightarrow{f}'(\frac{\pi}{4}) = (x'(\frac{\pi}{4}), 0) = (-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0) \neq (0, 0)$, ce point est régulier et la tangente en ce point est dirigée par $\overrightarrow{f}'(\frac{\pi}{4})$, donc horizontale.*

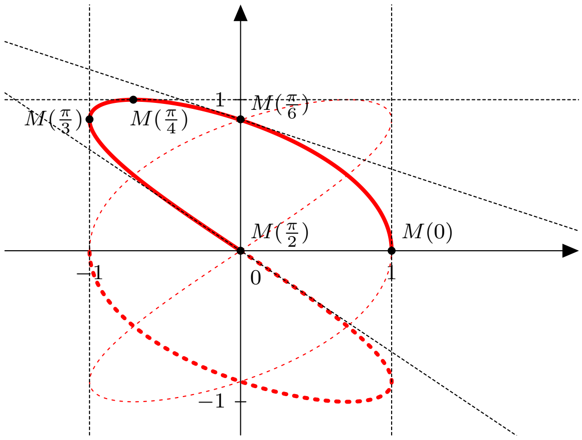
  * *le point de paramètre $t = \frac{\pi}{3}$ est $M(\frac{\pi}{3}) = (-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Puisque $\overrightarrow{f}'(\frac{\pi}{3}) = (0, y'(\frac{\pi}{3})) = (0, -1) \neq (0, 0)$, ce point est régulier et la tangente en ce point est dirigée par $\overrightarrow{f}'(\frac{\pi}{3})$, donc verticale.*

  * *le point de paramètre $t = \frac{\pi}{2}$ est $M(\frac{\pi}{2}) = (0; 0)$. Puisque $\overrightarrow{f}'(\frac{\pi}{2}) = (3, -2) \neq (0, 0)$, ce point est régulier et la tangente en ce point est la droite dirigée par le vecteur $(3, -2)$ et passant par le point $(0, 0)$: il s'agit de la droite d'équation cartésienne $y = -\frac{2}{3}x$.*

Remarque.
On peut aussi rajouter un point intéressant : le point de paramètre $t = \frac{\pi}{6}$, car $M(\frac{\pi}{6}) = (0; \frac{\sqrt{3}}{2})$ (c'est l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées). En ce point, $\overrightarrow{f}'(\pi/6) = (-3; 1) \neq (0; 0)$, donc le point est régulier et la tangente en ce point est la droite dirigée par le vecteur $(-3, 1)$ et passant par le point $(0; \frac{\sqrt{3}}{2})$: il s'agit de la droite d'équation cartésienne $y = -\frac{1}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- **Tracé**

Tracé de la trajectoire $t \in [0; \pi/2]$ en trait plein, de la trajectoire symétrique par rapport à O ($t \in [\pi/2, \pi]$) en pointillés épais, et complétion par symétrie d'axe (Ox) en pointillés fins :



Corrigé de l'exercice 16. *1. (a)* ***Réduction du domaine d'étude***

— *Les fonctions x et y sont définies sur $]0;\pi[$.*

— *On a* $\begin{cases} x(\pi - t) = x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}$. *On peut donc restreindre notre étude à l'intervalle* $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ *et grâce à une symétrie d'axe (Ox) on obtiendra la courbe sur* $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$.

— *Le calcul de* $x\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$ *ne donne rien de remarquable donc on ne peut pas plus réduire notre étude.*

(b) ***Tableaux de variations***

On a tout d'abord :

$$x'(t) = -2\sin(t)\cos(t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}(1 - 2\sin^2(t)) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}(1 - \sqrt{2}\sin(t))(1 + \sqrt{2}\sin(t)).$$

Et $y'(t) = \frac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\sin(2t)\right) = \cos(2t)$.

Donc on a le tableau suivant :

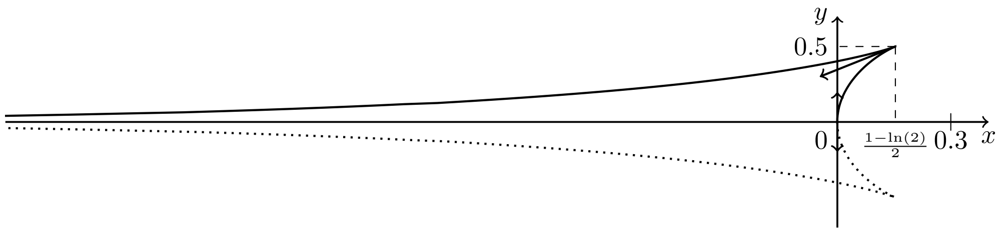
t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	‖	$+$	0	$-$	0
$x(t)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2)$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

(c) ***Points singuliers ou remarquables***

— *En* $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, *la courbe possède une tangente verticale.*

— *Le point* $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ *: l'étude locale n'est pas demandée ici. Afin d'avoir le vecteur tangent, déterminons les dérivées secondes.*
On a $x''(t) = -2\cos(2t) - \dfrac{1}{\sin^2(t)}$ *et* $y''(t) = -2\sin(2t)$.
Donc $x''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -2$ *et* $y''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -2$.
Un vecteur directeur de la tangente est donc le vecteur $\overrightarrow{u}(-2,-2)$.

