Corrigé TD7 : Réduction des endomorphismes (trigonalisation et compléments)

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1. Déterminons le polynôme caractéristique de M :*

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\left((\lambda-3)^2-1\right) = (\lambda-4)^2(\lambda-2)$$

Les valeurs propres de M sont 2 (valeur propre simple) et 4 (valeur propre double).
Regardons maintenant si le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est de dimension 2.
Après calculs, on a $E_4(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
$E_4(M)$ est donc de dimension 1 et donc M n'est pas diagonalisable.

2. — *Déterminons une base de $Ker(f-2Id_E)$:*

$$(f-2Id_E)(x,y,z)=0 \iff (M-2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$$

Donc $Ker(f-2Id_E) = \{(x,-x,0)/x\in\mathbb{R}\} = Vect((1,-1,0))$.
La famille $((1,-1,0))$ est donc génératrice de $Ker(f-2Id_E)$ et libre (un seul vecteur non nul) donc c'est une base de $Ker(f-2Id_E)$ qui est donc de dimension 1.

— *Déterminons une base de $Ker((f-4Id_E)^2)$:*

$$(f-4Id_E)^2(x,y,z)=0 \iff (M-4I_3)^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x=y$$

Donc $Ker((f-4Id_E)^2) = \{(x,x,z)/(x,z)\in\mathbb{R}^2\} = Vect((1,1,0),(0,0,1))$.
La famille $((1,1,0),(0,0,1))$ est donc génératrice de $Ker((f-4Id_E)^2)$ et libre (deux vecteurs non proportionnels) donc c'est une base de $Ker((f-4Id_E)^2)$ qui est donc de dimension 2.

On a donc montré que $\dim(Ker(f-2Id_E)) + \dim(Ker((f-4Id_E)^2)) = \dim(E)$.
Il nous reste à montrer que $Ker(f-2Id_E)\cap Ker((f-4Id_E)^2) = \{0\}$.
Soit $\overrightarrow{u} \in Ker(f-2Id_E)\cap Ker((f-4Id_E)^2)$. *On a alors* $\overrightarrow{u} = (a,-a,0)$ *et* $\overrightarrow{u} = (x,x,z)$.
Par identification, on obtient $z=0$ et $a=x=-a$ donc $a=x=0$. Ainsi, $\overrightarrow{u} = (0,0,0)$.
On a donc bien $Ker(f-2Id_E)\cap Ker((f-4Id_E)^2) = \{0\}$.
En conclusion $E = Ker(f-2Id_E)\oplus Ker((f-4Id_E)^2)$.

3. — *On a vu dans la question 1 que* $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Donc $f(u)=4u$ et ainsi $u\in Ker(f-4Id_E)$.

— *On cherche $v=(x,y,z)$ tel que :*

$$u = f(v)-4v \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (M-4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=1 \\ x=y \end{cases}$$

Nous avons une infinité de choix pour v, on choisit de prendre $v=(0,0,1)$.
La famille (u,v) est bien libre car les deux vecteurs ne sont visiblement pas proportionnels.

4. D'après les calculs fait à la question 2., la famille (u,v) est bien une base de $Ker((f-4Id_E)^2)$. On pose de plus $w=(1,-1,0)$. On a vu que la famille (w) est une base de $Ker(f-2Id_E)$. Comme les sous-espace vectoriels $Ker(f-2Id_E)$ et $Ker((f-4Id_E)^2)$ sont supplémentaires, la famille (u,v,w) est une base de E.

De plus $\left\{\begin{array}{l} f(u)=4u \\ f(v)=u+4v \\ f(w)=2w \end{array}\right.$ *donc la matrice de f dans la base (u,v,w) est* $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=N$.

M et N sont deux matrices associées au même endomorphisme mais dans deux bases différentes donc elles sont semblables.

