Corrigé TD6 : Intégration sur un intervalle quelconque

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1) La fonction* $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ *est continue sur* $[0;+\infty[$*, et pour tout* $x \geq 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(x)$.

D'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$*, ce qui montre que l'intégrale converge, et que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

2) Puisque $t^2-4t+4=(t-2)^2$*, la fonction* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2-4t+4}} = \frac{1}{|t-2|}$ *est continue sur* $[0;2[$*, et pour tout* $x \in [0;2[$ *:*

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-4t+4}} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{|t-2|} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{2-t} = [-\ln(2-t)]_0^x = \ln(2)-\ln(2-x).$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to2^-} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-4t+4}} = +\infty$*, ce qui montre que* $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-4t+4}}$ *diverge.*

Corrigé de l'exercice 2.
La fonction $t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ *est continue sur* $[a;b[$*. Pour tout* $x \in [a;b[$*, on peut effectuer le changement de variable* $u = b-t$ *sur le segment* $[a;x]$*, ce qui donne :*

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} = \int_{b-a}^{b-x} \frac{-\mathrm{d}u}{u^\alpha} = \int_{b-x}^{b-a} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to b^-}(b-x) = 0^+$*, on en déduit que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\lim_{y\to0^+}\int_y^{b-a} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha}$ *existe dans* $\mathbb{R}$*, c'est-à-dire si et seulement si* $\displaystyle\int_0^{b-a} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha}$ *converge, et on sait que cela équivaut à* $\alpha < 1$ *(exemple de Riemann en* 0*).*
Dans ce cas, on a

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} = \lim_{x\to b^-}\int_{b-x}^{b-a} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha} = \lim_{y\to0^+}\int_y^{b-a} u^{-\alpha}\mathrm{d}u = \lim_{y\to0^+}\left[\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_y^{b-a} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Corrigé de l'exercice 3. *1. La fonction* arctan *est continue sur* $\mathbb{R}$*, donc* f *est continue sur* $]-\infty;0[$ *et sur* $]0;+\infty[$.

2. La fonction f *est continue sur* $[1;+\infty[$*, donc l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *n'est impropre qu'en* $+\infty$*. On effectue une intégration par parties sur le segment* $[1;x]$*, (où* $x>1$ *est fixé) :*

$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{-\arctan(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(x)}{x} + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(x)}{x} = 0$ *(*arctan *étant bornée par* $\frac{\pi}{2}$*), on en déduit que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$ *existe dans* $\mathbb{R}$*. Les intégrales impropres* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$ *sont donc de même nature.*

3. *Pour tous réels a, b, c, on a $\forall t \geq 1$, $\dfrac{a}{t} + \dfrac{bt+c}{1+t^2} = \dfrac{(a+b)t^2+ct+a}{t(1+t^2)}$, donc cette fraction est égale à $\dfrac{1}{t(1+t^2)}$ pour tout t si et seulement si $\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases}$, c'est-à-dire $(a;b;c) = (1;-1;0)$.*
On a donc $\forall t \geq 1$, $\dfrac{1}{t(1+t^2)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{1+t^2}$.
4. *La décomposition précédemment obtenue permet de calculer $\int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$:*
$$\int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{\ln(2)}{2}.$$
Enfin, on passe à la limite lorsque $x \to +\infty$:
$$\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln(x) - \frac{1}{2}\left(\ln(x^2) + \ln(1+\frac{1}{x^2})\right) = -\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{x^2}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc
$$\int_1^x \frac{\arctan(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(x)}{x} + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2},$$
ce qui montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln(2)}{2}$.
5. *Oui, on peut prévoir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, car f est continue sur $[1;+\infty[$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi/2}{t^2} > 0$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi/2}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (exemple de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).*
6. *On a $f(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{t}{t^2} = \dfrac{1}{t} > 0$, et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge, donc d'après le critère des équivalents, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ diverge.*
7. *Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ diverge, on en déduit que l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.*

Corrigé de l'exercice 4. • *Supposons que $\ell = \lim_{t\to+\infty} f(t) > 0$.*
L'idée est la suivante : pour t suffisamment grand, f est minorée par une constante strictement positive, donc l'aire située sous la courbe de f est infinie (puisqu'elle est supérieure à l'aire d'un rectangle infini). Rédigeons cela rigoureusement :
Par définition de la limite, on a :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \qquad t \geq A \implies |f(t) - \ell| \leq \varepsilon \implies \ell - \varepsilon \leq f(t) \leq \ell + \varepsilon.$$
En choisissant $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ (par exemple), on a $t \geq A \implies f(t) \geq \dfrac{\ell}{2}$, donc pour tout $x > A$:
$$\int_A^x f(t)\mathrm{d}t \geq \int_A^x \frac{\ell}{2}\mathrm{d}t = \frac{\ell}{2}(x - A).$$
Cette minoration montre que $\lim_{x\to+\infty} \int_A^x f(t)\mathrm{d}t = +\infty$, donc que l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge. On en déduit que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

- *Si $\ell < 0$, on raisonne de même en se ramenant à $-f$, qui a une limite strictement positive en $+\infty$, donc $\int_0^{+\infty}(-f(t))\mathrm{d}t$ diverge d'après le point précédent, ce qui entraîne la divergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.*

Corrigé de l'exercice 5. *1) La fonction $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{1+t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$, et $0 \leq \frac{\sin^2 t}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \geq 0$.*
Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge (car $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$), on en déduit par le critère de comparaison pour les fonctions positives que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge.

