Corrigé du TD8 : Espaces probabilisés

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1. Modélisation : on choisit* $\Omega = \{paires\ \{a,b\},\ 1 \leq a, b \leq 9\}$
(on choisit cet univers car il n'y a pas d'ordre imposé sur les tirages, ainsi $\{4,3\} = \{3,4\}$ *correspondent au même événement élémentaire).*
Cet ensemble est fini, de cardinal $\binom{9}{2} = 36$*. On suppose que toutes ces combinaisons sont équiprobables (ce qui est raisonnable puisque chaque boule porte un numéro différent), donc on munit* Ω *de la probabilité uniforme.*
L'événement A : "obtenir deux boules de numéros de même parité" correspond alors à la réunion disjointe des ensembles

$$A_1 = \{\{1,3\},\{1,5\},\{1,7\},\{1,9\},\{3,5\},\{3,7\},\{3,9\},\{5,7\},\{5,9\},\{7,9\}\},$$

$$A_2 = \{\{2,4\},\{2,6\},\{2,8\},\{4,6\},\{4,8\},\{6,8\}\},$$

donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \dfrac{\sharp A_1}{\sharp\Omega} + \dfrac{\sharp A_2}{\sharp\Omega} = \dfrac{10+6}{36} = \dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}.$
(en fait $\sharp A_1 = \binom{5}{2}$ *et* $\sharp A_2 = \binom{4}{2}$*).*

2. *Modélisation : on choisit* $\Omega = \{couples\ (a,b),\ avec\ 1 \leq a, b \leq 9\ et\ a \neq b\}$
(cette fois, on tient compte de l'ordre des tirages : ainsi, $(3,4) \neq (4,3)$ *correspondent à deux événements élémentaires différents).*
Cet ensemble est fini, de cardinal $9 \times 8 = 72$*. On le munit de l'équiprobabilité* $\mathbb{P}$*.*
L'événement A : "obtenir deux boules de numéros de même parité" correspond alors à la réunion disjointe des ensembles

$$A_1 = \{(a,b),\ avec\ a,b \in \{1,3,5,7,9\}\ et\ a \neq b\},$$

$$A_2 = \{(a,b),\ avec\ a,b \in \{2,4,6,8\}\ et\ a \neq b\},$$

donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \dfrac{\sharp A_1}{\sharp\Omega} + \dfrac{\sharp A_2}{\sharp\Omega} = \dfrac{5\times 4 + 4 \times 3}{72} = \dfrac{32}{72} = \dfrac{4}{9}.$

Remarque.
Evidemment, les expériences 1. et 2. donnent la même probabilité : c'est intuitif car le fait de tirer simultanément ou de tirer sans remise revient au même en ce qui concerne la probabilité de l'événement A_0 *: "tirer les boules a, b" (avec* $a \neq b$*). En effet :*

- *Dans l'expérience 1.,* $A_0 = \{\{a,b\}\}$ *est un événement élémentaire, donc sa probabilité est*

$$\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(\{\{a,b\}\}) = \frac{1}{\sharp\Omega} = \frac{1}{36}.$$

- *Dans l'expérience 2.,* A_0 *n'est plus un événement élémentaire, mais* $A_0 = \{(a,b)\} \cup \{(b,a)\}$*, donc* A_0 *est réunion disjointe de deux événements élémentaires :*

$$\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(\{(a,b)\}) + \mathbb{P}(\{(b,a)\}) = \frac{1}{\sharp\Omega} + \frac{1}{\sharp\Omega} = \frac{1}{72} + \frac{1}{72} = \frac{1}{36}.$$

3. *Cette fois-ci, on choisit* $\Omega = \{couples\ (a,b),\ avec\ 1 \leq a, b \leq 9\}$ *(on peut avoir* $a = b$ *à cause de la remise avant le second tirage). On a* $\sharp\Omega = 9^2 = 81$*. On munit* Ω *de l'équiprobabilité* $\mathbb{P}$*.*
L'événement A : "obtenir deux boules de numéros de même parité" correspond alors à la réunion disjointe des ensembles

$$A_1 = \{(a,b),\ avec\ a,b \in \{1,3,5,7,9\}\},$$

$$A_2 = \{(a,b),\ avec\ a,b \in \{2,4,6,8\}\},$$

donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \dfrac{\sharp A_1}{\sharp\Omega} + \dfrac{\sharp A_2}{\sharp\Omega} = \dfrac{5^2 + 4^2}{81} = \dfrac{41}{81}.$

Remarque.
Cette troisième expérience change la probabilité de l'événement A. Puisque $\frac{41}{81} > \frac{4}{9} = \frac{36}{81}$*, le fait de tirer avec remise augmente la probabilité d'obtenir des boules de même parité.*

Corrigé de l'exercice 2.