Corrigé de l'exercice 2. *1. (a) Grâce à la matrice A on sait que*

$$\begin{aligned} f(e_1)&=-e_1-4e_2-e_3\\ f(e_2)&=2e_1+5e_2+2e_3\\ f(e_3)&=-e_1-3e_2-e_3.\end{aligned}$$

Or, comme f est une application linéaire, on a $f(u_1)=f(e_1)+f(e_2)$. On a donc :

$$f(u_1)=-e_1-4e_2-e_3+2e_1+5e_2+2e_3=e_1+e_2=u_1.$$

On a $f(u_1)=1u_1$ et $u_1\neq(0,0,0)$ donc u_1 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

(b) Le polynôme caractéristique de f est $\chi_f(\lambda)=\chi_A(\lambda)=(\lambda-1)^3$. Donc 1 est l'unique valeur propre de f.

(c) A admet une seule valeur propre qui est 1 donc si A était diagonalisable on aurait $A=PDP^{-1}$ avec D la matrice contenant les valeurs propres et donc dans le cas présent $D=I_3$. On aurait donc $A=PI_3P^{-1}=I$. Ce qui est absurde car A n'est pas égale à la matrice I_3. Ainsi, A n'est pas diagonalisable et donc f n'est pas diagonalisable.

(Autre méthode : on cherche le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et on utilise le théorème de diagonalisation)

De plus, f est bijectif car 0 n'est pas une valeur propre de f.

2. (a) $f(u_2)=u_1+u_2 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}0\\p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\p\\q\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2p-q=1\\ 5p-3q=1+p\\ 2p-q=q\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p=1\\ q=1\end{array}\right.$.

Donc $u_2=e_2+e_3=(0,1,1)$.

$f(u_3)=2u_2+u_3 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}r\\0\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r\\0\\s\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -r-s=r\\ -4r-3s=2\\ -2r-s=2+s\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r=1\\ s=-2\end{array}\right.$.

Donc $u_3=e_1-2e_3=(1,0,-2)$.

(b) On a $\det_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,u_3)=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&-2\end{vmatrix}=-1\neq 0$ *donc $\mathcal{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.*

(c) Grâce aux questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned} f(u_1)&=u_1=1u_1+0u_2+0u_3\\ f(u_2)&=u_1+u_2=1u_1+1u_2+0u_3\\ f(u_3)&=2u_2+u_3=0u_1+2u_2+1u_3.\end{aligned}$$

Donc $A'=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(d) $A'=I_3+N$ *avec* $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$. *On a* $N^2=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ *et* $N^3=N^4=\ldots=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

N et I_3 commutent donc d'après la formule du binôme :

$$(A')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^k N^{n-k} = I_3^n + nI_3^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} I^{n-2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) *Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $A = PA'P^{-1}$.*
On montre facilement par récurrence que $A^n = P(A')^n P^{-1}$.
De plus on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
On a donc $A^n = \begin{pmatrix} -n^2-n+1 & n^2+n & -n^2 \\ -n^2-3n & n^2+3n+1 & -n^2-2n \\ -2n & 2n & -2n+1 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 3. 1. *$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+5 & -3 \\ 6 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda+5)(\lambda-4)+18 = \lambda^2+\lambda-2 = (\lambda-1)(\lambda+2)$.*

2. *χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.*
Les valeurs propres de A sont 1 et -2. Pour déterminer la matrice P il nous faut un vecteur propre associé à chaque valeur propre.
$AX = X \iff \begin{cases} -5x+3y = x \\ -6x+4y = y \end{cases} \iff y = 2x.$
Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
$AX = -2X \iff \begin{cases} -5x+3y = -2x \\ -6x+4y = -2y \end{cases} \iff y = x.$
Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -2.
On a donc $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (a) *Soit $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Y^3 = D$.*
On a alors $Y \times D = Y \times Y^3 = Y^4$ et $D \times Y = Y^3 \times Y = Y^4$. Donc $Y \times D = D \times Y$ c'est-à-dire Y et D commutent.
Supposons que $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
On a alors $YD = \begin{pmatrix} a & -2b \\ c & -2d \end{pmatrix}$ et $DY = \begin{pmatrix} a & b \\ -2c & -2d \end{pmatrix}$. Donc, pour avoir $YD = DY$ on voit qu'il faut nécessairement avoir $b = c = 0$ et ainsi Y est une matrice diagonale.