2) La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{\sin(t)}$ *est continue sur* $]0;1]$ *(le dénominateur ne s'annule pas), et* $\dfrac{\ln(1+t)}{\sin(t)} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{t}{t} = 1$. *Donc la fonction possède une limite finie en* 0, *ce qui montre que l'intégrale* $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$ *est convergente (car faussement impropre).*

3) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\sin t}}$ *est continue sur* $]0;1]$ *(puisque* $\sin t > 0$ *sur cet intervalle),* *et* $\dfrac{1}{\sqrt{\sin t}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}} > 0$. *Puisque* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ *converge (exemple de Riemann avec* $\alpha = 1/2$*), on en déduit par le critère des équivalents pour les fonctions positives que* $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin t}}$ *converge.*

4) La fonction $t \mapsto te^{-t}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, *donc l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ *est doublement impropre (en* $+\infty$ *et* $-\infty$*). Pour étudier la convergence, on peut chercher une primitive, à l'aide d'une intégration par parties : pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x te^{-t}\mathrm{d}t = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = -xe^{-x} + 1 - e^{-x}.$$

En faisant tendre $x \to +\infty$, *on obtient (par croissances comparées) que* $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x te^{-t}\mathrm{d}t = 1$, *donc* $\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ *converge. En revanche, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_x^0 te^{-t}\mathrm{d}t = -\int_0^x te^{-t}\mathrm{d}t = (x+1)e^{-x} - 1,$$

donc $\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 te^{-t}\mathrm{d}t = -\infty$, *ce qui montre que* $\int_{-\infty}^0 te^{-t}\mathrm{d}t$ *diverge.*
En conclusion, $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ *diverge.*

5) La fonction $t \mapsto \frac{e^t+e^{-t}-2\cos t}{t^{5/2}}$ *est continue sur* $]0;1]$, *et*

$$\frac{e^t + e^{-t} - 2\cos t}{t^{5/2}} = \frac{(1 + t + \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)) + (1 - t + \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)) - 2(1 - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2))}{t^{5/2}},$$

donc

$$\frac{e^t + e^{-t} - 2\cos t}{t^{5/2}} = \frac{2t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2)}{t^{5/2}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{2}{\sqrt{t}}.$$

Vu que $t \mapsto \frac{2}{\sqrt{t}}$ *est positive et que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ *converge (exemple de Riemann avec* $\alpha = 1/2 < 1$*), on en déduit par le critère des équivalents que* $\int_0^1 \frac{e^t+e^{-t}-2\cos t}{t^{5/2}}\mathrm{d}t$ *converge.*

6) Attention, ici la fonction n'est pas de signe constant !
La fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ *est continue sur* $]0;1]$, *et* $\left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq 1$. *Vu que la fonction constante égale à* 1 *est intégrable sur* $]0;1]$ *(son intégrale est faussement impropre en* 0*), on en déduit (par comparaison) que* $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ *est intégrable sur* $]0;1]$, *et donc que l'intégrale* $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ *converge (absolument même).*

Corrigé de l'exercice 6. *1) La fonction* $t \mapsto e^{-|t|}\mathrm{d}t$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et paire, donc il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$, *elle sera de même nature que* $\int_{-\infty}^0 e^{-|t|}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 e^{t}\mathrm{d}t$.
En outre, pour tout $x \geq 0$, *on a* $\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = 1 - e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, *donc* $\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\mathrm{d}t$ *converge.*
En conclusion, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\mathrm{d}t$ *converge, et :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 2.$$

2) On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$ *(*$t \mapsto \sqrt{t}$ *est une bijection strictement croissante et de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* $]0;+\infty[$ *dans* $]0;+\infty[$, *mais elle n'est pas de classe* $\mathcal{C}^1$ *en* 0 *!), qui montre que sous réserve de convergence, on a*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2e^{-u}\mathrm{d}u.$$

Vu que $\int_0^{+\infty} 2e^{-u}\mathrm{d}u$ *converge et vaut* 2*, on en déduit que* $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ *converge et vaut* 2.

Corrigé de l'exercice 7. *1) La fonction* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}+t^{3/2}}$ *est continue sur* $]0;+\infty[$*, donc l'intégrale étudiée est doublement impropre. On effectue le changement de variable* $u = \sqrt{t}$ *(valable car* $t \mapsto \sqrt{t}$ *est une bijection strictement croissante de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* $]0;+\infty[$ *dans* $]0;+\infty[$*). Sous réserve de convergence, on a*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+t^{3/2}} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} \times \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

En outre, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$ *est convergente, puisque*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = \lim_{x\to+\infty} 2\arctan(x) = \pi.$$

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+t^{3/2}}$ *converge et vaut* π.