1. *On décrit l'expérience par l'univers* $\Omega = \{$*listes* $(a_1, a_2, \cdots, a_8)$ *avec* $0 \leq a_i \leq 9\}$. *Cet univers est fini, de cardinal* $\sharp\,\Omega = 10^8$. *On le munit de la mesure d'équiprobabilité* $\mathbb{P}$.
2. *L'événement A : "N est pair" correspond aux listes* $(a_1, a_2, \cdots, a_8)$ *telles que* $a_8 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. *On a donc* $\sharp\,A = 10^7 \times 5$*, et*
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\sharp\,A}{\sharp\,\Omega} = \frac{10^7 \times 5}{10^8} = \frac{1}{2}.$$
3. *L'évenement B : "le produit des chiffres de N est pair" est réalisé ssi au moins un des chiffres de N est pair. Il est plus simple d'envisager l'événement contraire* $\overline{B}$ *: "tous les chiffres de N sont impairs". On a*
$$\overline{B} = \{\textit{listes } (a_1, a_2, \cdots, a_8) \textit{ avec } a_i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}\},$$
donc
$$\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{\sharp\,\overline{B}}{\sharp\,\Omega} = \frac{5^8}{10^8} = \frac{1}{2^8},$$
puis
$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{2^8} = \frac{255}{256}.$$

Remarque.
Il est donc très probable que le produit des chiffres soit pair, et très peu probable que ce produit soit impair.

Corrigé de l'exercice 3.

1. *Montrons que* $\mathbb{P}$ *définit une probabilité sur* $\mathbb{N}$.
On a bien tout d'abord $\mathbb{P}(\{n\}) \in [0; 1]$.
Montrons maintenant que la série $\sum \mathbb{P}(\{n\})$ *converge et que sa somme vaut* 1.
La série $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ *est une série géométrique de raison* $\frac{1}{2}$ *donc comme* $-1 < \frac{1}{2} < 1$*, cette série est convergente et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - 1/2} = 1.$$
Donc $\mathbb{P}$ *définit bien une probabilité sur* $\mathbb{N}$.
2. — *On a* $B = \{n \in \mathbb{N} / n \geqslant 10\}$*, donc*
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=10}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{11}} \times \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^{10}}.$$
— *On a* $I = \{2k + 1 / k \in \mathbb{N}\}$*, donc*
$$\mathbb{P}(I) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{2k+1\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+2}} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$

Corrigé de l'exercice 4.

1. *Puisque* (A, B, C, D) *est un système complet d'événements, on a*
$$\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$
2. *Notons R l'événement "l'élève arrive en retard". On cherche* $\mathbb{P}_R(C)$. *Par définition :*
$$\mathbb{P}_R(C) = \frac{\mathbb{P}(R \cap C)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}_C(R) \times \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(R)}.$$

D'après les données de l'énoncé, on peut alors calculer $\mathbb{P}(R)$ avec la formule des probabilités totales : puisque (A, B, C, D) est un système complet d'événements :

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(R) + \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}_C(R) + \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(R),$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(R) = \frac{1}{3} * \frac{1}{20} + \frac{1}{4} * \frac{1}{10} + \frac{1}{12} * \frac{1}{5} + \frac{1}{3} * 0 = \frac{7}{120}.$$

On en déduit

$$\mathbb{P}_R(C) = \frac{\frac{1}{5} * \frac{1}{12}}{\frac{7}{120}} = \frac{2}{7}.$$

Corrigé de l'exercice 5. 1. *On décompose :*

$$\mathbb{P}(N_3) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap R_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap N_3).$$

Chacun des termes se calcule alors par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(N_2) \times \mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9};$$

$$\mathbb{P}(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(R_2) \times \mathbb{P}_{N_1 \cap R_2}(N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9};$$

$$\mathbb{P}(R_1 \cap N_2 \cap N_3) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(N_2) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9};$$

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap N_3) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(N_3) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{9}.$$

On en déduit $\mathbb{P}(N_3) = \dfrac{1}{5 \times 5 \times 9}(10 + 32 + 12 + 36) = \dfrac{90}{25 * 9} = \dfrac{2}{5}.$

2. *La probabilité cherchée est :*

$$\mathbb{P}_{N_3}(R_1) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap N_3)}{\mathbb{P}(N_3)} = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap N_3)}{\mathbb{P}(N_3)} = \frac{\frac{12}{25*9} + \frac{36}{25*9}}{\frac{90}{25*9}} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}.$$

Corrigé de l'exercice 6. 1. *On note F_n l'événement « l'appareil fonctionne à l'instant n ».*
On applique alors la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(F_{n-1}, \overline{F_{n-1}})$. On a donc :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(F_{n-1})\mathbb{P}_{F_{n-1}}(F_n) + \mathbb{P}(\overline{F_{n-1}})\mathbb{P}_{\overline{F_{n-1}}}(F_n) \\ \Leftrightarrow &p_n = \frac{5}{6}p_{n-1} + \frac{1}{3}(1 - p_{n-1}) \\ \Leftrightarrow &p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. *On pose* $q_n = p_n - \dfrac{2}{3}$. *On a* $q_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}\left(q_n + \dfrac{2}{3}\right) - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}q_n.$

   q_n est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

   On a donc $q_n = \dfrac{1}{2^n}q_0 = \dfrac{1}{2^n}\left(p_0 - \dfrac{2}{3}\right).$

