Corrigé du TD5 : Intégration sur un segment

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1. Le plus simple est de développer, il n'y a que trois termes :*

$$f(x) = 4x^{12} + 12x^{11} + 9x^{10},$$

donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F de la forme

$$F(x) = \frac{4x^{13}}{13} + x^{12} + \frac{9x^{11}}{11} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2. On reconnaît une dérivée composée :

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{1}{2}u'(x)u(x)^{-2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)^{-1}}{-2}\right),$$

avec $u(x) = x^2+1$ (qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$). Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F de la forme

$$F(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

3. Idem, on utilise la formule $\frac{u'(x)}{u(x)^4} = u'(x)u(x)^{-4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)^{-3}}{-3}\right)$, avec $u(x) = 3 + \cos(x)$ (qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, garantissant ainsi que $x \mapsto \frac{\sin x}{(3+\cos x)^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$). Donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F de la forme

$$F(x) = \frac{1}{3(3+\cos x)^3} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

4. Les primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-\infty; 0[$ sont les fonctions F de la forme

$$F(x) = \ln(-x) + C = \ln|x| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

En effet : $\forall x < 0,\ f(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = -x$ (qui est strictement positive sur l'intervalle $I =]-\infty; 0[$).

5. On remarque que $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[,\ f(x) = \frac{1/x}{\ln(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$.

- *sur $I =]1; +\infty[$, on a $u > 0$, donc les primitives de f sur I sont les fonctions F de la forme*

$$F(x) = \ln(u(x)) + C = \ln(\ln(x)) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

- *sur $J =]0; 1[$, on a $u < 0$, donc les primitives de f sur J sont les fonctions F de la forme*

$$F(x) = \ln(|u(x)|) + C = \ln(-\ln(x)) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

6. Encore une dérivée composée :

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[4]{(x^3+1)^7}} = \frac{1}{3} \times 3x^2(x^3+1)^{-7/4} = \frac{1}{3} \times u'(x)u(x)^{-7/4},$$

avec $u(x) = x^3 + 1 > 0$.
Les primitives de f sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions F de la forme

$$F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{-4}{3}u(x)^{-3/4} + C = \frac{-4}{9(x^3+1)^{3/4}} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

7. Les primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{2+x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

8. *Attention, l'expression $f(x) = \frac{x}{(2x+3)^4}$ n'est pas directement une dérivée composée ! On la réécrit sous la forme :*

$$f(x) = \frac{x + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}}{(2x+3)^4} = \frac{1}{2} \times \frac{2x+3}{(2x+3)^4} - \frac{\frac{3}{2}}{(2x+3)^4} = \frac{1}{2}(2x+3)^{-3} - \frac{3}{2}(2x+3)^{-4}.$$

On en déduit que les primitives de f sur $I =]-\frac{3}{2}, +\infty[$ sont les fonctions F de la forme

$$F(x) = \frac{-1}{8}(2x+3)^{-2} + \frac{1}{4}(2x+3)^{-3} + C = -\frac{2x+1}{8(2x+3)^3} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

9. *On a $f(x) = Re(e^{i\alpha x})e^{\beta x} = Re(e^{(\beta+i\alpha)x})$, donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F de la forme*

$$F(x) = Re\left(\frac{e^{(\beta+i\alpha)x}}{\beta+i\alpha}\right) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Vu que $\dfrac{e^{(\beta+i\alpha)x}}{\beta+i\alpha} = e^{\beta x}\dfrac{e^{i\alpha x}}{\beta+i\alpha} = \dfrac{e^{\beta x}}{\alpha^2+\beta^2}(\cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x))(\beta - i\alpha)$, *on a*

$$F(x) = \frac{e^{\beta x}}{\alpha^2+\beta^2}(\beta\cos(\alpha x) + \alpha\sin(\alpha x)) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 2. 1. *Pour tous réels a et b, on a*

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}, \qquad \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} = \frac{(a-b)t + (a+b)}{1-t^2},$$

donc l'égalité voulue a lieu si et seulement si (en identifiant les numérateurs, qui sont des polynômes en t) :

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases},$$

c'est-à-dire $a = b = \dfrac{1}{2}$. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}, \qquad \frac{1}{1-t^2} = \frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t}.$$