2) La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$ *est continue sur* $[1;2[$*. On effectue le changement de variable* $x = 2\sin^2 t$ *(qui est valable car* $t \mapsto 2\sin^2 t$ *est une bijection strictement croissante de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$ *dans* $[1;2[$*). On obtient, sous réserve de convergence :*

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(2-x)}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{2\sin^2 t(2-2\sin^2 t)}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{4\sin^2(t)\cos^2(t)}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\mathrm{d}t.$$

Vu que cette dernière intégrale est convergente (elle n'est pas impropre), on en déduit que l'intégrale $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(2-x)}}$ *converge et* $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(2-x)}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 8. *1. Pour tout réel* x*, la fonction* $t \mapsto e^{-t}t^{x-1} = e^{-t+(x-1)\ln(t)}$ *est continue sur* $]0;+\infty[$ *et strictement positive, donc l'intégrale* $\Gamma(x)$ *est doublement impropre :*

— *On a* $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$*, donc l'intégrale* $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ *est de même nature que l'intégrale de Riemann* $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}}$ *(d'après le critère des équivalents).*
On en déduit que $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $1-x<1$*, c'est-à-dire* $x>0$.

— *On a* $\lim_{t\to+\infty} t^2e^{-t}t^{x-1} = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}t^{x+1} = 0$ *(par croissances comparées), donc il existe* $t_0 > 0$ *tel que* $t \geq t_0 \implies e^{-t}t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}$*. Vu que* $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ *converge, on en déduit par le critère de comparaison pour les fonctions positives que* $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ *converge pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Finalement, l'intégrale doublement impropre $\Gamma(x)$ *converge si et seulement si* $x>0$.

2. Pour $x>0$*, l'intégrale* $\Gamma(x+1)$ *converge et* $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\mathrm{d}t$.
Effectuons une intégration par parties sur le segment $[\varepsilon;u]$ *avec* $0<\varepsilon<u$ *:*

$$\int_\varepsilon^u e^{-t}t^x\mathrm{d}t = \left[-t^xe^{-t}\right]_\varepsilon^u + x\int_\varepsilon^u e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = \varepsilon^xe^{-\varepsilon} - u^xe^{-u} + x\int_\varepsilon^u e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

On passe à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ *:* $\varepsilon^xe^{-\varepsilon} \underset{\varepsilon\to0}{\sim} \varepsilon^x \underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} 0$ *(car* $x>0$*). On obtient (puisque les deux intégrales impropres en* 0 *convergent) :*

$$\int_0^u e^{-t}t^x\mathrm{d}t = -u^xe^{-u} + x\int_0^u e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

Enfin, on passe à la limite lorsque $u \to +\infty$ *:* $u^xe^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *(par croissances comparées), donc (puisque les deux intégrales impropres en* $+\infty$ *convergent) :*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. *La question précédente montre en particulier que* $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
Or, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$*, donc on conjecture :*

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots 1 \times \Gamma(1) = n!$$

Cette formule se vérifie facilement par récurrence : elle est vraie pour $n = 0$ *(*$\Gamma(1) = 0! = 1$*), et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Gamma(n+1) = n! \implies \Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$$

Finalement, on a $\Gamma(n+1) = n!$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 9.
A $\beta > 0$ *fixé, étudions la fonction* $f_\beta : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta} = x^{-1}(\ln x)^{-\beta}$*, définie sur* $]1;+\infty[$ *(le domaine est l'ensemble des réels* $x > 0$ *tels que* $\ln(x) > 0$*).*
Cette fonction est dérivable et $f'_\beta(x) = -\dfrac{\beta + \ln x}{x^2(\ln x)^{\beta+1}}$*. On a* $f'_\beta(x) < 0$ *pour tout* $x > 1$*, donc* f_β *est strictement décroissante sur* $]1;+\infty[$.
Puisque f_β *est continue, positive et décroissante sur* $[2;+\infty[$*, le théorème de comparaison série-intégrale s'applique : la série* $\sum_{n\geq 2} f_\beta(n)$ *est de même nature que l'intégrale impropre* $\int_2^{+\infty} f_\beta(x)dx$.
Or, pour tout $X > 2$*, on a*

$$\int_2^X f_\beta(x)dx = \begin{cases} \left[\frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^X & \text{si } \beta \neq 1 \\ \\ [\ln(\ln x))]_2^X & \text{si } \beta = 1 \end{cases}.$$

Ce calcul de primitive montre que $\lim\limits_{X\to+\infty} \displaystyle\int_2^X f_\beta(x)dx = +\infty$ *si* $\beta \leq 1$*, et* $\lim\limits_{X\to+\infty} \displaystyle\int_2^X f_\beta(x)dx = \dfrac{(\ln 2)^{1-\beta}}{\beta - 1}$ *si* $\beta > 1$*. Donc l'intégrale* $\int_2^{+\infty} f_\beta(x)dx$ *converge si et seulement si* $\beta > 1$.
On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ *converge si et seulement si* $\beta > 1$.

