TD7 : Réduction des endomorphismes (trigonalisation et compléments)

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1 (D'après oral CCP - filière TSI).

On pose $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

1. M est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que : $Ker(f - 2\mathrm{id}_E) \oplus Ker((f - 4\mathrm{id}_E)^2) = E$.
   Indication : on pourra calculer $(M - 4I_3)^2$.
3. Soit $u = (1, 1, 0)$. Montrer que $u \in Ker(f - 4\mathrm{id}_E)$.
   Trouver v tel que $u = f(v) - 4v$ et (u, v) libre.
4. Montrer que la famille (u, v) forme une base de $Ker((f - 4\mathrm{id}_E)^2)$.
   En déduire que M est semblable à $N = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Puissances d'une matrice trigonalisable).
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Soit $u_1 = e_1 + e_2$. Montrer que u_1 est un vecteur propre pour f.
   (b) Montrer que 1 est l'unique valeur propre de f.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?
2. On considère les éléments de $\mathbb{R}^3$: $u_2 = pe_2 + qe_3$ et $u_3 = re_1 + se_3$, où p, q, r, s sont des réels.
   (a) Déterminer u_2 et u_3 pour que :
   $$f(u_2) = u_1 + u_2 \quad \text{et} \quad f(u_3) = 2u_2 + u_3.$$
   (b) Vérifier alors que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Écrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Calculer, pour tout entier n, $(A')^n$.
   (e) En déduire, pour tout entier n, A^n.

Exercice 3 (Racines cubiques d'une matrice - Oral CCP 2014, filière TSI).

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A est diagonalisable et déterminer la matrice diagonale D et la matrice de passage P.
3. (a) Soit $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $Y^3 = D$. Justifier que Y commute avec D et en déduire que Y est une matrice diagonale.
   (b) En déduire l'ensemble des matrices $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $Y^3 = D$.

4. À l'aide de la question précédente, déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = A$.
Indication : on pourra poser $N = P^{-1}MP$ et trouver l'équation vérifiée par N.

Exercice 4 (Suites définies par récurrence).
On définit trois suites réelles u, v, w par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ v_0 = 1 \\ w_0 = 5 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{cases}$.
Déterminer u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Exercice 5 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2).
Calculer le terme général des suites suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $2f_{n+2} + f_{n+1} - f_n = 0$ et $f_0 = f_1 = 1$.
2. $\forall p \in \mathbb{N}$, $h_{p+2} = 2h_p$ et $h_0 = 1$ et $h_1 = 0$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$.

Exercice 6 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 avec second membre).
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle **équation linéaire sur E** une équation de la forme $\varphi(u) = b$, où $\varphi : E \to F$ est une application linéaire, $u \in E$ est l'inconnue et $b \in F$ est le second membre. On note $\mathcal{S} = \{u \in E,\ \varphi(u) = b\}$ l'ensemble des solutions de cette équation.

1. On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide. Soit $v \in \mathcal{S}$ une solution.
Montrer que $\mathcal{S} = Ker(\varphi) + v = \{w + v,\ w \in Ker(\varphi)\}$.
Ceci montre que pour résoudre $\varphi(u) = b$, il suffit donc de trouver une solution particulière v et d'y ajouter les solutions w de l'équation homogène associée $\varphi(w) = 0_F$.
2. Application : en utilisant l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ défini par
$$\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+2} + 2u_{n+1} + 4u_n)_{n\in\mathbb{N}},$$
calculer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n + 3.$$

Exercice 7 (*Valeur propre de plus grand module).
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dont les valeurs propres ont des modules distincts deux à deux. Ces valeurs propres sont rangées dans l'ordre croissant de leurs modules :
$$|\lambda_1| > \ldots > |\lambda_n|.$$
Montrer que $\left(\frac{tr(A^{k+1})}{tr(A^k)}\right) \underset{k\to+\infty}{\to} \lambda_1$.

II Exercices supplémentaires

Exercice 8 (Calcul de puissance en dimension 3).
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. La formule obtenue est-elle valable pour $n = 0$?

Exercice 9 (*Calcul de puissance bis).
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Indication : on considèrera $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme canoniquement associé à A et on construira explicitement une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est B.

3. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10 (Racines carrées d'une matrice).

1. (a) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que si B est diagonalisable, alors B^2 est diagonalisable.

   (b) En utilisant la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, justifier que la réciproque est fausse.

2. On veut déterminer les matrices B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = A$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que A est diagonalisable et préciser $P \in GL_3(\mathbb{C})$ et D diagonale telles que
   $$A = PDP^{-1}.$$

   (b) Résoudre l'équation $C^2 = D$, d'inconnue $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   Indication : on pourra remarquer que toute solution C commute avec D.

   (c) En déduire toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$.

Exercice 11 (*Calcul de déterminant par diagonalisation).
Soit un entier $n \geq 2$, α et β deux nombres complexes avec $\beta \neq 0$ et $A_n = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{i,i} = \alpha$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, et $a_{i,j} = \beta$ si $i \neq j$.

1. Montrer que A_n admet un sous-espace propre de dimension $n - 1$.
2. En déduire que A_n est diagonalisable.
3. Calculer $\det(A_n)$.

Exercice 12 (*Densité des matrices inversibles).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A - \lambda I_n$ est inversible pour tous les scalaires $\lambda \in \mathbb{K}$ sauf un nombre fini.
2. En déduire que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la limite d'une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles (la convergence des suites de matrices est ici définie "coefficient par coefficient").

Exercice 13 (*Matrice nilpotente d'ordre 3).
Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $B^2 \neq 0$ et $B^3 = 0$.

1. Montrer que B est semblable à la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Indication : raisonner avec l'endomorphisme f canoniquement associé à B, et montrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^3$ dans laquelle la matrice de f est N.
2. Montrer que $\det(B + I_3) = 1$.
3. Montrer que pour toute $A \in GL_3(\mathbb{K})$ qui commute avec B, on a $\det(A + B) = \det(A)$.
4. Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai si A n'est pas inversible
   Indication : utiliser le résultat de l'exercice précédent.