TD9 : Courbes paramétrées

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1 (Calculs sur l'astroïde).

On reprend la courbe Γ étudiée dans le cours dont un paramétrage est $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$.

1. Pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, déterminer une équation cartésienne de la tangente D_t à Γ au point de paramètre t.
2. Déterminer, lorsque cela est possible, les deux points d'intersection de D_t avec les axes de coordonnées, puis calculer la longueur du segment obtenu.

Exercice 2 (Etude de la néphroïde - Oral CCP 2014, filière TSI).
On considère la courbe paramétrée suivante : $\begin{cases} x(t) = \sin(3t) - 3\sin(t) \\ y(t) = -\cos(3t) + 3\cos(t) \end{cases}$.

1. Faire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions x et y et expliquer ce qui se passe au voisinage du point $M(0)$ de la courbe.
2. Réduire le domaine d'étude de la courbe.
3. Montrer que $\begin{cases} x'(t) = -6\sin(2t)\sin(t) \\ y'(t) = 6\cos(2t)\sin(t) \end{cases}$.
4. Tracer l'allure de la courbe.

Exercice 3 (Point double).
Une courbe paramétrée $I \to \mathbb{R}^2$ possède un point double s'il existe $t_0 \neq t_1 \in I$ tels que $M(t_0) = M(t_1)$. Montrer que la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1 \\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

admet un point double. Déterminer les deux tangentes correspondantes.

Exercice 4 (Courbe tracée dans un plan).

On considère la courbe $(\mathcal{C})$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ définie par le paramétrage $\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 2t \\ z(t) = t^2 + t + 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Justifier que $(\mathcal{C})$ est une courbe plane.

Exercice 5 (Hélices).
Une **hélice** est une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle la tangente en tout point fait un angle constant avec un vecteur non nul fixé $\overrightarrow{u}$ (on parle bien entendu d'angle non-orienté entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$). En notant $\theta \in [0; \pi]$ la mesure de l'angle non-orienté entre deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$, on rappelle que

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}.$$

1. On définit la courbe $(\mathcal{C})$ par le paramétrage $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a\sin t \\ z(t) = bt \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, avec $a > 0$ et $b > 0$.
   (a) Vérifier que $(\mathcal{C})$ est une hélice.
   (b) Calculer la longueur de la courbe entre les points de paramètres $t = 0$ et $t = 2\pi$.

2. On définit la courbe (Σ) par le paramétrage $\left\{\begin{array}{l} x(t)=t \\ y(t)=t^2 \\ z(t)=\frac{2}{3}t^3 \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

   Vérifier que (Σ) est une hélice.

Exercice 6 (Folium de Descartes).

Soit $\mathcal{C}$ la courbe définie par le paramétrage $\left\{\begin{array}{l} x(t)=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t)=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{array}\right.$.

1. Comparer $M\left(\frac{1}{t}\right)$ et $M(t)$. En déduire que $\mathcal{C}$ admet un axe de symétrie que l'on précisera.
2. Expliquer pourquoi il suffit d'étudier la courbe pour $t\in]-1,1]$.
3. Etudier et tracer la courbe $\mathcal{C}$.
4. Démontrer que la droite d'équation $y=-x-1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ lorsque $t\to-1$, et étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote.
   Cela signifie que la distance du point $M(t)$ à la droite tend vers 0 lorsque $t\to-1$.
5. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

Exercice 7 (Cardioïde).

Etudier et tracer la courbe $\mathcal{C}$ définie par le paramétrage $\left\{\begin{array}{l} x(t)=(1+\cos(t))\cos(t) \\ y(t)=(1+\cos(t))\sin(t) \end{array}\right.$.

Exercice 8 (Cycloïde).

Etudier et tracer la courbe $\mathcal{C}$ définie par le paramétrage $\left\{\begin{array}{l} x(t)=t-\sin(t) \\ y(t)=1-\cos(t) \end{array}\right.$

Exercice 9 (*Points d'inflexion).

Déterminer les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ définie par le paramétrage $\left\{\begin{array}{l} x(t)=(t-2)^3 \\ y(t)=t^2-4 \end{array}\right.$

Exercice 10 (*Courbe orthoptique).