Corrigé de l'exercice 10.

1. *Le théorème de comparaison série-intégrale s'applique, car* f *est continue, positive et décroissante. La série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(n)$ *est donc de même nature que l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$*, c'est-à-dire convergente.*
2. *Pour tout entier* $k \in \mathbb{N}^*$*, on a (par décroissance de* f*) :*

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$

Fixons deux entiers $N > n \geq 1$ *et sommons pour* $k = n+1 \cdots N$*. On obtient :*

$$\sum_{k=n+1}^{N} f(k+1) \leq \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=n+2}^{N+1} f(k) \leq \int_{n+1}^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k).$$

Puisque l'intégrale impropre et la série sont convergentes, on peut faire tendre $N \to +\infty$ *dans cette inégalité. On obtient :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n+2}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k),$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad R_n - f(n+1) \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n.$$

Dès lors :

- *L'inégalité de droite donne la minoration* $R_n \geq \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt$ *pour tout* $n \geq 1$.
- *L'inégalité de gauche se réécrit :*

$$\forall n \geq 1, \qquad R_n \leq f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt.$$

Mais par décroissance de f *encore, on a*

$$f(n+1) \leq \int_{n}^{n+1} f(t)dt,$$

donc

$$\forall n \geq 1, \qquad R_n \leq \int_{n}^{n+1} f(t)dt + \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt = \int_{n}^{+\infty} f(t)dt,$$

ce qui donne la majoration voulue de R_n.

3. *On cherche un entier* $n_0 \geq 1$ *tel que* $|S - S_{n_0}| \leq 10^{-2}$, *c'est-à-dire tel que* $|R_{n_0}| \leq 10^{-2}$. *Posons* $f(x) = \frac{1}{x^3}$ *pour tout* $x \geq 1$. *Puisque* $0 \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$ *(d'après la question précédente), il suffit de trouver* n_0 *tel que* $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt \leq 10^{-2}$, *c'est-à-dire* $\frac{1}{2n_0^2} \leq \frac{1}{100}$. *Ceci équivaut à* $n_0 \geq \sqrt{50}$. *Donc* $n_0 = 8$ *convient. Ainsi,* $S_8 = 1 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{8^3}$ *est une valeur approchée de* S *à* 10^{-2} *près.*

Corrigé de l'exercice 11. 1. • *La fonction* $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ *est continue sur* $]0; +\infty[$ *et se prolonge continûment en* 0 *(sa limite est* 1*), donc l'intégrale* $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ *est convergente (elle est faussement impropre en* 0*).*

• *Pour tout* $X > 1$, *on a, en intégrant par parties :*

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x}dx = -\frac{\cos X}{X} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

On a $\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$ *(en bornant le cos), et* $\int_1^X \frac{\cos x}{x^2}dx$ *possède une limite finie lorsque* $X \to +\infty$ *car l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ *est absolument convergente, donc convergente (on le voit là aussi en bornant le cos). Donc la quantité* $\int_1^X \frac{\sin x}{x}dx$ *possède une limite finie lorsque* $X \to +\infty$, *ce qui montre que l'intégrale impropre* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ *converge.*

Ceci montre que l'intégrale doublement impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ *est convergente.*

2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $I_n \geq \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(n+1)\pi}dx = \frac{2}{\pi(n+1)}$, *donc*

$\forall N \in \mathbb{N}, \ \displaystyle\sum_{n=0}^{N} I_n \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{\pi(n+1)}$, *c'est-à-dire*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{(N+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n}.$$

Puisque la série positive $\sum \frac{1}{n}$ *diverge, on a* $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} = +\infty$, *donc*

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{(N+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = +\infty.$$

Ceci empêche $\int_0^X \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ *d'avoir une limite finie lorsque* $X \to +\infty$, *donc l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ *est divergente, ce qui montre que* $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ *n'est pas intégrable sur* $]0; +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 12. *1.* • *La fonction* $\ln :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ *est continue.*

- *La fonction* $\ln$ *est intégrable sur tout intervalle* $]0;a]$ *avec* $a>0$ *car elle est continue sur* $]0;a]$ *et intégrable en* 0 *: en effet*

$$\forall \varepsilon \in]0;1], \qquad \int_\varepsilon^1 |\ln(t)|\mathrm{d}t = -\int_\varepsilon^1 \ln(t)\mathrm{d}t = [t - t\ln(t)]_\varepsilon^1 = 1 + \varepsilon\ln(\varepsilon) - \varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 1.$$

- *Puisque* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$*, il existe* $A>0$ *tel que* $x \geq A \implies \dfrac{|\ln(x)|}{x} \leq 1$*, c'est-à-dire* $|\ln(x)| \leq x$*.*