(d) ***Courbe***



2. *Les deux points singuliers sont* $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *et* $M\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.
Grâce à la symétrie de la courbe, la longueur de la courbe entre ces deux points est égale à 2 fois la longueur entre $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *et* $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$. *On a donc :*

$$\begin{aligned} L &= 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{\left(-\sin(2t)+\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\right)^2+(\cos(2t))^2 dt} \\ &= 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{\sin^2(2t)-2\frac{\sin(2t)\cos(t)}{\sin(t)}+\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}+\cos^2(2t)dt} \\ &= 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{1-4\cos^2(t)+\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}}dt \\ &= 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{\frac{1-4\cos^2(t)\sin^2(t)}{\sin^2(t)}}dt = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{\frac{1-\sin^2(2t)}{\sin^2(t)}}dt \\ &= 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{\frac{\cos^2(2t)}{\sin^2(t)}}dt = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{|\cos(2t)|}{|\sin(t)|}dt = -2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos(2t)}{\sin(t)}dt. \end{aligned}$$

On pose alors $u=\cos(t)$, $du=-\sin(t)dt$ *et* u *varie entre* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* 0. *On obtient alors :*

$$L = 2\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{1-2u^2}{1-u^2}du = 2\int_0^{\sqrt{2}/2}\left(2-\frac{1}{2(1-u)}-\frac{1}{2(1+u)}\right)du = 2\sqrt{2}+\ln(3-2\sqrt{2}).$$

Corrigé de l'exercice 17. 1. *Les fonctions* x, y *et* z *sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$. *On a :*

$$\left\{\begin{array}{c} x'(t) = -\sin(t)\cos(t)-(1+\cos(t))\sin(t) = -\sin(t)-\sin(2t) = -2\sin(3t/2)\cos(t/2) \\ y'(t) = -\sin^2(t)+(1+\cos(t))\cos(t) = \cos(t)+\cos(2t) = 2\cos(3t/2)\cos(t/2) \\ z'(t) = 2\cos(t/2) \end{array}\right. .$$

On remarque que les seules valeurs de t *pour lesquelles* $z'(t)$ *s'annulent sont* $t_k=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
On a, de plus, $x'(t_k)=0$ *et* $y'(t_k)=0$.
Donc, tous les points $M(t_k)$ *sont singuliers.*
Tous les autres points de Γ *sont réguliers.*
Lorsque $t\neq(2k+1)\pi$, *un vecteur directeur de la tangente en* $M(t)$ *est le vecteur* $\overrightarrow{u}$ *de coordonnées* $(x'(t),y'(t),z'(t))$.
On a alors $||\overrightarrow{u}||^2=(-2\sin(3t/2)\cos(t/2))^2+(2\cos(3t/2)\cos(t/2))^2+(2\cos(t/2))^2=8\cos^2(t/2)$.
Donc, un vecteur directeur unitaire de la tangente est le vecteur $\overrightarrow{U}$ *de coordonnées* $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(3t/2),\cos(3t/2),1)$.

2. *On note* $\overrightarrow{k}$ *le vecteur de coordonnées* $(0,0,1)$ *(c'est un vecteur directeur unitaire de* (Oz)*).*
On sait alors que le cosinus de l'angle non orienté $(\overrightarrow{U},\overrightarrow{k})$ *est égal à* $\frac{\overrightarrow{U}.\overrightarrow{k}}{||\overrightarrow{U}||||\overrightarrow{k}||}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Ainsi, en tous les points réguliers de Γ, *la tangente fait un angle (non orienté) de mesure* $\frac{\pi}{4}$ *avec l'axe* (Oz).

3. *Les fonctions x, y et z sont 2π-périodiques, donc il suffit de calculer la longueur de Γ sur un intervalle de longueur 2π pour avoir toute la longueur.*
   Pour tout $t \neq (2k+1)\pi$, $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{8\cos^2(t/2)} = 2\sqrt{2}|\cos(t/2)|$.
   On a donc $L = \int_{-\pi}^{\pi} 2\sqrt{2}\cos(t/2)dt = \left[4\sqrt{2}\sin(t/2)\right]_{-\pi}^{\pi} = 8\sqrt{2}$.

Corrigé de l'exercice 18. 1. *Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction f' est de classe $\mathcal{C}^1$, donc la fonction "produit vectoriel" σ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. De plus, on a*

$$\forall t \in I, \quad \sigma'(t) = \underbrace{f'(t) \wedge f'(t)}_{=\overrightarrow{0}} + f(t) \wedge f''(t) = f(t) \wedge f''(t).$$

Mais par hypothèse, les vecteurs $f(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires donc $\sigma'(t) = \overrightarrow{0}$ pour tout $t \in I$. Ainsi, la fonction vectorielle σ est de dérivée nulle **sur un intervalle**, *donc elle est constante (puisque chaque composante est de dérivée nulle sur l'intervalle I, donc constante).*

2. *Par hypothèse, on a $\sigma(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ (le produit vectoriel de deux vecteurs linéairement indépendants est non nul). D'après la question précédente, la fonction σ est constante sur I, donc*

$$\forall t \in I, \qquad f(t) \wedge f'(t) = \sigma(t) = \sigma(t_0).$$

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)$ est donc orthogonal au vecteur $\sigma(t_0)$ (qui ne dépend pas de t) pour tout $t \in I$. Le point $M(t)$ est donc situé sur le plan $\mathcal{P}$ passant par O de vecteur normal $\sigma(t_0)$, et ce pour tout $t \in I$. La trajectoire $\{M(t),\ t \in I\}$ est donc entièrement contenue dans ce plan.