2. *On intègre l'égalité précédente sur le segment d'extrémités 0 et x (on peut avec $x \in]-1;1[$ car $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ est continue sur $]-1;1[$) :*

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\int_0^x \frac{dt}{1-t} + \int_0^x \frac{dt}{1+t}\right).$$

Or, vu que les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sont strictement positives sur $]-1;1[$, on a

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left([-\ln(1-t) + \ln(1+t)]_0^x\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

3. *Si $x > 2$, alors on peut encore intégrer la décomposition en éléments simples sur le segment $[2;x]$, car $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ y est continue. On obtient :*

$$\forall x > 2, \qquad \int_2^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\int_2^x \frac{dt}{1-t} + \int_2^x \frac{dt}{1+t}\right).$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est strictement positive sur $]2,+\infty[$, donc

$$\int_2^x \frac{1}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_2^x = \ln(x+1) - \ln(3).$$

Mais cette fois-ci, on a $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ qui est strictement négative sur $]2,+\infty[$, donc

$$\int_2^x \frac{1}{1-t}dt = [-\ln(|1-t|)]_2^x = -\ln(x-1).$$

Finalement :

$$\forall x > 2, \qquad \int_2^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{\ln(3)}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 3.

1. *On trouve (en réduisant au même dénonimateur et en identifiant les coefficients) :*
$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x}.$$
2. *Donc les primitives de f les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$ sont les fonctions*
$$F(x) = -\frac{2}{x-1} + \ln(|x|) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 4.

1. *Faire une intégration par parties, en dérivant le polynôme. On obtient*
$$\forall (a,x) \in I^2, \quad \int_a^x f(t)dt = [3\sin(t) - (3t+1)\cos(t)]_a^x,$$
donc les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme :
$$F(x) = 3\sin(x) - (3x+1)\cos(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$
2. *Idem (mais trois intégrations par parties). On obtient*
$$F(x) = \frac{1}{8}(12x^3 - 18x^2 + 18x - 5)e^{2x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$
3. *Faire une intégration par parties, en dérivant $x \mapsto \ln(x)$. On obtient*
$$F(x) = \left(\frac{7}{2}x^2 - 3x\right)\ln(x) - \frac{7}{4}x^2 + 3x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$
4. *Faire une intégration par parties, en dérivant $x \mapsto \arctan(x)$, et en primitivant $x \mapsto 1$. On obtient*
$$F(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 5.

1. *Les fonctions $x \mapsto \sin^3(x)$ et $x \mapsto 2+\cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, et le dénominateur $2+\cos(x)$ ne s'annule pas, puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $2+\cos(x) \geq 2-1 = 1$, donc le quotient $x \mapsto f(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *La fonction $\varphi : t \mapsto \cos(t)$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a*
$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{\sin^3(t)}{2+\cos(t)}dt = \int_0^x \frac{-\sin^2(t)}{2+\cos(t)} \times (-\sin(t)dt) = \int_0^x \frac{\cos^2(t)-1}{\cos(t)+2} \times \underbrace{(-\sin(t)dt)}_{\varphi'(t)dt}.$$
Donc, en posant $u = \cos(t)$, on a "$du = -\sin(t)dt$", donc d'après la formule de changement de variable :
$$\int_0^x f(t)dt = \int_{\cos(0)}^{\cos(x)} \frac{u^2-1}{u+2}du = \int_1^{\cos(x)} \frac{u^2-1}{u+2}du,$$
d'où le résultat en posant $g : u \mapsto \frac{u^2-1}{u+2}$, $a = 1$ et $b = \cos(x)$.
3. *En effectuant l'algorithme de division euclidienne étudié en première année, on obtient*
$$\begin{array}{rrr|l} X^2 & & -1 & X+2 \\ \cline{4-4} X^2 & +2X & & X-2 \\ \hline & -2X & -1 & \\ & -2X & -4 & \\ \hline & & 3 & \end{array},$$
donc $X^2 - 1 = (X+2)(X-2) + 3$.