Tout ceci montre que $\boxed{\ln \in E}$*, avec* $\beta = n = 1$*.*

2. Montrons que E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^0(]0;+\infty[,\mathbb{C})$ *(qui est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel).*

- *La fonction nulle est évidemment dans* E*, car elle est intégrable sur tout intervalle* $]0;a]$*, et vérifie* $|f(x)| \leq \beta x^n$ *pour tout* $x>0$*, avec* $\beta = 0$ *et* $n=0$ *(par exemple).*
- *Soient* f, g *deux fonctions de* E*, et* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Alors,* f,g *sont intégrables sur tout intervalle* $]0;a]$ *donc* $\lambda f + g$ *aussi (voir le cours). De plus, par hypothèse, il existe des réels* $A_1, A_2, \beta_1, \beta_2$ *strictement positifs et des entiers naturels* n_1, n_2 *tels que*

$$\begin{cases} \forall x \geq A_1, & |f(x)| \leq \beta_1 x^{n_1} \\ \forall x \geq A_2, & |g(x)| \leq \beta_2 x^{n_2} \end{cases}.$$

Pour tout $x \geq \max(A_1;A_2)$*, on a donc* $|\lambda f(x) + g(x)| \leq |\lambda|\beta_1 x^{n_1} + \beta_2 x^{n_2}$*.*
En outre, pour $x \geq 1$*, on a* $x^{n_1} \leq x^n$ *et* $x^{n_2} \leq x^n$*, avec* $n = \max(n_1;n_2)$*.*
Donc en posant $A = \max(1;A_1;A_2)$*,* $n = \max(n_1;n_2)$ *et* $\beta = |\lambda|\beta_1 + \beta_2$*, on a*

$$x \geq A \implies |\lambda f(x) + g(x)| \leq |\lambda|\beta_1 x^n + \beta_2 x^n = \beta x^n,$$

ce qui montre que $\lambda f + g \in E$*.*

3. • *La fonction* φ_x *est continue sur* $]0;+\infty[$ *(comme produit de deux fonctions continues).*

- *La fonction* φ_x *est intégrable sur tout segment* $]0;a]$ *car* $|\varphi_x(t)| \leq |f(t)|$*, et* f *est intégrable sur* $]0;a]$*.*
- *Montrons enfin que la fonction* φ_x *est intégrable au voisinage de* $+\infty$ *: puisque* $f \in E$*, il existe* $A>0$ *tel que* $\forall t \geq A$*,* $|f(t)| \leq \beta t^n$ *(avec* $\beta > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$*), donc* $|\varphi_x(t)| \leq \beta t^n e^{-xt}$ *pour* $t \geq A$*. Cette majoration montre que* $|\varphi_x(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ *(car* $x>0$*), et donc que* φ_x *est intégrable au voisinage de* $+\infty$*, puisque* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *est intégrable au voisinage de* $+\infty$*.*

Tout ceci montre bien que $\boxed{\varphi_x \text{ est intégrable sur }]0;+\infty[}$*.*

4. Soient $f, g \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$*. On a (par linéarité de l'intégrale impropre convergente) pour tout* $x>0$ *:*

$$\mathcal{L}(\lambda f + g)(x) = \int_0^{+\infty} (\lambda f(x) + g(x))e^{-xt}\mathrm{d}t = \lambda\int_0^{+\infty} f(x)e^{-xt}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} g(x)e^{-xt}\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire $\mathcal{L}(\lambda f + g)(x) = \lambda\mathcal{L}(f)(x) + \mathcal{L}(g)(x)$*. Ceci étant vrai pour tout* $x>0$*, on en déduit l'égalité fonctionnelle* $\mathcal{L}(\lambda f + g) = \lambda L(f) + \lambda L(g)$*, et donc* $\mathcal{L}$ *est linéaire.*

5. Par définition $\mathcal{L}(f') = \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X f'(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$ *et* $\mathcal{L}(f) = \displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$*.*
Or, pour tout $X>0$*, on a, en intégrant par parties :*

$$\int_0^X f'(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = [f(t)e^{-xt}]_0^X + x\int_0^X f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = [f(X)e^{-xX} - f(0)] + x\int_0^X f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t.$$

En faisant tendre $X \to +\infty$*, on récupère donc la formule :*

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = -f(0) + x\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t,$$

puisque $|f(X)e^{-xX}| \leq \beta X^n e^{-xX}$ *pour* X *suffisamment grand, et* $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\beta X^n e^{-xX} = 0$*.*

On a donc $\boxed{\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0) \text{ pour tout } x>0}$*.*

6. (a)
   - *La fonction f_k est continue sur $]0;+\infty[$, et intégrable en 0 car prolongeable par continuité, donc f_k est intégrable sur tout intervalle $]0;a]$, avec $a>0$.*
   - *Pour la seconde propriété, il suffit de poser $A=1$, $\beta=1$ et $n=k$ ($\forall t\geq 1,\ |f_k(t)|\leq t^k$).*

   Donc $\boxed{f_k \in E}$.

