TD5 : Intégration sur un segment

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1 (Recherche de primitives).
Déterminer les primitives de f dans les cas suivants, sur les intervalles proposés :

1. $f(x) = (2x+3)^2 x^{10}$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{(3+\cos x)^4}$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $I =]-\infty; 0[$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ sur $I =]1; +\infty[$ puis sur $J =]0, 1[$.
6. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{(x^3+1)^7}}$ sur $I =]0, +\infty[$.
7. $f(x) = \dfrac{1}{2+x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = \dfrac{x}{(2x+3)^4}$ sur $I =]-\frac{3}{2}, +\infty[$.
9. $f(x) = \cos(\alpha x) e^{\beta x}$ sur $I = \mathbb{R}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Exercice 2 (Décomposition en éléments simples).

1. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, \qquad \frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}.$$
2. Montrer que pour tout $x \in]-1; 1[$, on a $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{1-t^2} dt$ pour $x > 2$.

Exercice 3 (Décomposition en éléments simples bis).
Soit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$.

1. Déterminer a, b et c tels que $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1}$.
2. En déduire les primitives de f (préciser les intervalles de validité).

Exercice 4 (Recherche de primitives avec IPP).
Déterminer les primitives de f dans les cas suivants, sur les intervalles proposés :

1. $f(x) = (3x+1)\sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = (3x^3+1)e^{2x}$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = (7x-3)\ln(x)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$.
4. $f(x) = \arctan(x)$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 5 (Changement de variable).
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En effectuant le changement de variable $u = \cos(t)$, montrer que
$$\int_0^x f(t)dt = \int_a^b g(u)du,$$
où g est une fonction à préciser, et a, b des réels à préciser.
3. Effectuer la division euclidienne du polynôme $X^2 - 1$ par le polynôme $X + 2$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_a^b g(u)du$, puis de $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
5. Donner toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (Intégrales de Wallis).

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Calculer I_2.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
On pourra utiliser une intégration par parties.
4. En déduire par récurrence que
$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} \\ \\ I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}.$$
5. On pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = I_n$.

Exercice 7 (Calculs d'intégrales).
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{-1/3}^{0} 2^{3x+1}\, dx$
2. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 t\, dt$
3. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx$
4. $I = \displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin(x) dx$
5. $I = \displaystyle\int_0^{2} tE(t^2) dt$
6. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 + 2\cos^2 t}$ (poser $u = \tan t$)
7. $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$ (poser $t = \tan u$)
8. $I = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin^3(2t) dt$
9. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} |\cos(x)| dx$
10. $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} \max\left(2x + 4; \frac{4 - 2x}{3}\right)$

Exercice 8 (Equation différentielle linéaire d'ordre 1).
Soit φ la fonction définie sur $]-1;1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{x^3 + x}{(x^2 - 1)^2}$.

1. Calculer les primitives de φ à l'aide du changement de variables $u = x^2 - 1$.
2. Résoudre sur $]-1;1[$ l'équation différentielle
$$(1 - x^2)y' + 2xy = x^3 + x \qquad (E).$$

Exercice 9 (Equivalent d'une suite d'intégrales).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^{2n} x\ dx$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$.
3. Conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 10 (Des sommes de Riemann).
Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)}$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3+k^3}}$

Exercice 11 (Limite d'une suite d'intégrales).
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx$?

II Exercices supplémentaires

Exercice 12 (Fonction définie par une intégrale).
On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \arctan(t)dt$ et $H : x \mapsto \displaystyle\int_{-2x}^{x^4} \arctan(t)dt$.

1. Expliquer pourquoi F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F'.
2. Exprimer H en fonction de F.
3. En déduire que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer H'.
4. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13.
Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}dt$.

Exercice 14.
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2+t+1}\, dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et la classe de f.
2. Donner le $DL_5(0)$ de $f(x)$.
3. Calculer $f(x)$.
   Indication : on pourra mettre le polynôme t^2+t+1 sous sa forme canonique $(t+\alpha)^2+\beta\cdots$

Exercice 15 (*).
Montrer que si $a < b$, alors $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \frac{\pi}{8}(b-a)^2$.

Exercice 16 (*Lemme de Riemann-Lebesgue).
Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0$$

1. Pour une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (*on pourra intégrer par parties*).
2. Pour une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ en escalier (*commencer par f constante*).

3. Plus difficile : pour une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
   On utilisera le lemme d'approximation suivant :
   Soit $f \in \mathcal{C}_M([a; b], \mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe deux fonctions en escalier $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$.
4. Conclure pour une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.

Exercice 17 (*Limite par rapport aux bornes).
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a > 0$. Montrer que

$$\lim_{h \to 0^+} \int_h^{ah} \frac{f(x)}{x} dx = f(0) \ln a.$$