TD8 : Espaces probabilisés

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1 (Plusieurs façons de piocher).
Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire 2 boules. Déterminer la probabilité d'obtenir 2 boules portant des numéros de même parité dans chacune des expériences aléatoires suivantes :

1. On tire les deux boules simultanément.
2. On tire une boule, on ne la remet pas, puis on tire la seconde.
3. On tire une boule, on la remet avant de tirer la seconde.

Dans chaque cas, on choisira un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ *pour modéliser l'expérience aléatoire.*

Exercice 2 (Entiers aléatoires).
On écrit au hasard un nombre entier N de 8 chiffres (0 compris).

1. Déterminer un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité que N soit pair ?
3. Quelle est la probabilité que le produit des chiffres de N soit pair ?

Exercice 3 (Probabilité sur les entiers).
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

1. Montrer que $(\mathbb{N}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.
2. On considère les événements B : « obtenir un entier supérieur ou égal à 10 » et I : « obtenir un entier impair ». Calculer $\mathbb{P}(I)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 4 (Le retardataire).
Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre quatre itinéraires : A, B, C, D.
Cet élève peut également être ou ne pas être en retard en cours.
On suppose que ces événements font partie d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, et on dispose des données suivantes :

- La probabilité qu'il a de choisir A (resp. B, C) est $\frac{1}{3}$ (resp. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$).
- La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B, C) est $\frac{1}{20}$ (resp. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$).
- En empruntant D, il n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisisse l'itinéraire D ?
2. Si l'élève arrive en retard, quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

Exercice 5 (Avec trois urnes).
On considère trois urnes :

- U_1 contient 2 boules noires et 3 boules rouges.
- U_2 contient 1 boule noire et 4 boules rouges.
- U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges.

On tire une boule dans U_1, et une boule dans U_2, et on les met dans U_3.
On tire ensuite une boule dans U_3.
Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on note N_k l'événement "la boule tirée dans U_k est noire", et $R_k = \overline{N_k}$ l'événement "la boule tirée dans U_k est rouge".

1. Calculer la probabilité que la boule tirée dans U_3 soit noire.
2. Sachant que la boule piochée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité pour que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 6 (Probabilité de panne).
On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

— si l'appareil fonctionne à l'instant $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité $\dfrac{1}{6}$ d'être en panne à l'instant n.

— si l'appareil est en panne à l'instant $n-1$, il a la probabilité $\dfrac{2}{3}$ d'être en panne à l'instant n.

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n.

1. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre p_n et p_{n-1}.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = p_n - \dfrac{2}{3}$. Quelle est la nature de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   En déduire une expression de q_n en fonction de n et p_0.
3. Exprimer p_n en fonction de p_0.
4. Étudier la convergence de la suite (p_n).

Exercice 7 (Qui a la balle ?).
Trois enfants A, B, C jouent avec une balle. Lorsque A a la balle, la probabilité pour qu'il l'envoie à B est $0,75$, et la probabilité pour qu'il l'envoie à C est $0,25$.
Lorsque B a la balle, il l'envoie respectivement à A et C avec les probabilités $0,75$ et $0,25$.
Quant à lui, C envoie toujours la balle à B.
On désigne par A_n (resp. B_n et C_n) l'événement "l'enfant A (resp. B, C) a la balle à l'issue du n^e lancer". On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n, C_n.

1. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
2. Diagonaliser M.
3. Calculer les limites lorsque $n \to +\infty$ de a_n, b_n, c_n. On vérifiera que ces limites sont indépendantes de l'enfant qui avait la balle au début du jeu.

Exercice 8 (Boule rouge, boule noire).
Une boîte contient 2 boules : une noire et une rouge. On fixe un entier $n \geq 2$.
On tire n fois une boule dans cette boîte en la remettant après avoir noté sa couleur. On note A_n et B_n les événements respectifs :
A_n : "on obtient des boules des deux couleurs au cours des n tirages".
B_n : "on obtient au plus une boule noire".

1. Modéliser l'expérience avec un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
2. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$.
3. Les événements A_n et B_n sont-ils indépendants si $n = 2$?
4. Même question si $n = 3$.

Exercice 9 (Duel à *Pile* ou *Face*).
On considère une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir *Pile* est $p \in]0;1[$.
Deux joueurs A et B lancent alternativement la pièce, et A commence.
La partie s'arrête dès que A obtient *Pile* ou dès que B obtient *Face*.
On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience, et les différents lancers sont mutuellement indépendants.

1. Quelle est la probabilité que le jeu se termine au n^e lancer ?
   On pourra distinguer les cas selon la parité de n.
2. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?
3. Quelle est la probabilité que le jeu se termine ?
4. Pour quelles valeurs de p le joueur A a-t-il l'avantage ? Et si la pièce est équilibrée ?