   (b) *Fixons $X>0$ et $x>0$. Une intégration par parties donne :*

$$\int_0^X t^{k+1}e^{-xt}\mathrm{d}t=\left[t^{k+1}\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^X+\frac{k+1}{x}\int_0^X t^k e^{-xt}\mathrm{d}t=\frac{-X^{k+1}e^{-xX}}{x}+\frac{k+1}{x}\int_0^X t^k e^{-xt}\mathrm{d}t.$$

   En faisant tendre $X\to+\infty$, cela amène

$$\int_0^{+\infty} t^{k+1}e^{-xt}\mathrm{d}t=0+\frac{k+1}{x}\int_0^{+\infty} t^k e^{-xt}\mathrm{d}t,$$

   c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{L}(f_{k+1})(x)=\dfrac{k+1}{x}\mathcal{L}(f_k)(x)}$ *pour tout $x>0$.*

   (c) *Pour $x>0$ et $k\in\mathbb{N}$, une récurrence simple montre que*

$$\mathcal{L}(f_k)(x)=\frac{k}{x}\times\frac{(k-1)}{x}\times\frac{(k-2)}{x}\times\cdots\times\frac{2}{x}\times\frac{1}{x}\mathcal{L}(f_0)(x),$$

   et $\mathcal{L}(f_0)(x)=\int_0^{+\infty}t^0e^{-xt}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$, *donc* $\boxed{\mathcal{L}(f_k)(x)=\dfrac{k!}{x^{k+1}}}$.

7. (a)
   - *La fonction $f_\omega :]0;+\infty[\to\mathbb{C}$ est continue.*
   - *La fonction f_ω est intégrable sur tout intervalle $]0;a]$ avec $a>0$ car $|e^{i\omega t}|=1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $]0;a]$.*
   - *On a : $\forall t>0$, $|e^{i\omega t}|=1\leq 1\times x^0$.*

   Tout ceci montre que $\boxed{f_\omega\in E}$, *avec $\beta=1$ et $n=0$.*

   (b) *Soit $x>0$. On a*

$$\mathcal{L}(f_\omega)(x)=\int_0^{+\infty}e^{i\omega t}e^{-xt}\mathrm{d}t=\lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{(i\omega-x)t}\mathrm{d}t=\lim_{T\to+\infty}\frac{e^{(i\omega-x)T}-1}{i\omega-x}.$$

   Mais $\lim\limits_{T\to+\infty}e^{(i\omega-x)T}=0$ *(car* $|e^{(i\omega-x)T}|=e^{-xT}\underset{T\to+\infty}{\longrightarrow}0$ *car $x>0$), donc*

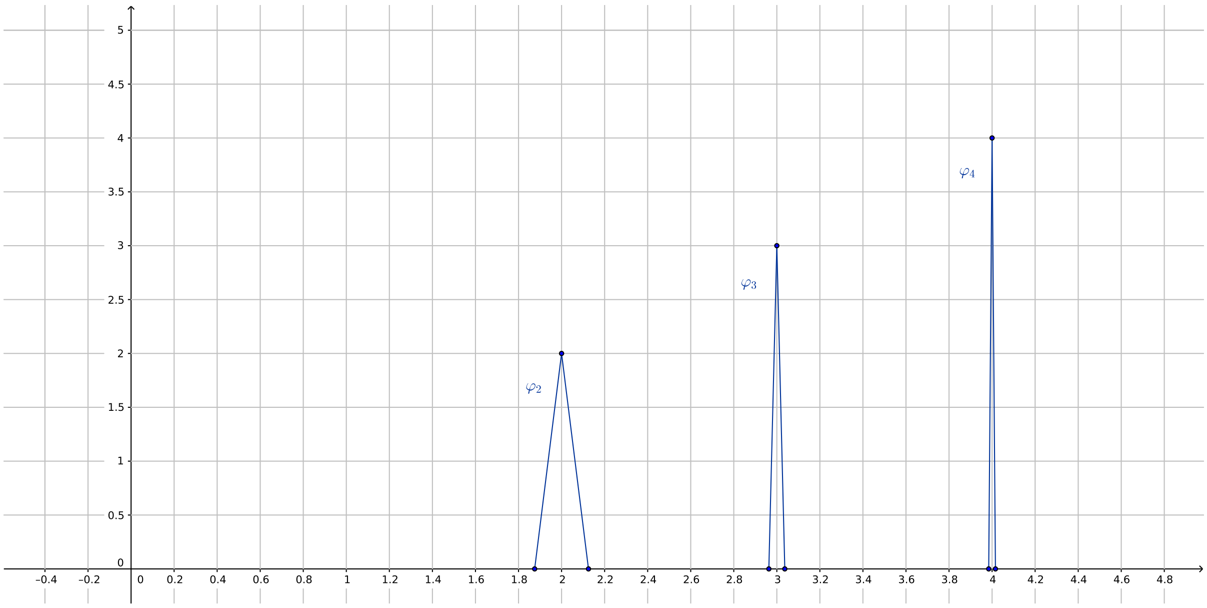
$$\mathcal{L}(f_\omega):x\mapsto\frac{1}{x-i\omega}.$$