(b) *On a vu que pour vérifier $Y^3 = D$ il faut nécessairement que Y soit une matrice diagonale. On cherche donc Y sous la forme $\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$. On a alors :*

$$Y^3 = D \iff \begin{cases} y_1^3 = 1 \\ y_2^3 = -2 \end{cases}.$$

Il existe donc une unique matrice Y telle que $Y^3 = D$, c'est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$.

4. *Dans cette équation nous allons effectuer le changement d'inconnue $N = P^{-1}MP \iff M = PNP^{-1}$. On a alors :*

$$M^3 = A \iff (PNP^{-1})^3 = PDP^{-1} \iff PN^3P^{-1} = PDP^{-1} \iff N^3 = D.$$

D'après la question précédente $N^3 = D \iff N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$.

Donc $M^3 = A \iff M = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}P^{-1}$.

On peut rapidement trouver $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On a donc $M = \begin{pmatrix} -1-2\sqrt[3]{2} & 1+2\sqrt[3]{2} \\ -2-2\sqrt[3]{2} & 2+\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 4.

Réécrivons le problème matriciellement. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. *On a alors* $X_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *et la relation* $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$, *où* $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.
Une récurrence immédiate donne alors $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.
Il suffit donc de calculer les puissances de A : le polynôme caractéristique de A vaut $\chi_A(X) = (X+2)(X-1)^2$, *donc A possède une valeur propre simple (2) et une valeur propre double (1). On montre facilement que* $E_{-2}(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
Donc $\dim(E_{-2}(A)) + \dim(E_1(A)) = 1+2 = 3$, *ce qui montre que A est diagonalisable.*
En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *on a donc* $P^{-1}AP = D := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On en déduit finalement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2-(-2)^n & -1+(-2)^n & -1+(-2)^n \\ 1-(-2)^n & (-2)^n & -1+(-2)^n \\ 1-(-2)^n & -1+(-2)^n & (-2)^n \end{pmatrix},$$

et

$$X_n = A^nX_0 = \begin{pmatrix} 2-(-2)^n & -1+(-2)^n & -1+(-2)^n \\ 1-(-2)^n & (-2)^n & -1+(-2)^n \\ 1-(-2)^n & -1+(-2)^n & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+8\times(-2)^n \\ -7+8\times(-2)^n \\ -3+8\times(-2)^n \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+8\times(-2)^n \\ -7+8\times(-2)^n \\ -3+8\times(-2)^n \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 5. *1.* (f_n) *est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.*

L'équation caractéristique est $2x^2 + x - 1 = 0$ *et admet* -1 *et* $\frac{1}{2}$ *comme solution.*

Le cours nous dit qu'il existe A et B tels que $f_n = A(-1)^n + B\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On a de plus :

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ f_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B = 1 \\ -A + \dfrac{B}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = \dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

Pour finir, $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2. (h_p) *est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique* $x^2 = 2$.
$\forall p \in \mathbb{N},\ h_p = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^p + \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}\right)^p$.

3. *(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$.*
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 \times 1^n + 0 \times 2^n = 1$.

Corrigé de l'exercice 6. 1. *Soit $u \in E$. Puisque $\varphi(v) = b$, on a*

$$u \in \mathcal{S} \iff \varphi(u) = b \iff \varphi(u) = \varphi(v).$$

Or, φ étant linéaire, $\varphi(u) = \varphi(v)$ équivaut à $\varphi(u - v) = 0_F$, donc

$$u \in \mathcal{S} \iff u - v \in Ker(\varphi) \iff \exists w \in Ker(\varphi),\ u = w + v,$$

ce qui montre bien que $\mathcal{S} = Ker(\varphi) + v$.