On considère la courbe Γ définie par $\left\{\begin{array}{l} x(t)=3t^2 \\ y(t)=2t^3 \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.
Déterminer l'ensemble Γ' des points du plan par lesquels passent deux tangentes à la courbe Γ perpendiculaires entre elles (on l'appelle la courbe orthoptique de Γ).

II Exercices supplémentaires

Exercice 11 (Une courbe anguleuse).

On considère la fonction $\overrightarrow{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $\overrightarrow{f}(t)=\left\{\begin{array}{ll} (e^{-1/t^2},0) & \text{si } t>0 \\ (0,0) & \text{si } t=0 \\ (0,e^{-1/t^2}) & \text{si } t<0 \end{array}\right.$ et on note Γ la courbe paramétrée définie par cette fonction vectorielle.

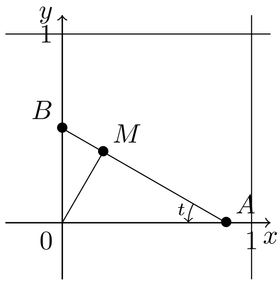
1. Tracer précisément Γ.
2. Γ possède-t-elle une tangente au point de paramètre $t_0=0$?
3. (*) Montrer que $\overrightarrow{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que toutes ses dérivées en 0 sont nulles.

Exercice 12 (Courbe avec boucle).

Etudier la courbe définie par le paramétrage $\left\{\begin{array}{l} x(t)=3t^2-1, \\ y(t)=3t^3-t \end{array}\right.$ et calculer la longueur de sa boucle.

Exercice 13 (Construction d'un papillon).

On considère un point A de l'axe (Ox) et un point B de l'axe (Oy) tels que $AB = 1$.
On note alors M le projeté orthogonal de O sur le segment $[AB]$ et $\mathcal{T}$ le lieu des points M lorsque A et B se déplacent sur leur axe.



1. On note t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{i})$. Montrer que le point M a pour coordonnées :
$$\begin{cases} x(t) = \sin^2(t)\cos(t) \\ y(t) = \cos^2(t)\sin(t) \end{cases}.$$
2. Faire l'étude complète de la courbe $\mathcal{T}$ puis la tracer.

Exercice 14 (Courbe à deux arcs avec un point de rebroussement).

Etudier et tracer la courbe $\mathcal{C}$ définie par le paramétrage $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+1}{2t} \\ \\ y(t) = \dfrac{2t-1}{t^2} \end{cases}.$

Exercice 15 (Une courbe de Lissajous).

Etudier et tracer la courbe $\mathcal{C}$ définie par le paramétrage $\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}.$

Exercice 16. 1. Étudier et tracer l'allure de la courbe paramétrée définie par :
$$\begin{cases} x(t) = \cos^2(t) + \ln(\sin(t)) \\ y(t) = \sin(t)\cos(t) \end{cases}, \ t \in]0;\pi[.$$
L'étude de la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage des points singuliers n'est pas demandée ici. On déterminera juste un vecteur directeur de la tangente aux points singuliers.

2. Calculer la longueur de la courbe entre les deux points singuliers.
Après avoir simplifié au maximum $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$, il sera judicieux d'envisager le changement de variable $u = \cos(t)$.

Exercice 17 (Etude d'une courbe de l'espace).

On considère la courbe de l'espace Γ définie par $\begin{cases} x(t) = (1+\cos(t))\cos(t) \\ y(t) = (1+\cos(t))\sin(t) \\ z(t) = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$

1. Quels sont les points réguliers de cette courbe ? En ces points, déterminer le vecteur tangent unitaire.
2. Montrer que la tangente à Γ en tous les points réguliers fait un angle constant avec l'axe (Oz).
3. Calculer la longueur de Γ.

Exercice 18 (Mouvement à accélération centrale).

Soit I un intervalle réel non trivial, et soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$. On considère l'arc paramétré défini par la fonction vectorielle f : on rappelle que c'est l'ensemble des points $M(t) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{OM(t)} = f(t)$.
On suppose que pour tout $t \in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires et on note $\sigma(t) = f(t) \wedge f'(t)$.

1. Montrer que la fonction vectorielle σ ainsi définie est constante sur I.
2. On suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(f(t_0), f'(t_0))$ est libre.
En utilisant la fonction σ, montrer que l'arc paramétré a sa trajectoire contenue dans un plan passant par $O = (0, 0, 0)$.