Exercice 10 (*n lancers d'une pièce).
Soit n un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir *Pile* est $p \in]0;1[$. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, *Face* ne soit jamais suivi de *Pile* ?

Exercice 11 (*n tirages dans une urne).
Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire n boules en remettant la boule après tirage si elle est rouge et en ne la remettant pas si elle est blanche. Quelle est la probabilité p d'obtenir exactement une boule blanche en n tirages ?
On fera intervenir les événements B_k : "on obtient une blanche au k^e tirage" et R_k : "on obtient une rouge au k^e tirage".

II Exercices supplémentaires

Exercice 12 (Un peu de théorie des ensembles).
Soit A un événement et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements de Ω.

1. Montrer que : $A \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (A \cup B_n)$ et que : $A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)$.
2. Montrer que : $\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{B_n}$ et que : $\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{B_n}$.

Exercice 13 (Tir à l'arc).
Un archer tire sur des cibles situées à 20 m et à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20 m (resp. 50 m) est p (resp. q) avec $q < p$.
On suppose les tirs indépendants. L'archer gagne le jeu s'il atteint deux cibles consécutivement.
Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?

Exercice 14 (Vaccin).
Un quart d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte 1/12 de malades. Parmi les malades, il y a 4 non vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade ?

Exercice 15 (Impasse à l'oral).
Cinq candidats se présentent à un oral où sont posées 5 questions.
Le 1^{er} candidat tire au hasard une des 5 questions et cette question n'est pas posée aux candidats suivants.
Le 2^e candidat tire l'une des quatre questions restantes, etc.
Le 5^e candidat doit répondre à l'unique question restante.
Vous êtes l'un des candidats, et vous avez fait l'impasse sur l'une des 5 questions.
On vous permet de choisir de passer le 1^{er}, le 2^e, ...ou le 5^e. Que choisissez-vous ?

Exercice 16 (Packs de lait).
Dans un supermarché se trouvent 150 packs de lait dont 50 périmés.
Les acheteurs prennent chacun un pack au hasard, dans l'ordre de leur arrivée.
Vaut-il mieux arriver en premier ? en deuxième ? à la fin ?

Exercice 17 (Stratégies à la loterie).
Une loterie se déroule une fois par semaine. Chaque semaine, sur 100 billets, k sont gagnants. On suppose que $k \leq 90$. Chaque billet coûte 1 euro. On dispose de 10 euros.
Deux stratégies sont possibles :

1) On achète 10 billets en une seule fois.
2) On achète 1 billet à la fois pendant 10 semaines.

Quelle est la meilleure stratégie pour obtenir au moins un billet gagnant ?

Exercice 18 (Oral concours HEC - voie économique).
On étudie la vente d'un certain type de produit sur Internet sur trois sites A, B et C, et on fait les constatations suivantes :

— si un client choisit le site A pour un achat, il choisit indifféremment A, B ou C pour l'achat suivant ;
— si un client fait une achat auprès du site B, il fait l'achat suivant sur le même site B ;
— si un client fait un achat sur le site C, il choisira pour l'achat suivant le site A avec une probabilité $\dfrac{1}{12}$, le site B avec une probabilité $\dfrac{7}{12}$ et le site C avec une probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Au départ le client choisit au hasard l'un des trois sites.
On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n, B_n et C_n les événements « au $n^{\text{ième}}$ achat, le client se fournit respectivement auprès de A, B et C » et on désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives de ces événements.

1. Quelles sont les valeurs de p_1, q_1 et r_1 ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre p_n, q_n et r_n.
3. Exprimer p_{n+1} en fonction des trois réels p_n, q_n et r_n.
   Faire de même pour q_{n+1} et r_{n+1}.
4. Pour $n \geqslant 2$, exprimer p_{n+1} en fonction de r_{n+1} et r_n.
5. Prouver que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   Donner l'expression de r_n, puis p_n et q_n, en fonction de n.
6. Étudier la convergence des trois suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 19 (*Urne avec boules identiques).
Une urne contient 32 boules sur lesquelles sont inscrits des numéros allant de 1 à 8 : pour tout $j \in \{1, \cdots, 8\}$, 4 boules portent le numéro j. On tire au hasard, sans remise, un échantillon de 5 boules.

1. Modéliser l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

Quelle est la probabilité d'obtenir :

2. Quatre boules portant le même numéro et une boule portant un autre numéro ?
3. Trois boules portant le même numéro et deux boules portant le même numéro différent du précédent ?
4. Trois boules portant le même numéro et deux boules portant des numéros différents et différents du premier ?
5. Deux boules portant le même numéro, deux boules portant le même numéro différent du précédent, et une boule portant encore un autre numéro ?
6. Deux boules portant le même numéro, et trois boules portant des numéros différents entre eux et différents du premier ?
7. Cinq boules portant des numéros différents ?