TD6 : Intégration sur un intervalle quelconque

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1 (Convergence en utilisant les primitives).
Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes et les calculer en cas de convergence :

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \qquad 2) \int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-4t+4}}.$$

Exercice 2 (Exemple «à la Riemann»).
Soient $a < b$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Quelle est sa valeur dans ce cas ?

Exercice 3 (Convergence et calcul d'une intégrale impropre).
On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\arctan(t)}{t^2}$.

1. Déterminer les plus grands intervalles sur lesquels f est continue.
2. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$.
   On pourra faire une intégration par parties sur le segment $[1;x]$ *avec* $x > 1$.
3. Déterminer trois réels a, b, c tels que
$$\forall t \geq 1, \qquad \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$
4. En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
5. Pouvait-on prévoir dès le début que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge ?
6. Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
7. Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 4 (Divergence en cas de limite non nulle à l'infini).
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;+\infty[,\mathbb{R})$. Montrer que si f possède une limite non nulle en $+\infty$, alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 5 (Etude de la convergence par les différents critères).
Quelle est la nature des intégrales impropres suivantes ?

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad 2) \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t \qquad 3) \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin t}}$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t \qquad 5) \int_0^1 \frac{e^t+e^{-t}-2\cos t}{t^{5/2}}\mathrm{d}t \quad 6) \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

Exercice 6 (Convergence par décroissance exponentielle).
Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes, et les calculer en cas de convergence :

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\mathrm{d}t, \qquad 2) \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Exercice 7 (Convergence et calcul).
Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes, et les calculer en cas de convergence :

$$1) \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+t^{3/2}}, \qquad 2) \int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(2-x)}} \quad (\text{poser } x = 2\sin^2 t).$$

Exercice 8 (Fonction Gamma).
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale $\Gamma(x)$ converge si et seulement si $x > 0$.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 (Convergence des séries de Bertrand).
Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. Discuter, suivant la valeur de β, la nature de la série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$.
On pourra utiliser une comparaison série-intégrale.

Exercice 10 (Estimation du reste d'une série).
Soit $f \in C^0([1,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction positive, décroissante, telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge. On notera $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ le reste d'ordre n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$.
3. Application : calculer $S := \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ à 10^{-2} près.

Exercice 11 (Non intégrabilité de $\sin(x)/x$).

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ est convergente. *On pourra intégrer par parties.*
2. Montrer que $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0;+\infty[$.
   On pourra minorer les intégrales $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx$ ($n \in \mathbb{N}$) par le terme général d'une série divergente et sommer.

Exercice 12 (Transformée de Laplace).
On note E l'ensemble des fonctions $f :]0;+\infty[\to \mathbb{C}$ continues et telles que :

- Pour tout réel $a > 0$, f est intégrable sur $]0;a]$.
- A chaque fonction $f \in E$, on peut associer $A, \beta \in]0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall x \geq A$, $|f(x)| \leq \beta x^n$.

1. Montrer que $\ln \in E$.
2. Montrer que l'ensemble E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

On fixe un réel $x > 0$.

3. Montrer que si $f \in E$, alors la fonction $\varphi_x :]0;+\infty[\to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_x(t) = f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

On définit alors et on note $\mathcal{L}(f)$ la **transformée de Laplace** de f :

$$\boxed{\forall f \in E, \quad \forall x > 0, \qquad \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t.}$$

4. Montrer que l'application $\mathcal{L}$ définie sur E est une application linéaire.
5. Si $f \in \mathcal{C}^1([0;+\infty[,\mathbb{C})$ et si $f, f' \in E$, calculer $\mathcal{L}(f')$ en fonction de $\mathcal{L}(f)$ et de $f(0)$.
6. Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_k :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_k(t) = t^k$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k \in E$.
   (b) Déterminer une relation de récurrence entre $\mathcal{L}(f_{k+1})$ et $\mathcal{L}(f_k)$.
   On pourra faire une intégration par parties soigneusement.
   (c) En déduire $\mathcal{L}(f_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
7. Soit ω un réel et soit $f_\omega :]0;+\infty[\to \mathbb{C}$ l'application définie par $f_\omega(t) = e^{i\omega t}$.
   (a) Montrer que $f_\omega \in E$.
   (b) Calculer $\mathcal{L}(f_\omega)$.
   (c) En déduire les transformées de Laplace des fonctions $\cos_\omega : t \mapsto \cos(\omega t)$ et $\sin_\omega : t \mapsto \sin(\omega t)$.

II Exercices supplémentaires

Exercice 13 (*Fonction qui ne tend pas vers 0 et d'intégrale impropre convergente).
Pour $n \geq 2$, on pose $a_n = n - \dfrac{1}{n^3}$ et $b_n = n + \dfrac{1}{n^3}$. On considère alors l'application $\varphi_n : [a_n; b_n] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n^4x - n^5 + n & \text{si } x \in [a_n; n[\\ -n^4x + n^5 + n & \text{si } x \in [n; b_n] \end{cases}.$$

1. Dessiner le graphe de $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.
2. Montrer que les intervalles $([a_n; b_n])_{n\geq 2}$ sont disjoints deux à deux.

On définit une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ en recollant les graphes des $(\varphi_n)_{n\geq 2}$ et en prolongeant par 0 :

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) & \text{si } x \in [a_n; b_n] \\ 0 & \text{si } x \notin \displaystyle\bigcup_{n\geq 2} [a_n; b_n] \end{cases}.$$

3. Montrer que f est continue.
4. Montrer que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
5. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Exercice 14 (Calcul en utilisant les symétries).

1. Justifier que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente. On note I sa valeur.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\mathrm{d}t$.
   On pourra utiliser un changement de variable.
3. En déduire que $2I = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\mathrm{d}u$.
   On pourra exprimer la somme $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\mathrm{d}t$ *de deux manières différentes.*
4. Justifier que $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\mathrm{d}u$.

5. Calculer enfin la valeur de I, en utilisant les questions 3. et 4.

Exercice 15 (Calcul d'une partie entière).
Calculer la partie entière de $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{124} \frac{1}{k^{2/3}}$.
Indication : on pourra utiliser une comparaison série-intégrale.

Exercice 16 (*).
Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4\sin^2 x}dx$?

Exercice 17 (*).
Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(1/x^2) & \text{si } x \in]0;1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0;1]$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
2. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t$ converge, et la calculer.
3. Montrer que f' n'est pas intégrable sur $]0;1]$.