3. *On a donc* $p_n = q_n + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2^n}\left(p_0 - \dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{2}{3}.$

4. *On a* $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ *donc* $\lim_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{2}{3}.$

Corrigé de l'exercice 7. 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :*

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}),$$

$$b_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}),$$
$$c_{n+1} = \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}).$$

Ceci se réécrit

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \\ \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) \\ \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

D'après les données de l'énoncé, on a

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \\ \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) \\ \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) & \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) & \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

donc on a la relation voulue avec $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

2. *On a* $P^{-1}MP = D$, *avec*

$$P = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

3. *D'après la relation établie à la question 1., on a par une récurrence triviale :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

Par la question précédente, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{4})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & -28 \\ 25 & -45 & 60 \end{pmatrix}.$$

En raisonnant par composantes, on obtient que

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & -28 \\ 25 & -45 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 16 & 16 & 16 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \frac{a_0+b_0+c_0}{35} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Puisque $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, *on obtient* $\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 8. *1.* Ω *est l'ensemble des* n*-listes* $(a_1, \cdots, a_n)$, *avec* $a_i \in \{0,1\}$ *("0" correspondant à la boule noire et "1" à la rouge). C'est un univers fini, de cardinal* $\sharp\,\Omega = 2^n$. *On le munit de l'équiprobabilité* $\mathbb{P}$.

2. • *L'événement contraire* $\overline{A_n}$ *correspond à la partie*

$$\overline{A_n} = \{(0,0,\cdots,0),(1,1,\cdots,1)\}$$

("n'obtenir que des boules noires ou bien que des boules rouges").
On a donc $\mathbb{P}(\overline{A_n}) = \mathbb{P}(\{(0,0,\cdots,0)\}) + \mathbb{P}(\{(1,1,\cdots,1)\}) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.
Finalement $\mathbb{P}(A_n) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

- *Considérons les événements :*
  R : "n'obtenir que des boules rouges"
  N_k : "n'obtenir qu'une seule boule noire, lors du k^e tirage (pour $1 \leq k \leq n$).
  On a $B_n = R \cup N_1 \cup \cdots \cup N_n$ et la réunion est disjointe, donc

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(N_1) + \cdots + \mathbb{P}(N_n) = (n+1) \times \frac{1}{2^n},$$

  puisque tous ces événements sont élémentaires.

3. *Si $n = 2$, alors $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B_2) = \frac{3}{4}$.*
   En outre $A_2 \cap B_2 = \{(0,1),(1,0)\}$, donc

$$\mathbb{P}(A_2 \cap B_2) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

   Finalement, $\mathbb{P}(A_2 \cap B_2) \neq \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(B_2)$, donc A_2 et B_2 ne sont pas indépendants.

4. *Si $n = 3$, alors $\mathbb{P}(A_3) = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(B_3) = \frac{1}{2}$.*
   En outre $A_3 \cap B_3 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$, donc

$$\mathbb{P}(A_3 \cap B_3) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}.$$

   Finalement, $\mathbb{P}(A_3 \cap B_3) = \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(B_3)$, donc A_3 et B_3 sont indépendants.

Corrigé de l'exercice 9. *1. On note T_n l'événement "le jeu se termine au n^e lancer (on a $n \geq 1$).*

— *Si n est pair, on écrit $n = 2k$. L'événement T_{2k} correspond alors à la sortie de Face lors des lancers $1, 3, 5, \dots, 2k-1$, de Pile lors des lancers numéros $2, 4, \dots, 2k-2$, et enfin de Face au $2k$-ième lancer. Par indépendance mutuelle, on obtient $\mathbb{P}(T_{2k}) = p^{k-1} \times (1-p)^{k+1}$.*

— *Si n est impair, on écrit $n = 2k+1$. L'événement T_{2k+1} correspond alors à la sortie de Face lors des lancers $1, 3, 5, \dots, 2k-1$, de Pile lors des lancers numéros $2, 4, \dots, 2k$, et enfin de Pile au $2k+1$-ième lancer. Par indépendance mutuelle, on obtient $\mathbb{P}(T_{2k+1}) = p^{k+1} \times (1-p)^k$.*

2. *L'événement G_A : "le joueur A gagne" est la réunion disjointe des T_{2k+1}, $k \geq 0$, donc*

$$\mathbb{P}(G_A) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} T_{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^{k+1} \times (1-p)^k$$

$$= p \times \sum_{k=0}^{+\infty} \big(p(1-p)\big)^k = \frac{p}{1-p(1-p)} = \frac{p}{p^2-p+1}.$$

3. *L'événement G_B : "le joueur B gagne" est la réunion disjointe des T_{2k}, $k \geq 1$, donc*

$$\mathbb{P}(G_B) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} T_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{2k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^{k-1} \times (1-p)^{k+1} =$$

$$= (1-p)^2 \times \sum_{k=0}^{+\infty} \big(p(1-p)\big)^k = \frac{(1-p)^2}{p^2-p+1}.$$

   Et l'événement T : "le jeu se termine" est réunion disjointe des événements G_A et G_B donc $\mathbb{P}(T) = \frac{p}{p^2-p+1} + \frac{(1-p)^2}{p^2-p+1} = \frac{p+(1-2p+p^2)}{p^2-p+1} = 1$.