   (c) *En prenant les parties réelle et imaginaire de l'intégrale précédente, on obtient :*

$$\mathcal{L}(\cos_\omega)=\mathrm{Re}\left(\mathcal{L}(f_\omega)\right):x\mapsto\frac{x}{x^2+\omega^2},\qquad\mathcal{L}(\sin_\omega)=\mathrm{Im}\left(\mathcal{L}(f_\omega)\right):x\mapsto\frac{\omega}{x^2+\omega^2}.$$

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 13. *1. Graphe de $\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$.*



2. *On a clairement $a_n < b_n$ pour tout $n \geq 2$, et*

$$a_{n+1} - b_n = 1 - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \geq 1 - \frac{2}{n^3} > 0.$$

Donc $a_n < b_n < a_{n+1} < b_{n+1}$ pour tout $n \geq 2$, ce qui prouve que les intervalles $([a_n; b_n])_{n\geq 2}$ sont disjoints deux à deux.

3. *Pour tout $n \geq 2$, la fonction φ_n est la fonction affine par morceaux sur $[a_n; b_n]$ qui vérifie*

$$\varphi_n(a_n) = 0, \qquad \varphi_n(n) = n, \qquad \varphi_n(b_n) = 0.$$

La restriction $f_{[a_n;b_n]} = \varphi_n$ est donc continue.
Les restrictions $f_{[0;a_2[}, f_{]b_n;a_{n+1}[}$ sont aussi continues (car nulles).
Enfin, f possède des limites nulles à gauche et à droite aux points a_n, b_n donc f est continue en ces points.
Finalement, f est continue sur $[0; +\infty[$.

4. *Pour tout entier $n \geq 2$, on a $f(n) = \varphi_n(n) = n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$, ce qui empêche f d'avoir une limite nulle en $+\infty$.*

5. *Pour tout entier $n \geq 2$:*

$$\int_0^{b_n} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n} \int_{a_k}^{b_k} \varphi_k(t)dt$$

(car f est nulle en dehors des segments $[a_k; b_k]$).
Or, pour tout $k \geq 2$, on a $\int_{a_k}^{b_k} \varphi_k(t)dt = \frac{(b_k - a_k)\times k}{2} = \frac{1}{k^2}$ (aire d'un triangle), donc

$$\int_0^{b_n} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Puisque la série $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, ses sommes partielles sont majorées : il existe donc un réel $M > 0$ tel que

$$\forall n \geq 2, \qquad \int_0^{b_n} f(t)dt \leq M,$$

Donc pour tout réel $x \geq 0$:

$$\int_0^{x} f(t)dt \leq \int_0^{n+1} f(t)dt \leq \int_0^{b_{n+1}} f(t)dt \leq M$$

(en notant n la partie entière de x et en utilisant la positivité de f).
La fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est donc majorée sur $\mathbb{R}_+$. Mais elle est aussi croissante (car $f \geq 0$), donc elle possède une limite finie en $+\infty$, ce qui montre que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Corrigé de l'exercice 14. *1. Pour tout $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin(t) \in]0; 1[$, donc $\ln(\sin(t)) < 0$. On a donc $|\ln(\sin(t))| = -\ln(\sin(t))$.*
La fonction $t \mapsto -\ln(\sin(t))$ est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, se prolonge continûment en $\frac{\pi}{2}$ (elle tend vers $-\ln(1) = 0$), donc l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ln(\sin t)|\mathrm{d}t$ est faussement impropre en $\frac{\pi}{2}$. De plus, puisque $\sin(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $-\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t) > 0$. Vu que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln(t)\mathrm{d}t$ converge (c'est un cas de référence), on en déduit par le critère des équivalents que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ln(\sin(t))|\mathrm{d}t$ converge. En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

2. *Pour transformer le $\sin$ en $\cos$, on utilise le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ (qui est une bijection strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0; \frac{\pi}{2}[$ dans $]0; \frac{\pi}{2}[$). On a donc*

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(\frac{\pi}{2}-u))(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t.$$

3. *D'une part, on a d'après la question 2. :*

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\mathrm{d}t = I + I = 2I.$$

D'autre part, par linéarité de l'intégrale impropre, nous avons (car les deux intégrales convergent) :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin t) + \ln(\cos(t)))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \ln(2)\mathrm{d}t.$$

En effectuant le changement de variable $u = 2t$, on obtient $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u$. D'où

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln(2).$$

En égalant les deux expressions, on obtient enfin :

$$2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln(2).$$

4. *On effectue le changement de variable $z = u - \frac{\pi}{2}$ dans l'intégrale $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u$. On obtient, sous réserve de convergence :*

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(z + \frac{\pi}{2}))\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(z))\mathrm{d}z,$$

et on conclut en réutilisant la question 2 : $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(z))\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(z))\mathrm{d}z$, donc

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(z))\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u.$$