4. On déduit de la question précédente que

$$\int_a^b g(u)du = \int_1^{\cos(x)} \frac{(u+2)(u-2)+3}{u+2}du = \int_1^{\cos(x)} \left(u-2+\frac{3}{u+2}\right)du,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b g(u)du = \left[\frac{u^2}{2} - 2u + 3\ln|u+2|\right]_1^{\cos(x)} = \frac{\cos^2(x)}{2} - 2\cos(x) + 3\ln(2+\cos(x)) + \frac{3}{2} - 3\ln(3).$$

D'après la question 2., on obtient finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x f(t)dt = \frac{\cos^2(x)}{2} - 2\cos(x) + 3\ln(2+\cos(x)) + \frac{3}{2} - 3\ln(3).$$

5. La fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (c'est celle qui s'annule en 0). On en déduit que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{\cos^2(x)}{2} - 2\cos(x) + 3\ln(2+\cos(x)) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 6. *1. On a $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}$, et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.*

2. Pour calculer I_2, on linéarise : $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, donc

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

3. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et réécrivons I_{n+2} :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\sin(x)dx.$$

Effectuons alors une intégration par parties en posant :

$$u(x) = \sin^{n+1}(x), \qquad v(x) = \int \sin(x)dx = -\cos(x).$$

On obtient

$$I_{n+2} = \left[-\sin^{n+1}(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin^n(x)\cos^2(x)dx,$$

ou encore

$$I_{n+2} = 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)(1-\sin^2(x))dx = (n+1)(I_n - I_{n+2}).$$

On a donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. — La propriété annoncée est vraie pour $p = 0$ car

$$I_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}(0!)^2}\frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = 1 = \frac{2^{2\times 0}(0!)^2}{(2\times 0+1)!}.$$

— Fixons $p \in \mathbb{N}$, et supposons que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} \\ \\ I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}.$$

D'après la relation obtenue à la question 3., on a alors

$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+1)!}{2(p+1)2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $2(p+1)$*, on obtient :*

$$I_{2p+2} = \frac{(2p+2)!}{2^2(p+1)^2 2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

De même,

$$I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} = \frac{2p+2}{2p+3} \times \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $2(p+1)$*, on obtient :*

$$I_{2p+3} = \frac{2^2(p+1)^2}{(2p+3)(2p+2)} \times \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p+2}((p+1)!)^2}{(2p+3)!}.$$

Finalement, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} I_{2(p+1)} = \dfrac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}\dfrac{\pi}{2} \\ \\ I_{2(p+1)+1} = \dfrac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!} \end{cases},$$

ce qui montre que la propriété annoncée est héréditaire.

— *On en conclut que la propriété est vraie pour tout* $p \in \mathbb{N}$.

5. *Dans* J_n*, il suffit de faire le changement de variable* $u = \frac{\pi}{2} - x$*. On a "*$du = -dx$*", donc*

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u)du = I_n.$$

Corrigé de l'exercice 7. 1. *Rappelons que* $2^{3x+1} = e^{(3x+1)\ln(2)}$*, donc*

$$I = \left[\frac{1}{3\ln(2)} e^{(3x+1)\ln(2)}\right]_{-1/3}^0 = \frac{1}{3\ln(2)}(2-1) = \frac{1}{3\ln(2)}.$$

2. *On linéarise* $\sin^3$ *:*

$$\sin^3(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{-8i}(e^{i3t} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-i3t}) = \frac{i}{8}(2i\sin(3t) - 6i\sin(t)) = \frac{1}{4}(3\sin(t) - \sin(3t)).$$

On a alors

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin(t) - \sin(3t))dt = \frac{1}{4}\left[-3\cos(t) + \frac{1}{3}\cos(3t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

3. *Puisque* $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$ *est la dérivée de* $x \mapsto \tan(x)$*, une intégration par parties donne*

$$I = [x\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \frac{\pi}{4} + [\ln|\cos(x)|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

4. *On fait une intégration par parties en dérivant* $x \mapsto \arcsin(x)$ *et en primitivant* $x \mapsto 1$ *:*

$$I = [x\arcsin(x)]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1/2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

5. *La fonction* $t \mapsto tE(t^2)$ *est continue par morceaux, et la subdivision* $(0;1;\sqrt{2};\sqrt{3};2)$ *lui est adaptée. En outre,*

$$tE(t^2) = \begin{cases} 0 & si\ 0 < t < 1 \\ t & si\ 1 < t < \sqrt{2} \\ 2t & si\ \sqrt{2} < t < \sqrt{3} \\ 3t & si\ \sqrt{3} < t < 2 \end{cases},$$

donc avec la relation de Chasles :

$$I = \int_0^1 0dt + \int_1^{\sqrt{2}} tdt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2tdt + \int_{\sqrt{3}}^2 3tdt = 0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3.$$