4. *A a l'avantage ssi $\mathbb{P}(G_A) > \mathbb{P}(G_B)$ ssi $\frac{p}{p^2-p+1} > \frac{(1-p)^2}{p^2-p+1}$.*
   Comme $p < 1$, on a $1-p > 0$ et donc $p^2-p+1 > 0$.
   Ainsi $\frac{p}{p^2-p+1} > \frac{(1-p)^2}{p^2-p+1} \iff p > (1-p)^2 \iff p^2 - 3p + 1 < 0$.
   Le trinôme $X^2 - 3X + 1$ a pour racines $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \in]0,1[$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, et il est négatif entre les racines.
   Donc A a l'avantage ssi $p > \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382$.
   Si la pièce est équilibrée, $p = 0,5$, et donc A a clairement l'avantage. Mais c'est intuitif, puisqu'il commence à jouer !

Corrigé de l'exercice 10.
L'entier $n \geq 1$ est fixé.

- *Choix de l'univers : On représente l'expérience aléatoire par l'ensemble Ω des listes $(a_1, \cdots, a_n)$ où chaque $a_i \in \{P, F\}$. On a donc un univers fini de cardinal $\sharp\,\Omega = 2^n$.*
- *Choix de la mesure de probabilité : Le fait que la pièce soit truquée empêche de munir Ω de la mesure d'équiprobabilité. On nous dit que lors de chaque lancer, la probabilité d'obtenir P est $p \in]0;1[$ (et celle d'obtenir F est $q = 1-p$), donc par indépendance mutuelle des lancers :*

$$\mathbb{P}(\{(a_1, \cdots, a_n)\}) = \underbrace{p * p * \cdots * p}_{k\ fois} \times \underbrace{q * q * \cdots * q}_{n-k\ fois} = p^k q^{n-k},$$

où k désigne le nombre de P dans la liste $(a_1, \cdots, a_n)$ (et $n-k$ le nombre de F).
On obtient bien ainsi une mesure de probabilité sur Ω car pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ listes composées de k "P" et de $n-k$ "F", chacune de probabililité $p^k q^{n-k}$, donc au total :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

- *Calcul de la probabilité de l'événement voulu : l'événement A : ""F" n'est jamais suivi de "P"" correspond aux listes de la forme $(\underbrace{PP\cdots P}_{k\ fois}\underbrace{FF\cdots F}_{n-k\ fois})$, (où $0 \leq k \leq n$). Formellement, on a donc*

$$A = A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n,$$

où pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $A_k = \{(\underbrace{PP\cdots P}_{k\ fois}\underbrace{FF\cdots F}_{n-k\ fois})\}$ est un événement élémentaire. Par additivité, on a donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k} = q^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^k.$$

Deux cas se présentent alors :

* *Si $p = q$, alors $p = q = \frac{1}{2}$ (puisque $q = 1-p$), donc*

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{n+1}{2^n}.$$

* *Si $p \neq q$ (i.e. $p \neq \frac{1}{2}$), alors*

$$\mathbb{P}(A) = q^n \times \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n+1}}{1 - \frac{p}{q}} = \frac{q^{n+1} - p^{n+1}}{q-p} = \frac{(1-p)^{n+1} - p^{n+1}}{1-2p}.$$

Corrigé de l'exercice 11.
L'événement A cherché est la réunion disjointe des événements A_k : "on obtient une seule boule blanche, et c'est au k^e tirage" :

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} \left(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \cdots \cap R_n\right).$$

On a donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \cdots \cap R_n\right).$$

Mais bien entendu, les événements (R_k) ne sont pas mutuellement indépendants (puisque le résultat d'un tirage conditionne la composition de l'urne au tirage suivant). On utilise plutôt la formule des *probabilités composées : pour tout k,*

$$\mathbb{P}\left(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \cdots \cap R_n\right)$$

$$= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(B_k) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k}(R_{k+1}) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap B_k \cap \cdots \cap R_{n-1}}(R_n)$$

$$= \underbrace{\frac{r}{b+r} \times \frac{r}{b+r} \times \cdots \times \frac{r}{b+r}}_{k-1 \ fois} \times \frac{b}{b+r} \times \underbrace{\frac{r}{b+r-1} \times \cdots \times \frac{r}{b+r-1}}_{n-k \ fois} = \frac{br^{n-1}}{(b+r)^k (b+r-1)^{n-k}}.$$

Finalement

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{br^{n-1}}{(b+r)^k (b+r-1)^{n-k}} = \frac{br^{n-1}}{(b+r-1)^n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^k \\ &= \frac{br^{n-1}}{(b+r-1)^n} \times \frac{b+r-1}{b+r} \times \frac{1-\left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^n}{1-\frac{b+r-1}{b+r}} = b\left(\frac{r}{b+r-1}\right)^{n-1} \left[1-\left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^n\right].\end{aligned}$$

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 12. *1. — Soit $x \in A \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$. On a alors deux possibilités : soit $x \in A$ soit $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n$.*

→ Si $x \in A$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in A \cup B_n$ et donc $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty}(A \cup B_n)$.