2. *Avec les notations de l'énoncé, la suite u cherchée vérifie l'équation linéaire $\varphi(u) = b$, où b est ici la suite constante égale à 3. Résolvons cette équation linéaire*
   - *Solution particulière : on cherche une suite constante qui vérifie $\varphi(v) = b$, c'est-à-dire*

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} + 2v_{n+1} + 4v_n = 3.$$

     Cela revient à résoudre $c + 2c + 4c = 3$, c'est-à-dire $c = 3/7$.
     La suite constante $v_n = \frac{3}{7}$ est donc une solution particulière.
   - *Equation homogène : calculons $Ker(\varphi)$, c'est-à-dire déterminons les suites (w_n) vérifiant*

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} + 2w_{n+1} + 4w_n = 0.$$

     L'équation caractéristique est $x^2 + 2x + 4 = 0$ qui admet deux solutions complexes :
     $x_1 = -1 + \sqrt{3}i = 2e^{2i\pi/3}$ et $x_2 = 2e^{-2i\pi/3}$.
     Donc d'après le cours, les suites solution de cette équation sont les suites de la forme

     $$w_n = 2^n \left(A \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) + B \sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

     avec A, B réels.

   Ainsi, la suite u est de la forme $u_n = 2^n \left(A \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) + B \sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right)\right) + \frac{3}{7}$ avec A, B réels.
   On se sert de u_0 et u_1 pour trouver A et B :

   $$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + \frac{3}{7} = 0 \\ 2\left(-A\dfrac{1}{2} + B\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{7} = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{3}{7} \\ B = \frac{1}{7\sqrt{3}} \end{array} \right. .$$

   Donc $u_n = \dfrac{2^n}{7}\left(-3\cos\left(n\dfrac{2\pi}{3}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(n\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) + \dfrac{3}{7}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 7.

Par hypothèse A est semblable à : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

On en déduit que A^k est semblable à : $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

Or, les traces de deux matrices semblables sont égales, donc $tr(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, en utilisant le fait que $\lambda_1 \neq 0$:

$$\frac{tr(A^{k+1})}{tr(A^k)} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{k+1}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^k} = \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1}}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k} = \lambda_1 \frac{1 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1}}{1 + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k}.$$

Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $0 \leq \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$, on en déduit que $\left(\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1}\right)$ et $\left(\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\right)$ convergent vers 0, d'où par somme, quotient et produit :

$$\frac{tr(A^{k+1})}{tr(A^k)} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda_1.$$

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 8.
Les valeurs propres de A sont $0, 1, 2$, et les sous-espaces propres sont :

$$E_0(A) = Vect\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_1(A) = Vect\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2(A) = Vect\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\dim(E_0(A)) + \dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$*, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et en posant*

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1},$$

c'est-à-dire

$$A^n = \begin{pmatrix} -4 + 3 \times 2^n & 8 - 2^{n+2} & -20 + 3 \times 2^{n+2} \\ 3 \times 2^{n-1} & -2^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Attention, cette formule n'est **pas valable pour $n = 0$**, *car*

$$A^0 = I_3 \neq \begin{pmatrix} -4 + 3 \times 2^0 & 8 - 2^2 & -20 + 3 \times 2^2 \\ 3 \times 2^{-1} & -2^1 & 3 \times 2^1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 9.

1. *On a $\chi_A(X) = (X-1)^3$, donc A possède une valeur propre triple : 1. Si A était diagonalisable, elle serait donc semblable à I_3, mais c'est impossible car la seule matrice semblable à I_3 est I_3, et $A \neq I_3$. On en déduit que A n'est pas diagonalisable.*
2. *Notons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A (A est donc la matrice de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$). On doit montrer l'existence d'une base (u_1, u_2, u_3) telle que $Mat_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = B$, c'est-à-dire (par lecture des colonnes de B) :*

$$f(u_1) = u_1, \qquad f(u_2) = u_2, \qquad f(u_3) = u_2 + u_3.$$

Les deux premières conditions disent que u_1 et u_2 sont dans $E_1(f) = Ker(f - Id)$.
Or, $E_1(f) = Ker(A - I_3) = Ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y + z = 0\}$, donc $E_1(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
Mais attention, u_1 et u_2 ne peuvent pas être choisis au hasard.
Examinons la troisième condition : elle se réécrit $(f - Id)(u_3) = u_2$, et donc elle impose que $u_2 \in Im(f - Id)$. C'est donc le choix de u_2 qui est le plus contraignant : il faut que u_2 soit dans le noyau et l'image de $f - Id$. Le vecteur $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