6. *Signalons d'abord que* $t \mapsto \dfrac{1}{1+2\cos^2(t)}$ *est bien continue sur* $[0;\frac{\pi}{4}]$*, puisque son dénominateur ne s'annule pas (il est strictement positif). En posant* $u = \tan(t)$*, on a "*$du = (1+\tan^2(t))dt$*", c'est-à-dire "*$dt = \frac{du}{1+u^2}$*". En outre, en utilisant la formule* $1+\tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$*, on obtient*

$$\frac{1}{1+2\cos^2(t)} = \frac{1}{1+2\frac{1}{1+\tan^2(t)}} = \frac{1}{1+2\frac{1}{1+u^2}} = \frac{1+u^2}{3+u^2}.$$

La formule de changement de variable donne alors

$$I = \int_0^1 \frac{du}{3+u^2} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{du}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

7. *En posant* $t = \tan(u)$*, on a "*$dt = (1+\tan^2(u))du$*", donc d'après la formule de changement de variable*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2(u))du}{(1+\tan^2(u))^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\sqrt{1+\tan^2(u)}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^2(u)}du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos(u)|du.$$

Puisque $\cos$ *est positive sur* $[0;\frac{\pi}{4}]$*, on a*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(u)du = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

8. *La fonction* $f : t \mapsto \sin^3(2t)$ *est* 2π*-périodique, donc son intégrale est la même sur n'importe quel segment de largeur* 2π*. D'où*

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt.$$

Mais f *est également impaire, donc*

$$I = 0.$$

9. *On utilise la relation de Chasles :*

$$I = \int_0^{\pi} |\cos(x)|dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\cos(x)|dx.$$

Vu que la fonction $x \mapsto |\cos(x)|$ *est* π*-périodique, on a*

$$\int_{\pi}^{2\pi} |\cos(x)|dx = \int_0^{\pi} |\cos(x)|dx,$$

donc

$$I = 2\int_0^{\pi} |\cos(x)|dx.$$

En utilisant encore la relation de Chasles :

$$I = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(x)|dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos(x)|dx\right) = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)dx\right) = 4.$$

10. *La fonction* $x \mapsto \max\left(2x+4; \frac{4-2x}{3}\right)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *(comme le maximum de deux fonctions continues). On a* $2x+4 \geq \frac{4-2x}{3} \iff x \geq -1$*, donc*

$$\max\left(2x+4; \frac{4-2x}{3}\right) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{4-2x}{3} & \text{si } x < -1 \end{cases}.$$

On en déduit avec la relation de Chasles :

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{4-2x}{3} dx + \int_{-1}^{2} (2x+4) dx = \left[\frac{4x-x^2}{3}\right]_{-2}^{-1} + \left[x^2+4x\right]_{-1}^{2} = \frac{52}{3}.$$

Corrigé de l'exercice 8. *1. La fonction* φ *étant continue sur* $]-1;1[$ *(le dénominateur ne s'annule pas), elle possède des primitives sur cet intervalle. Calculons la primitive nulle en* 0 *(par exemple) : en posant* $u = x^2-1$*, on a "*$du = 2xdx$*", donc pour tout* $X \in]-1;1[$ *:*

$$\int_0^X \varphi(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^X \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} 2xdx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{X^2-1} \frac{u+2}{u^2} du = \int_{-1}^{X^2-1} \frac{du}{2u} + \int_{-1}^{X^2-1} \frac{du}{u^2},$$

c'est-à-dire

$$\int_0^X \varphi(x)dx = \left[\frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{u}\right]_{-1}^{X^2-1} = \frac{1}{2}\ln|X^2-1| - \frac{1}{X^2-1} - 1.$$

On en déduit que les primitives de φ *sur* $]-1;1[$ *sont les fonctions*

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x^2-1| - \frac{1}{x^2-1} + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \frac{1}{1-x^2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2. *Sur l'intervalle* $]-1;1[$*, l'équation différentielle* (E) *se réécrit*

$$y' + \frac{2x}{1-x^2} y = \frac{x^3+x}{1-x^2}.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