→ Si $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in B_n$ et donc $x \in A \cup B_n$. Donc $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty}(A \cup B_n)$.

Dans les deux cas, $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty}(A \cup B_n)$. On a donc l'inclusion $A \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \subset \bigcap_{n=0}^{+\infty}(A \cup B_n)$.

— Soit $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty}(A \cup B_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x \in A \cup B_n$.

On a alors deux possibilités : soit il existe n tel que $x \notin B_n$ et alors $x \in A$ soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in B_n$.

→ Si $x \in A$, alors $x \in A \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$.

→ Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in B_n$, alors $x \in A \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$.

Dans les deux cas, $x \in A \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$. On a donc l'inclusion $\bigcap_{n=0}^{+\infty}(A \cup B_n) \subset A \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$.

En conclusion, $A \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \bigcap_{n=0}^{+\infty}(A \cup B_n)$.

On montre de même que : $A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty}(A \cap B_n)$.

2. — Soit $x \in \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n}$. On a alors $x \notin \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \notin B_n$ c'est-à-dire $x \in \overline{B_n}$.

Ainsi, $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{B_n}$. On a donc l'inclusion $\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n} \subset \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{B_n}$.

— *Soit* $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{B_n}$. *Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $x \in \overline{B_n}$ *donc* $x \notin B_n$ *et donc* $x \notin \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

Ainsi, $x \in \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n}$. *On a donc l'inclusion* $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{B_n} \subset \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n}$.

En conclusion, $\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{B_n}$.

On montre de même que : $\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{B_n}$.

Corrigé de l'exercice 13.
Posons $\Omega = (a, b, c)$, *où* $a, b, c \in \{0, 1\}$. *Cet univers est fini, de cardinal* $2^3 = 8$. *Chacun des bits* a, b, c *représente le résultat de chaque tir (*1 *pour succès,* 0 *pour échec).*
L'événement G *: "l'archer gagne le jeu" correspond au sous-ensemble :*

$$G = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}.$$

Par additivité, on obtient donc, quelle que soit la probabilité $\mathbb{P}$ *sur* Ω *:*

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(\{(1, 1, 0)\}) + \mathbb{P}(\{(1, 1, 1)\}) + \mathbb{P}(\{(0, 1, 1)\})$$

- *L'archer commence par tirer sur la cible à* 20 *m : On a alors, d'après l'énoncé, et par indépendance des tirs :* $\begin{cases} \mathbb{P}(\{(1, 1, 0)\}) = pq(1-p) \\ \mathbb{P}(\{(1, 1, 1)\}) = pqp \\ \mathbb{P}(\{(0, 1, 1)\}) = (1-p)qp \end{cases}$ *, donc*

$$\mathbb{P}(G) = pq(1-p) + pqp + (1-p)qp = pq(1-p+p+1-p) = pq(2-p).$$

- *L'archer commence par tirer sur la cible à* 50 *m : on a une autre mesure de probabilité* $\mathbb{P}'$. *On obtient de même que* $\mathbb{P}'(G) = pq(2-q)$.

Puisque $0 < q < p$, *on a* $\mathbb{P}(G) = pq(2-p) \leq pq(2-q) = \mathbb{P}'(G)$, *donc la seconde stratégie est meilleure : tirer sur la cible la plus lointaine en premier.*

Corrigé de l'exercice 14.
Notons V *l'événement "être vacciné" et* M *l'événement "être malade". L'énoncé donne*

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}_V(M) = \frac{1}{12}, \quad \mathbb{P}_M(V) = \frac{1}{5}.$$

On cherche

$$\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \frac{\mathbb{P}_M(\overline{V}) \times \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\overline{V})} = \frac{(1 - \mathbb{P}_M(V)) * \mathbb{P}(M)}{1 - \mathbb{P}(V)} = \frac{16}{15}\mathbb{P}(M).$$

Mais d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(M) + \mathbb{P}(\overline{V}) \times \mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \frac{1}{48} + \frac{3}{4}\mathbb{P}_{\overline{V}}(M),$$

donc

$$\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{48} + \frac{3}{4}\mathbb{P}_{\overline{V}}(M)\right),$$

ce qui amène

$$\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \frac{1}{9}.$$

Corrigé de l'exercice 15.
Fixons $k \in \{1, \cdots, 5\}$ *et supposons que je passe en* k^e *position, et que j'ai fait l'impasse sur la question numéro* 5 *(par exemple, ça ne change rien).*
Considérons l'univers Ω *formé des listes* $(a_1, \cdots, a_5)$, *où* a_i *est le numéro de question tiré par le* i^e

candidat. Vu les hypothèses, Ω est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \cdots, 5\}$, donc $\#\Omega = 5!$. On munit cet univers fini de l'équiprobabilité $\mathbb{P}$.
Dans cet univers, l'événement A : "je pioche la question numéro 5" correspond aux permutations $(a_1, \cdots, a_5)$ telles que $a_k = 5$. On a donc $\#A = 4!$ (celà correspond aux choix possibles pour les a_i avec $i \neq k$). On a donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}.$$