Mais $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *ne convient pas pour* u_2 *! Posons plutôt* $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Enfin, trouvons un u_3 *convenable : en posant* $u_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, *on a*

$$(f - Id)(u_3) = u_2 \iff (A - I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ -b-c \\ b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc le vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *convient.*

Finalement, la base (u_1, u_2, u_3) *ainsi construite est bien une base dans laquelle la matrice de* f *est* B, *ce qui montre que* A *et* B *sont semblables.*

3. *Une récurrence facile montre que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(et ça reste vrai pour les* $n \in \mathbb{Z}$*).*

   Or, la question précédente montre que $B = P^{-1}AP$, *avec*

$$P = Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{Z}$ *:*

$$A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-n & -n \\ 0 & n & 1+n \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 10. 1. (a) *Par hypothèse, il existe* $P \in GL_3(\mathbb{C})$ *telle que* $P^{-1}BP = D$ *est diagonale. On a alors*

$$P^{-1}B^2P = (P^{-1}BP)^2 = D^2$$

qui est aussi diagonale, donc B^2 *est diagonalisable.*

(b) *Posons* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Cette matrice n'est pas diagonalisable, car sa seule valeur propre est* 0, *et le sous-espace propre* $Ker(B)$ *est de dimension* 2 *(pas* 3*).*

Mais la matrice $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable (car diagonale).*

Ceci prouve que l'implication « B^2 diagonalisable $\Longrightarrow$ B diagonalisable » est fausse.

2. (a) *Les valeurs propres de* A *sont* $0; 1; 16$, *donc* A *est diagonalisable (*3 *valeurs propres distinctes pour une matrice* $3 * 3$*). Les sous-espaces propres sont :*

$$E_0(A) = Vect\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_1(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{16}(A) = Vect\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *on a donc* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = D$.

(b) *Posons* $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$.

— *Si $C^2 = D$, alors $CD = C \times C^2 = C^3 = C^2 \times C = DC$, donc*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 16c \\ 0 & b' & 16c' \\ 0 & b'' & 16c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' \\ 16a'' & 16b'' & 16c'' \end{pmatrix},$$

et donc $b = c = a' = c' = a'' = b'' = 0$, d'où $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$.

Du coup $C^2 = D \implies \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b'^2 & 0 \\ 0 & 0 & c''^2 \end{pmatrix} = D$, ce qui montre que $\begin{cases} a^2 = 0 \\ b'^2 = 1 \\ c''^2 = 16 \end{cases}$.

On en déduit que $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \{-1; 1\}$ et $\beta \in \{-4; 4\}$.

— *Réciproquement, si $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \{-1; 1\}$ et $\beta \in \{-4; 4\}$, alors on a $C^2 = D$.*

En résumé, l'équation $C^2 = D$ possède 4 solutions :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(c) *Puisque $B^2 = A \iff B^2 = PDP^{-1} \iff P^{-1}B^2P \iff (P^{-1}BP)^2 = D$ on en déduit que*

$$B^2 = A \iff \exists i \in \{1; 2; 3; 4\},\ P^{-1}BP = C_i \iff \exists i \in \{1; 2; 3; 4\},\ B = PC_iP^{-1}.$$

Finalement, l'équation $B^2 = A$ possède quatre solutions :

$$B_1 = PC_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = PC_2P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = PC_3P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -5 & -5 \\ -5 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -B_2,$$

$$B_4 = PC_4P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -B_1.$$

Corrigé de l'exercice 11.

On a $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & & \beta \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \beta & & \ddots & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

1. *On remarque que* $A_n - (\alpha - \beta)I_n$ *est une matrice de rang* 1 *(tous les coefficients sont égaux à* $\beta \neq 0$*). On a donc, par le théorème du rang :* $\dim(Ker(A_n - (\alpha-\beta)I_n)) = n-1$*, ce qui montre que* $\alpha - \beta$ *est valeur propre de* A_n *et* $\dim(E_{\alpha-\beta}(A_n)) = n-1$.
2. *Le nombre complexe* $\alpha - \beta$ *est valeur propre de* A_n *de multiplicité au moins* $n-1$*. Notons* λ *la dernière valeur propre. On peut calculer* λ *via la trace de* A_n *(qui est aussi la somme de ses valeurs propres complexes comptées avec multiplicité) :*