— *Les solutions de l'équation homogène* $(H) : y' + \frac{2x}{1-x^2}y = 0$ *sont*

$$x \mapsto Ce^{-\int \frac{2x}{1-x^2}dx} = Ce^{\ln|1-x^2|} = C(1-x^2), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

— *Appliquons ensuite la méthode de variation de la constante, en cherchant une solution particulière de* (E) *sous la forme* $x \mapsto C(x) \times (1-x^2)$*, où* C *est une fonction dérivable sur* $]-1;1[$*. Une telle fonction est solution de* (E) *si et seulement si*

$$C'(x)(1-x^2) - 2xC(x) + 2xC(x) = \frac{x^3+x}{1-x^2},$$

c'est-à-dire

$$C'(x) = \varphi(x).$$

D'après la question précécente, $C(x) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \frac{1}{1-x^2}$ *convient, donc la fonction*

$$y_p : x \mapsto \frac{1}{2}(1-x^2)\ln(1-x^2) + 1$$

est une solution de (E) *sur* $]-1;1[$*.*

— *Finalement, les solutions de* (E) *sur* $]-1;1[$ *sont les fonctions*

$$y : x \mapsto C(1-x^2) + \frac{1}{2}(1-x^2)\ln(1-x^2) + 1, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 9. *1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n} x \, dx + \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2} x \, dx = \int_0^{\pi/4} \left(\tan^{2n} x\right)\left(1+\tan^2 x\right) \, dx.$$

On reconnaît une dérivée composée :

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{2n+1}(x)\right) = (2n+1)\left(\tan^{2n} x\right)\tan'(x) = (2n+1)\left(\tan^{2n} x\right)\left(1+\tan^2 x\right).$$

d'où

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^{\pi/4} \frac{d}{dx}\left(\frac{\tan^{2n+1} x}{2n+1}\right) \, dx = \left[\frac{\tan^{2n+1} x}{2n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2n+1}.$$

2. — *Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a $0 \le \tan(x) \le 1$, donc la suite $(\tan(x)^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}], \qquad \tan^{2(n+1)} x \le \tan^{2n} x.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} \le I_n,$$

d'où la décroissance annoncée.

— *On utilise la formule établie à la question précédente, et la décroissance de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour établir un encadrement. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$2I_{n+1} \le I_n + I_{n+1} \le 2I_n,$$

c'est-à-dire

$$I_{n+1} \le \frac{1}{2(2n+1)} \le I_n.$$

Donc, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{2(2n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2(2n-1)}.$$

Les deux suites qui apparaissent dans cet encadrement sont équivalentes à $\frac{1}{4n}$ lorsque $n \to +\infty$, donc I_n également.

3. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{1}{2k+1} = I_k + I_{k+1}$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(I_k + I_{k+1}\right) = (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + \cdots + (-1)^n \left(I_n + I_{n+1}\right),$$

et ceci se simplifie (par téléscopage) en

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 + (-1)^{n+1} I_{n+1}.$$

Puisque $I_n \sim \frac{1}{4n}$, on a $I_n \to 0$, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} I_{n+1} = 0,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Corrigé de l'exercice 10. *1. Posons $S_n = \dfrac{1}{n^{3/2}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

en posant $f : x \mapsto \sqrt{x}$ (qui est bien continue sur $[0;1]$).
On reconnaît là une somme de Riemann : $\left(\frac{k}{n}\right)_{0\leq k\leq n}$ est une subdivision régulière du segment $[a;b]=[0;1]$, de pas $\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$. D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a alors

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)dx,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

2. *On procède de façon identique, en posant $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a*

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right),$$

en posant $g : x \mapsto \dfrac{1+x}{1+x^2}$ (qui est bien continue sur $[0;1]$).
Toujours d'après le même théorème, on a

$$T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 g(x)dx,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}\right)dx = \left[\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(2).$$

3. *Plus difficile : on transforme d'abord le produit $P_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)}$ en somme :*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad \ln(P_n) = \ln\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)\right) = -\ln(n^2)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n^2+k^2).$$

En réécrivant alors $\ln(n^2+k^2) = \ln(n^2)+\ln\left(1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right)$, on obtient :

$$\ln(P_n) = \underbrace{-\ln(n^2)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n^2)}_{=0}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h\left(\frac{k}{n}\right),$$

en posant $h : x\mapsto \ln(1+x^2)$ (fonction continue sur $[0;1]$). C'est encore une somme de Riemann associée à la subdivision $\left(0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1\right)$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(P_n) = \int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx.$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue une intégration par parties, en primitivant $x\mapsto 1$, et en dérivant $x\mapsto\ln(1+x^2)$:

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx = \ln(2)-2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

Mais $\dfrac{x^2}{1+x^2} = 1-\dfrac{1}{1+x^2}$, donc

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \ln(2)-2\left[x-\arctan(x)\right]_0^1 = \ln(2)-2+\frac{\pi}{2}.$$

Finalement, $\lim_{n\to+\infty} \ln(P_n) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$*, donc par continuité de la fonction exponentielle :*

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \exp\left(\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}.$$

4. *Enfin, en posant* $W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3+k^3}}$*, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad W_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right),$$

en posant $\varphi : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ *(également continue sur* $[0;1]$*).*
Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \varphi(x)dx$*, on en déduit (sans avoir besoin de calculer cette intégrale difficile !) que*

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$$

(à cause du facteur $\frac{1}{\sqrt{n}}$*).*

Corrigé de l'exercice 11.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*,*

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)dx\right| \le \int_0^1 x^n |f(x)|dx.$$

La fonction f *est continue sur le segment* $[0,1]$*, donc elle est bornée :*

$$\exists M > 0, \quad \forall x \in [0,1], \qquad |f(x)| \le M.$$

D'où la majoration :

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)dx\right| \le \int_0^1 x^n M dx = M\int_0^1 x^n dx = M\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1},$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0.$$

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 12. 1. *Par le théorème fondamental de l'analyse (qui s'applique car* arctan *est continue sur* $\mathbb{R}$*), la fonction* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et c'est une primitive de* arctan*. On a donc* $F' = \arctan$.

2. *La fonction* H *s'exprime en fonction de* F *: en effet, puisque* F *est une primitive de* arctan *sur* $\mathbb{R}$*, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H(x) = F(x^4) - F(-2x).$$

3. *Les fonctions* $x \mapsto F(x)$, $x \mapsto x^4$ *et* $x \mapsto -2x$ *étant dérivables sur* $\mathbb{R}$*, on en déduit par composition et somme que* H *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*. En outre, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H'(x) = F'(x^4) \times 4x^3 - F'(-2x) \times (-2) = 4x^3 \arctan(x^4) + 2\arctan(-2x).$$

La fonction arctan *étant impaire, ceci se réécrit*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H'(x) = 4x^3 \arctan(x^4) - 2\arctan(2x).$$

4. *Vu que* arctan *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*, on en déduit que* F' *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$*, donc* F *aussi. Par composition et somme, on déduit de la relation entre* F *et* H *que* H *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

Corrigé de l'exercice 13.
On remarque que $I + J = \int_0^{\pi/2} 1dt = \frac{\pi}{2}$*. En outre, en faisant le changement de variable* $u = \frac{\pi}{2} - t$ *dans l'intégrale* J*, on obtient* $J = I$*. Ceci conduit à* $I = J = \frac{\pi}{4}$*.*

Corrigé de l'exercice 14.

1. *Vu que le polynôme* X^2+X+1 *n'a pas de racine réelle (discriminant négatif), on en déduit que la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^2+t+1}$ *est bien définie et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*, donc a fortiori continue sur tout segment. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, l'intégrale* $f(x)$ *a donc bien un sens, donc la fonction* f *est définie sur* $\mathbb{R}$*.*
   En outre, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction f *est une primitive de* $t \mapsto \frac{1}{t^2+t+1}$ *sur* $\mathbb{R}$*, elle est donc de classe* $\mathcal{C}^\infty$*.*
2. *Il suffit de calculer le* $DL_4(0)$ *de la dérivée* f' *:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(x+x^2)} = 1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+(x+x^2)^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ &= 1-(x+x^2)+(x^2+2x^3+x^4)-(x^3+3x^4)+x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ &= 1-x+x^3-x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4). \end{aligned}$$

On en déduit par le théorème d'intégration terme à terme d'un DL :

$$f(x) = f(0)+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5+\underset{x\to 0}{o}(x^5).$$

Puisque $f(0) = \int_0^0 \frac{dt}{1+t+t^2}$*, on a* $f(0) = 0$*, et donc*

$$f(x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5+\underset{x\to 0}{o}(x^5).$$