Finalement, la probabilité que je pioche la question numéro 5 (sur laquelle j'ai fait l'impasse) est indépendante de k : en conclusion, mon ordre de passage importe peu !

Corrigé de l'exercice 16.
On numérote les clients de 1 à 150. Pour tout $i \in \{1, \cdots, 150\}$, on pose $a_i = 1$ si le i^e client a acheté un pack périmé, et $a_i = 0$ sinon. L'ensemble Ω des cas possibles est donc l'ensemble des listes ordonnées $(a_1, \cdots, a_{150})$ qui comportent 100 "0" et 50 "1" (puisqu'il y a 50 packs périmés). On a $\sharp\,\Omega = \binom{150}{50} = \frac{150!}{50!\,100!}$ (cela correspond au nombre de façons de placer 50 "1" parmi 150 cases vides). On munit cet univers fini de l'équiprobabilité (puisque chaque client choisit son pack au hasard).
Pour tout $i \in \{1, \cdots, 150\}$, on note A_i l'événement "le i^e client prend un pack périmé". Cet événement correspond au sous-ensemble A_i des listes ordonnées $(a_1, \cdots, a_{150})$ telles que $a_i = 1$, et telles que la sous-liste $(a_k)_{k \neq i}$ comporte 100 "0" et 49 "1". On a $\sharp\, A_i = \binom{149}{49} = \frac{149!}{49!\,100!}$ (cela correspond au nombre de façons de placer 49 "1" parmi 149 cases vides).
On en déduit que pour tout $i \in \{1, \cdots, 150\}$, $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{\sharp\, A_i}{\sharp\,\Omega} = \dfrac{149!}{49!\,100!} \times \dfrac{50!\,100!}{150!} = \dfrac{50}{150} = \dfrac{1}{3}$.
Donc en définitive, l'ordre de passage ne change rien. Tous les acheteurs ont une probabilité de $1/3$ d'acheter un pack périmé.

Corrigé de l'exercice 17.

1. **Stratégie 1** *: l'univers Ω est l'ensemble des parties de 10 billets choisis simultanément parmi 100, donc $\#\Omega = \binom{100}{10}$. L'événement A : "gagner au moins une fois" correspond alors au complémentaire des parties ne comprenant que des billets perdants. On a donc $\#\overline{A} = \binom{100-k}{10}$ (ce qui a du sens car $100 - k \geq 10$), donc*

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\#\overline{A}}{\#\Omega} = 1 - \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}}$$

2. **Stratégie 2** *: on a ici une répétition de 10 expériences de Bernoulli (chaque loterie), dont la probabilité de succès est $p = \frac{k}{100}$ (puisqu'on choisit 1 billet au hasard parmi 100). En notant A : "gagner au moins une fois", on a alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = (1-p)^{10}$, donc*

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \left(1 - \frac{k}{100}\right)^{10}.$$

3. **Comparaison des deux expériences** *: on pose $p_1 = 1 - \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}}$ et $p_2 = 1 - \left(1 - \frac{k}{100}\right)^{10}$. On a*

$$1 - p_1 = \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{(100-k)(99-k)\cdots(91-k)}{100 * 99 * \cdots * 91} = \left(1 - \frac{k}{100}\right) * \left(1 - \frac{k}{99}\right) * \cdots * \left(1 - \frac{k}{91}\right),$$

$$1 - p_2 = \left(1 - \frac{k}{100}\right)^{10} = \left(1 - \frac{k}{100}\right) * \left(1 - \frac{k}{100}\right) * \cdots * \left(1 - \frac{k}{100}\right).$$

On remarque alors que $1 - p_2 > 1 - p_1$, donc $p_1 > p_2$.
En conclusion, la première stratégie (acheter 10 billets en une seule fois) est meilleure pour gagner au moins une fois.

Corrigé de l'exercice 18.

1. *D'après l'énoncé, $p_1 = q_1 = r_1 = \dfrac{1}{3}$.*
2. *La famille (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, donc $p_n + q_n + r_n = 1$.*

3. *Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements* (A_n, B_n, C_n), *afin de calculer* $\mathbb{P}(A_{n+1})$:

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}).$$

Avec les données de l'énoncé, on obtient $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n = \frac{1}{12}r_n$.
À l'aide du même raisonnement, on obtient aussi :

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + q_n + \frac{7}{12}r_n \qquad et \qquad r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}r_n.$$

4. *La relation obtenue pour* r_{n+1} *peut aussi s'écrire* $p_n = 3r_{n+1} - r_n$.
On remplace alors cela dans la relation obtenue pour p_{n+1} *et on obtient :* $p_{n+1} = r_{n+1} - \frac{1}{4}r_n$.