$$tr(A_n) = \alpha + \alpha + \cdots + \alpha + \alpha = (\alpha-\beta) + (\alpha-\beta) + \cdots + (\alpha-\beta) + \lambda,$$

donc $n\alpha = (n-1)(\alpha-\beta) + \lambda$*, i.e.* $\lambda = \alpha + (n-1)\beta$.
On constate que $\lambda \neq \alpha - \beta$ *(sinon* $n\beta = 0$*, absurde car* $\beta \neq 0$*). Donc,* A_n *possède un deuxième sous-espace propre, qui est nécessairement de dimension* 1 *(puisque* $E_{\alpha-\beta}(A_n)$ *et* $E_\lambda(A_n)$ *sont en somme directe, et que la dimension de* $E_{\alpha-\beta}(A_n) \oplus E_\lambda(A_n)$ *ne peut pas dépasser* n*).*
On a donc $E_{\alpha-\beta}(A_n) \oplus E_\lambda(A_n) = \mathbb{C}^n$*, ce qui montre que* A_n *est diagonalisable.*

3. *La question précédente montre que* A_n *est semblable à* $D_n = \begin{pmatrix} \alpha-\beta & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
On a donc $\det(A_n) = \det(D_n) = (\alpha-\beta)^{n-1} \times \lambda = (\alpha + (n-1)\beta)(\alpha-\beta)^{n-1}$.

Corrigé de l'exercice 12. 1. *Facile, car* $A - \lambda I_n$ *est inversible ssi* λ *n'est pas valeur propre de* A*, et* A *ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres (au plus* n*).*

2. *Evidemment, il suffit de traiter le cas où* A *n'est pas inversible (sinon, si* A *est inversible, il suffit de poser* $A_k = A$ *pour tout* k*...). Soit donc* $A \notin GL_n(\mathbb{K})$*. L'ensemble des valeurs propres de* A *est donc une partie finie de* $\mathbb{C}$ **contenant** 0 *(car* $det(A - 0I_n) = \det(A) = 0$*), donc* 0 *est valeur propre). Il existe donc un disque centré en* 0 *(de rayon* $\rho > 0$*) ne contenant que la valeur propre* 0.
Considérons la suite de matrices $A_k := A - \frac{1}{k}I_n$*. Lorsque* k *est suffisamment grand (en fait lorsque* $0 < \frac{1}{k} < \rho$*), le réel* $\frac{1}{k}$ *n'est pas valeur propre de* A*, donc la matrice* A_k *est inversible. La suite* $(A_k)_{k \geq k_0}$ *est donc une suite de matrices inversibles, pour* $k_0 = E\left(\frac{1}{\rho}\right) + 1$*, et cette suite converge vers* A*, puisque :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad A_k[i,j] = \begin{cases} A[i,j] & si\ i \neq j \\ A[i,i] - \frac{1}{k} & si\ i = j \end{cases} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} A[i,j].$$

Corrigé de l'exercice 13. 1. *Notons* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{K}^3$ *qui est canoniquement associé à* B*. Par hypothèse sur* B*, on a donc*

$$f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}, \qquad f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}.$$

Montrer que B *est semblable à* N *revient à montrer qu'il existe une base* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *de* $\mathbb{K}^3$ *dans laquelle la matrice de* f *est* N*, c'est-à-dire une base* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *telle que*

$$f(e_1) = e_2, \qquad f(e_2) = e_3, \qquad f(e_3) = 0_{\mathbb{K}^3}$$

(par lecture des colonnes de N*). On procède par analyse synthèse :*

- *Si une telle base existe, alors on a nécessairement* $e_2 = f(e_1)$*, et* $e_3 = f^2(e_1)$.
Le problème est donc le choix de e_1*. Mais* $e_3 \neq 0_{\mathbb{K}^3}$*, donc on doit avoir* $e_1 \notin Ker(f^2)$.
- *Choisissons* $e_1 \in \mathbb{K}^3 \setminus Ker(f^2)$ *(c'est possible car* $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^3)}$*, donc* $Ker(f^2) \subsetneq \mathbb{K}^3$*). Posons alors* $e_2 = f(e_1)$ *et* $e_3 = f^2(e_1)$*, et montrons que la famille* (e_1, e_2, e_3) *est bien une base de* $\mathbb{K}^3$.
Si on a $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$ *avec les* $\alpha_i \in \mathbb{K}$*, alors en appliquant* $f \circ f$*, on récupère :*