3. *Puisque* $t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$*, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int_0^x \frac{dt}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Corrigé de l'exercice 15.
La technique consiste à écrire le polynôme $(x-a)(b-x)$ *sous forme canonique :*

$$(x-a)(b-x) = -x^2+(a+b)x-ab = -\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

et à effectuer le changement de variable $y = x-\frac{a+b}{2}$*, qui donne*

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-y^2}\ dy.$$

Par parité, on a

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = 2\int_0^{\frac{b-a}{2}} \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-y^2}\ dy = (b-a)\int_0^{\frac{b-a}{2}} \sqrt{1-\left(\frac{2y}{b-a}\right)^2}dy.$$

On effectue maintenant le changement de variable $z = \frac{2y}{b-a}$*, qui donne*

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 \sqrt{1-z^2}\ dz.$$

Enfin, le changement de variable $z = \sin\theta$ permet de calculer cette dernière intégrale :

$$\int_0^1 \sqrt{1-z^2}\ dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)d\theta.$$

En linéarisant :

$$\int_0^1 \sqrt{1-z^2}\ dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta = \frac{\pi}{4},$$

donc finalement, on a bien

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \frac{(b-a)^2}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}(b-a)^2.$$

Corrigé de l'exercice 16. *1. En intégrant par parties (ce qui est possible car f est de classe $\mathcal{C}^1$), nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt = \left[\frac{e^{int}}{in}f(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{e^{int}}{in}f'(t)dt = \left[\frac{e^{inb}f(b) - e^{ina}f(a)}{in}\right] - \frac{1}{in}\int_a^b e^{int}f'(t)dt,$$

donc, en majorant en module, on obtient

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| &\leq \frac{1}{n}\left|e^{inb}f(b) - e^{ina}f(a)\right| + \frac{1}{n}\left|\int_a^b f'(t)e^{int}dt\right| \\ &\leq \frac{1}{n}\left(|e^{inb}f(b)| + |e^{ina}f(a)|\right) + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)||e^{int}|dt \\ &= \frac{1}{n}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|dt\right) = \frac{C}{n}, \end{aligned}$$

où $C := |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|dt$ est une constante indépendante de n. Puisque $\frac{C}{n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, on en déduit par le principe de majoration que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0.$$

2. — Si $f = c \in \mathbb{C}$, alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt = c\int_a^b e^{int}dt = c\left[\frac{e^{int}}{in}\right]_a^b = \frac{c}{in}\left(e^{inb} - e^{ina}\right),$$

et donc

$$\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| \leq \frac{|c|}{n}\left|e^{inb} - e^{ina}\right| \leq \frac{|c|}{n}\left(|e^{inb}| + |e^{ina}|\right),$$

c'est-à-dire

$$\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| \leq \frac{2|c|}{n}.$$

Vu que $\frac{2|c|}{n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ on en déduit que

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

— Si $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$, alors il existe une subdivision $(x_k)_{0\leq k\leq K}$ de l'intervalle $[a,b]$ et des complexes $(c_0,\ldots,c_{K-1}) \in \mathbb{C}^K$ tels que

$$\forall k \in \{0,\ldots,K-1\}, \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[, \qquad f(x) = c_k.$$

D'où

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt = \sum_{k=0}^{K-1} c_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{int}dt.$$

D'après le point précédent, chacune des intégrales $\int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{int}dt$ *tend vers* 0 *lorsque* $n \to +\infty$*, donc la somme finie tend également vers* 0 *(car le nombre d'intégrales,* K*, ne dépend pas de* n*), ce qui montre le résultat voulu.*

3. *Si* $f \in \mathcal{CM}([a;b],\mathbb{R})$*, montrons que* $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0$.
Fixons $\varepsilon > 0$*. Il existe deux fonctions en escalier* $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R})$ *telles que*

$$\varphi \leq f \leq \psi, \qquad 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

On sait par la question précédente que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi(t)e^{int}dt = 0$*. Montrons que les intégrales* $\int_a^b f(t)e^{int}dt$ *et* $\int_a^b \varphi(t)dt$ *ont des valeurs proches :*

$$\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt - \int_a^b \varphi(t)e^{int}dt\right| \leq \int_a^b \left|(f(t)-\varphi(t))e^{int}\right| \leq \int_a^b |f(t)-\varphi(t)|dt.$$