5. *On sait que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$r_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{1}{3}r_{n+1} = \frac{2}{3}r_{n+1} - \frac{1}{12}r_n.$$

La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est donc bien une suite récurrente linéaire d'ordre* 2.
Avec la technique présentée à la fin du chapitre 3, et les conditions initiales $r_1 = \frac{1}{3}$ *et* $r_2 = \frac{2}{9}$, *on obtient, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n$.
Comme $p_n = 3r_{n+1} - r_n$, *on en déduit que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.
Et enfin, comme $p_n + q_n + r_n = 1$, *on obtient, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

6. *On a* $\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} q_n = 1$.

Corrigé de l'exercice 19. 1. *Notons* U *l'ensemble des* 32 *boules de l'urne. On a* $U = \bigcup_{j=1}^{8} G_j$, *où chaque* G_j *désigne le groupe de* 4 *boules portant le numéro* j *(la réunion est disjointe car chaque boule ne porte qu'un numéro). Un tirage d'un échantillon de* 5 *boules correspond à une combinaison de* 5 *éléments de l'urne* U. *L'univers* Ω *des observables est donc ici l'ensemble des parties à* 5 *éléments de l'ensemble* U.
C'est un univers fini de cardinal $\sharp\,\Omega = \binom{32}{5} = \frac{32*31*30*29*28}{5*4*3*2*1} = 32*31*29*7 = 201376$.
Vu que le tirage se fait au hasard, on munit Ω *de la mesure d'équiprobabilité* $\mathbb{P}$.
Dans la suite, notons $A_1, A_2, \cdots, A_6$ les événements respectivement considérés dans les six questions de l'exercice.

2. *L'événement* A_1 *correspond aux tirages du type* $G_i \cup \{b\}$, *où* $i \in \{1, \cdots, 8\}$ *et* $b \in \bigcup_{j\neq i} G_j$.
Dénombrons ces parties :
   - *Il y a* 8 *choix possibles pour* i *(le numéro porté par les* 4 *boules), et donc pour l'ensemble* G_i.
   - *Pour chacun de ces choix, il y a* $32 - 4 = 28$ *façons de choisir* b *(la dernière boule ne doit pas porter le numéro* i, *on la choisit donc dans* $U \setminus G_i$*).*

Au total, on a donc $\sharp\, A_1 = 8*28$, *et*

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\sharp\, A_1}{\sharp\, \Omega} = \frac{8*28}{32*31*29*7} = \frac{1}{32*29} = \frac{1}{899}.$$

Remarque (Risques de confusion entre inclusion et appartenance).
Formellement, chaque tirage $G_i \cup \{b\}$ *est une* **partie** *de l'urne* U *(i.e.* $G_i \cup \{b\} \subset U$*), et donc*

un **élément** *de l'univers (i.e.* $G_i \cup \{b\} \in \Omega$*). Par contre, l'événement élémentaire correspondant est le* **singleton** $\{G_i \cup \{b\}\} \subset \Omega$*, et on a :*

$$A_1 = \bigcup_{i=1}^{8} \left(\bigcup_{j \neq i} \{G_i \cup \{b\}\} \right) \subset \Omega.$$

3. *L'événement* A_2 *correspond aux tirages du type* $X \cup Y$*, où* $X \subset G_i$*,* $\sharp X = 3$*,* $Y \subset G_j$ *(avec* $j \neq i$*), et* $\sharp Y = 2$*. Dénombrons ces parties :*
   - *Il y a* 8 *choix possibles pour i (le numéro porté par les* 3 *boules).*
   - *Une fois ce numéro i choisi, il y a* $\binom{4}{3} = 4$ *façons de composer le sous-ensemble X (choix de* 3 *boules parmi* 4*).*
   - *Une fois X choisi, il y a* 7 *choix possibles pour j (le numéro porté par les deux autres boules).*
   - *Une fois j choisi, il y a* $\binom{4}{2} = 6$ *façons de composer Y (choix de* 2 *parmi* 4*).*

   Au total, on a donc $\sharp A_2 = 8 * \binom{4}{3} * 7 * \binom{4}{2} = 8 * 4 * 7 * 6$*, et*

   $$\mathbb{P}(A_2) = \frac{\sharp A_2}{\sharp \Omega} = \frac{8 * 4 * 7 * 6}{32 * 31 * 29 * 7} = \frac{6}{31 * 29} = \frac{6}{899}.$$