5. *On utilise la relation de Chasles :*

$$\int_{]0;\pi[} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u.$$

En utilisant le résultat de la question 4., cela se réécrit :

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u = I + I = 2I.$$

En reportant dans la relation obtenue en 3., on obtient finalement

$$2I = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2} \times 2I,$$

c'est-à-dire $I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

Corrigé de l'exercice 15.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{2/3}}$ *est décroissante sur* $]0; +\infty[$, *donc*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [k; k+1], \qquad \frac{1}{(k+1)^{2/3}} \leq \frac{1}{x^{2/3}} \leq \frac{1}{k^{2/3}}.$$

En intégrant sur $[k; k+1]$ *et sommant pour* $k = 1 \cdots n$, *on obtient :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^{2/3}} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^{2/3}}dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2/3}}.$$

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2/3}}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *L'inégalité précédente se réécrit alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_{n+1} - 1 \leq 3((n+1)^{1/3} - 1) \leq S_n.$$

Ceci donne

$$\begin{cases} \forall n \geq 2, & S_n \leq 1 + 3(n^{1/3} - 1) \\ \forall n \geq 1, & S_n \geq 3((n+1)^{1/3} - 1) \end{cases}.$$

En choisissant $n = 124$ *:*

$$3(125^{1/3} - 1) \leq S_{124} \leq 1 + 3(124^{1/3} - 1) < 1 + 3(125^{1/3} - 1),$$

donc (puisque $125^{1/3} = 5$*) :*

$$12 \leq S_{124} < 13,$$

ce qui montre que $E(S_{124}) = 12$.

Corrigé de l'exercice 16.
Etudions les intégrales $I_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1 + x^4 \sin^2 x}dx$ *pour* $k \in \mathbb{N}^*$.
On a $I_k \leq \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1 + (k\pi)^4 \sin^2 x}dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + (k\pi)^4 \sin^2 y}dy = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + (k\pi)^4 \sin^2 y}dy.$
En minorant $\sin(y)$ *par* $\frac{2}{\pi}y$ *sur* $[0; \frac{\pi}{2}]$, *on obtient alors*

$$I_k \leq 2\int_0^{\pi/2} \frac{dy}{1 + 4\pi^2 k^4 y^2}dy = \frac{1}{k^2\pi}\arctan(k^2\pi^2) \leq \frac{1}{2k^2}.$$

En sommant pour $k = 1 \cdots n$, *on obtient donc*

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + x^4 \sin^2 x}dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2} \leq M.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que la fonction croissante $X \mapsto \int_0^X \frac{1}{1+x^4 \sin^2 x}dx$ *est majorée. Elle admet donc une limite lorsque* $X \to +\infty$, *ce qui montre que l'intégrale est convergente.*

Corrigé de l'exercice 17. 1. *On montre facilement (avec le taux de variation) que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. D'autre part, elle est évidemment dérivable sur $]0;1]$ (par composition de fonctions dérivables), donc f est dérivable sur $[0;1]$.*
La fonction dérivée de $f' : [0;1] \to \mathbb{R}$ est définie par

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos(1/x^2) - \frac{2}{x}\sin(1/x^2) & \text{si } x \in]0;1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Puisque la suite $x_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, mais que $f'(x_n) = 2(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}$ ne possède pas de limite lorsque $n \to +\infty$, on en déduit que la fonction f' ne tend pas vers $f'(0) = 0$ lorsque $x \to 0$ (en fait, elle n'a même pas de limite). Donc f' n'est pas continue sur $[0;1]$, ce qui montre que $f \notin \mathcal{C}^1([0;1];\mathbb{R})$.

2. *Puisque f' est continue sur $]0;1]$ (mais pas sur $[0;1]$), l'intégrale $\int_0^1 f'(t)dt$ est impropre en 0. Pour tout $\varepsilon \in]0;1]$, on a*

$$\int_\varepsilon^1 f'(t)dt = f(1) - f(\varepsilon)$$

(car f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\varepsilon;1]$). En utilisant la continuité de f en 0, on obtient donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 f'(t)dt = f(1) - f(0) = \cos(1),$$

ce qui montre que l'intégrale $\int_0^1 f'(t)dt$ converge et vaut $\cos(1)$.

3. *On sait que l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur $]0;1]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La fonction $g := x \mapsto 2x\cos(1/x^2)$ est intégrable sur $]0;1]$ (car prolongeable continûment en 0, donc $\int_0^1 |2x\cos(1/x^2)|dx$ est faussement impropre).*
On a donc : f' est intégrable si et seulement si $f'-g : x \mapsto -\frac{2}{x}\sin(1/x^2)$ est intégrable. L'intégrale $\int_0^1 |-\frac{2}{x}\sin(1/x^2)|dx$, impropre en 0, est de même nature que celle obtenue par le changement de variable $t = 1/x^2$, c'est-à-dire de même nature que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$. Mais on sait (d'après un exercice précédent), que cette dernière intégrale diverge.
Finalement, $f' - g$ n'est pas intégrable sur $]0;1]$, donc f' non plus.