$$\alpha_1 f^2(e_1) = 0_{\mathbb{K}^3}$$

(puisque $f^2(e_2) = f^3(e_1) = 0_{\mathbb{K}^3}$ et $f^2(e_3) = f^4(e_1) = 0_{\mathbb{K}^3}$).
Mais $f^2(e_1) \neq 0_{\mathbb{K}^3}$ (vu le choix de e_1), donc $\alpha_1 = 0$.
D'où $\alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0_{\mathbb{K}^3}$, ce qui implique (en appliquant f) :

$$\alpha_2 f(e_2) = 0_{\mathbb{K}^3},$$

c'est-à-dire

$$\alpha_2 f^2(e_1) = 0_{\mathbb{K}^3}.$$

On en déduit $\alpha_2 = 0$, et en reportant dans la première identité : $\alpha_3 e_3 = 0_{\mathbb{K}^3}$, ce qui donne $\alpha_3 f^2(e_1) = 0_{\mathbb{K}^3}$, puis $\alpha_3 = 0$.
La famille (e_1, e_2, e_3) ainsi construite est libre à trois éléments, c'est donc une base de $\mathbb{K}^3$, dans laquelle la matrice de f est N. Ceci montre bien que B et N sont semblables.

2. *D'après la question précédente, il existe $P \in GL_3(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}BP = N$. On en déduit facilement que*

$$B + I_3 = PNP^{-1} + I_3 = P(N + I_3)P^{-1},$$

donc que $B + I_3$ et $N + I_3$ sont semblables, ce qui implique $\det(B + I_3) = \det(N + I_3) = 1$ (puisque $N + I_3$ est triangulaire avec des 1 sur la diagonale).

3. *Puisque A est inversible, on peut écrire $A + B = A(I_3 + A^{-1}B)$, donc*

$$\det(A + B) = \det(A) \times \det(I_3 + A^{-1}B).$$

Or, on a montré à la question précédente que $\det(I_3 + C) = 1$ dès que $C^2 \neq 0$ et $C^3 = 0$.
Appliquons ceci à la matrice $C := A^{-1}B$, qui vérifie bien les hypothèses puisque $AB = BA$, donc $BA^{-1} = A^{-1}B$, et

$$(A^{-1}B)^2 = A^{-1}BA^{-1}B = (A^{-1})^2 B^2 \neq 0,$$

sinon on aurait $B^2 = A^2 \times 0 = 0$, ce qui est faux. On a bien également

$$(A^{-1}B)^3 = A^{-1}BA^{-1}BA^{-1}B = (A^{-1})^3 B^3 = (A^{-1})^3 \times 0 = 0.$$

Donc $\det(I_3 + A^{-1}B) = 1$, et $\det(A + B) = \det(A)$.

4. *Si A n'est pas inversible, considérons une suite de matrices inversibles $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers A (c'est possible d'après l'exercice précédent).*
Puisque $AB = BA$ et que la suite (A_k) est construite comme étant $A_k = A - \frac{1}{k}I_n$ (voir exercice précédent), on a évidemment

$$A_k B = (A - \frac{1}{k}I_n)B = AB - \frac{1}{k}B = BA - \frac{1}{k}B = B(A - \frac{1}{k}I_n) = BA_k,$$

et donc (d'après la question précédente),

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \det(A_k + B) = \det(A_k).$$

Il reste à faire tendre $k \to +\infty$: le déterminant 3×3 est une fonction polynômiale des coefficients de la matrice, donc une fonction continue (à neuf variables...). Vu que les coefficients de A_k convergent vers ceux de A, on obtient

$$\det(A + B) = \lim_{k\to+\infty} \det(A_k + B) = \lim_{k\to+\infty} \det(A_k) = \det(A).$$