4. *L'événement* A_3 *correspond aux tirages du type* $X \cup \{b_1, b_2\}$*, où* $X \subset G_i$*,* $\sharp X = 3$*,* $b_1 \in G_j$*,* $b_2 \in G_k$ *avec* i, j, k *distincts. Dénombrons ces parties :*
   - *Il y a* 8 *choix possibles pour i (le numéro porté par les* 3 *boules).*
   - *Une fois ce numéro i choisi, il y a* $\binom{4}{3} = 4$ *façons de composer le sous-ensemble X (choix de* 3 *boules parmi* 4*).*
   - *Une fois X choisi, il y a* $\binom{7}{2} = \frac{7*6}{2} = 21$ *choix possibles pour la paire d'indices* $\{j, k\}$*, qu'on choisit parmi* $\{1, \cdots, 8\} \setminus \{i\}$ *(***attention***, il ne faut pas choisir d'abord j, puis k, sinon on compte les* $7 * 6 = 42$ **couples** (j, k) *possibles, ce qui ne va pas puisqu'alors on compte chaque choix en double).*
   - *Une fois les numéros* j, k *choisis, on choisit* $(b_1, b_2) \in G_j \times G_k$*, donc* $\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 4^2 = 16$ *choix possibles.*

   Au total, on a donc $\sharp A_3 = 8 * \binom{4}{3} * \binom{7}{2} * 16 = 8 * 4 * 21 * 16$*, et*

   $$\mathbb{P}(A_3) = \frac{\sharp A_3}{\sharp \Omega} = \frac{8 * 4 * 21 * 16}{32 * 31 * 29 * 7} = \frac{3 * 16}{31 * 29} = \frac{48}{899}.$$

5. *L'événement* A_4 *correspond aux tirages du type* $X \cup Y \cup \{b\}$*, où* $X \subset G_i$*,* $Y \subset G_j$*,* $i \neq j$*,* $\sharp X = \sharp Y = 2$*, et* $b \in U \setminus (G_i \cup G_j)$*. Dénombrons ces parties :*
   - *Il y a* $\binom{8}{2} = \frac{8*7}{2} = 28$ *choix possibles pour les indices* i, j *(attention à ne pas choisir d'abord i, puis j sinon on compte chaque tirage en double !).*
   - *Une fois* G_i, G_j *choisis, il y a* $\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} = 6 * 6 = 36$ *façons de composer les sous-ensembles X et Y (dans chacun des deux, on choisit* 2 *boules parmi* 4*).*
   - *Enfin, une fois X et Y fixés, il reste à choisir la dernière boule parmi* $32 - 2 * 4 = 24$*. Il y a donc* $\binom{24}{1} = 24$ *choix.*

   Au total, on a donc $\sharp A_4 = \binom{8}{2} * \binom{4}{2}^2 * \binom{24}{1} = 28 * 6^2 * 24$*, et*

   $$\mathbb{P}(A_4) = \frac{\sharp A_4}{\sharp \Omega} = \frac{28 * 6^2 * 24}{32 * 31 * 29 * 7} = \frac{6^2 * 3}{31 * 29} = \frac{108}{899}.$$

6. *L'événement* A_5 *correspond aux tirages du type* $X \cup \{b_1, b_2, b_3\}$*, avec* $X \subset G_i$*,* $\sharp G_i = 2$*,* $b_1 \in G_j$*,* $b_2 \in G_k$*,* $b_3 \in G_l$*, avec* i, j, k, l *distincts.*
   - *Il y a* 8 *choix possibles pour l'indice i.*
   - *Une fois i fixé, il y a* $\binom{4}{2} = 6$ *façons de composer la partie X.*

- *Une fois X choisie, il y a* $\binom{7}{3} = \frac{7*6*5}{3*2} = 35$ *choix possibles pour les trois indices* j, k, l *(attention, là encore, on les choisit simultanément pour ne pas compter plusieurs fois les mêmes cas).*
- *Pour chacun de ces indices* j, k, l*, il y a* 4 *choix possibles pour* b_1, b_2, b_3*, donc* 4^3 *choix possibles en tout.*

Au total, on a donc $\sharp A_5 = 8 * \binom{4}{2} * \binom{7}{3} * 4^3 = 8 * 6 * 35 * 64$*, et*

$$\mathbb{P}(A_5) = \frac{\sharp A_5}{\sharp \Omega} = \frac{8 * 6 * 35 * 64}{32 * 31 * 29 * 7} = \frac{6 * 5 * 16}{31 * 29} = \frac{480}{899}.$$

7. *L'événement* A_6 *correspond aux tirages du type* $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$*, où les* a_i *sont dans des* G_i *distincts.*
   - *Il y a* $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8*7*6}{3*2} = 56$ *choix pour les numéros distincts qui vont composer ce tirage.*
   - *Pour chaque numéro, il y a* 4 *choix possibles pour la boule correspondante, donc en tout* 4^5 *tirages possibles composés de ces cinq numéros.*

   Finalement, on a donc $\sharp A_6 = \binom{8}{5} * 4^5 = 56 * 2^{10}$*, et*

$$\mathbb{P}(A_6) = \frac{\sharp A_6}{\sharp \Omega} = \frac{56 * 2^{10}}{32 * 31 * 29 * 7} = \frac{2^8}{31 * 29} = \frac{256}{899}.$$