Or, pour tout $t \in [a;b]$*, on a* $0 \leq f(t) - \varphi(t) \leq \psi(t) - \varphi(t) \leq \varepsilon$*, donc*

$$\forall t \in [a;b], \qquad |f(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon.$$

On en déduit la majoration

$$\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt - \int_a^b \varphi(t)e^{int}dt\right| \leq \int_a^b \varepsilon dt = \varepsilon(b-a).$$

On peut alors conclure (par l'inégalité triangulaire) que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| &\leq \left|\int_a^b \varphi(t)e^{int}dt\right| + \left|\int_a^b f(t)e^{int}dt - \int_a^b \varphi(t)e^{int}dt\right| \\ &\leq \left|\int_a^b \varphi(t)e^{int}dt\right| + (b-a)\varepsilon.\end{aligned}$$

Puisque $\left|\int_a^b \varphi(t)e^{int}dt\right|$ *tend vers* 0 *lorsque* $n \to +\infty$*, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n_0 \implies \left|\int_a^b \varphi(t)e^{int}dt\right| \leq \varepsilon \implies \left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| \leq \varepsilon + (b-a)\varepsilon.$$

Le réel $\varepsilon > 0$ *étant quelconque, on aurait pu le remplacer par* $\frac{\varepsilon}{1+b-a}$ *dans le raisonnement précédent, ce qui montre que*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \implies \left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0$.

4. *Enfin, si* $f \in \mathcal{CM}([a;b],\mathbb{C})$*, alors en notant* $f_1 = Re(f)$ *et* $f_2 = Im(f)$*, on a* $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a;b],\mathbb{R})$*, et par linéarité de l'intégrale des fonctions à valeurs complexes :*

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt = \int_a^b f_1(t)e^{int}dt + i\int_a^b f_2(t)e^{int}dt.$$

Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_1(t)e^{int}dt = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_2(t)e^{int}dt = 0$, *donc* $\int_a^b f(t)e^{int}dt = 0$.

Corrigé de l'exercice 17.
L'astuce est de réécrire, pour tout $h > 0$,

$$\int_h^{ah} \frac{1}{x}dx = \ln(ah) - \ln(h) = \ln(a).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $h > 0$, *on a donc*

$$\begin{aligned}
\left|\int_h^{ah} \frac{f(x)}{x}dx - f(0)\ln a\right| &= \left|\int_h^{ah} \frac{f(x)}{x}dx - f(0)\int_h^{ah}\frac{1}{x}dx\right| \\
&= \left|\int_h^{ah} \frac{f(x)-f(0)}{x}dx\right| \\
&\leq \left|\int_h^{ah} \frac{|f(x)-f(0)|}{x}dx\right|.
\end{aligned}$$

Utilisons alors que f *est continue en* 0 : *pour* x *suffisamment proche de* 0, *on a* $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$, *c'est-à-dire*

$$\exists \delta > 0, \qquad t \in [0,\delta] \implies |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon.$$

Or, pour h *assez petit, l'intervalle* $[h, ah]$ *(ou* $[ah, h]$, *selon la valeur de* a*) est inclus dans* $[0,\delta]$: *il suffit pour cela de prendre* $0 < h < \frac{\delta}{\max(1,a)}$. *Donc,*

$$\begin{aligned}
0 < h < \tfrac{\delta}{\max(1,a)} &\implies \forall x \in [h, ah], \qquad |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon \\
&\implies \left|\int_h^{ah} \frac{f(x)}{x}dx - f(0)\ln a\right| \leq \left|\int_h^{ah}\frac{\varepsilon}{x}dx\right| = \varepsilon|\ln a|.
\end{aligned}$$

Quitte à poser $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\ln a|}$ *et* $\delta' = \frac{\delta}{\max(1,a)}$ *(pour les cas* $a \neq 1$, *le cas* $a = 1$ *est de toute façon trivial...), on a montré que*

$$\forall \varepsilon' > 0, \qquad \exists \delta' > 0, \qquad 0 < h < \delta' \implies \left|\int_h^{ah} \frac{f(x)}{x}dx - f(0)\ln a\right| \leq \varepsilon',$$

ce qui est la limite voulue.