Corrigé du TD4 : Réduction des endomorphismes (diagonalisation)

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1. Tout d'abord on remarque que $u(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 donc on a bien $u(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.*
De plus, soient Q et R deux éléments de $\mathbb{R}_3[X]$ et a un réel. On a :

$$u(aQ+R) = (aQ+R)(-1)X^2+(aQ+R)(1) = aQ(-1)X^2+R(-1)X^2+aQ(1)+R(1) = au(Q)+u(R).$$

Donc u est aussi linéaire.
En conclusion u est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Soit (P_0, P_1, P_2, P_3) la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$\begin{aligned}
u(P_0) &= P_0(-1)X^2 + P_0(1) = X^2 + 1 = P_0 + 0P_1 + P_2 + 0P_3\\
u(P_1) &= P_1(-1)X^2 + P_1(1) = -X^2 + 1 = P_0 + 0P_1 + (-1)P_2 + 0P_3\\
u(P_2) &= P_2(-1)X^2 + P_2(1) = X^2 + 1 = P_0 + 0P_1 + P_2 + 0P_3\\
u(P_3) &= P_3(-1)X^2 + P_3(1) = -X^2 + 1 = P_0 + 0P_1 + (-1)P_2 + 0P_3
\end{aligned}$$

Donc la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Déterminons le polynôme caractéristique de u :

$$\chi_u(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_4 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ -1 & 1 & \lambda-1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1\\ 0 & \lambda & 0\\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1\\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1) = \lambda^3(\lambda - 2).$$

Les valeurs propres de u sont donc 0 et 2.
***Valeur propre** 0 **:** $E_0(u) = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/u(P) = 0\}$. Pour résoudre $u(P) = 0$ écrivons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a :*

$$u(P) = 0 \iff (-a+b-c+d)X^2+a+b+c+d = 0 \iff \begin{cases} -a+b-c+d = 0\\ a+b+c+d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = -b\\ c = -a \end{cases}.$$

Donc $E_0(u) = \{a(X^3 - X) + b(X^2 - 1)/(a, b) \in \mathbb{R}^2\} = Vect(X^3 - X, X^2 - 1)$.
La famille $(X^3 - X, X^2 - 1)$ est génératrice de $E_0(u)$ et libre (polynômes échelonnés en degré) donc c'est une base de $E_0(u)$.
***Valeur propre** 2 **:** $E_2(u) = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/u(P) = 2P\}$. Pour résoudre $u(P) = 2P$ écrivons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a :*

$$\begin{aligned}
u(P) = 2P &\iff (-a+b-c+d)X^2 + a+b+c+d = 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX + 2d\\
&\iff \begin{cases} 0 = 2a\\ -a+b-c+d = 2b\\ 0 = 2c\\ a+b+c+d = 2d \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0\\ c = 0\\ d = b \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc $E_2(u) = \{b(X^2 + 1)/b \in \mathbb{R}\} = Vect(X^2 + 1)$.
La famille $(X^2 + 1)$ est génératrice de $E_2(u)$ et libre (un seul vecteur non nul) donc c'est une base de $E_2(u)$.

Corrigé de l'exercice 2. *1. Calculons le polynôme caractéristique de f :*

$$\chi_f(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X - \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{-1}{3} & X - \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & X \end{vmatrix}.$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - XL_1$, nous obtenons :

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X - \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 - X & X - 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} - X(X - \frac{4}{3}) & \frac{1-X}{3} & 0 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X - \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} - X(X - \frac{4}{3}) & \frac{1-X}{3} & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant alors par rapport à la troisième colonne :

$$\chi_f(X) = (X-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -X^2 + \frac{4}{3}X - \frac{1}{3} & \frac{1-X}{3} \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - X) = X(X-1)^2.$$

Les valeurs propres de f sont les racines de $\chi_f(X)$, donc $sp(f) = \{0; 1\}$.

2. L'endomorphisme f possède deux sous-espaces propres :

$$E_0(f) = Ker(f) = Ker(A) = Ker(3A) = Ker \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1(f) = Ker(f - Id) = Ker(A - I_3) = Ker(3A - 3I_3) = Ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Les deux sous-espaces propres de f sont en somme directe (d'après le cours), et ils sont même supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ car $\dim(E_0(f)) + \dim(E_1(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

3. En choisissant une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = E_0(f) \oplus E_1(f)$, on aura $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$, car $f(u_1) = \overrightarrow{0}$, et $f(u_2) = u_2$, $f(u_3) = u_3$.

D'après les calculs faits à la question précédente, la base $\mathcal{B}$ suivante convient :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. On voit facilement que $D^2 = D$, donc $f^2 = f$, ce qui montre que l'endomorphisme f est un projecteur.

5. On a $D = P^{-1}AP$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$.

Corrigé de l'exercice 3.
Calculons les images par f de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$:

$$f(X^k) = \begin{cases} (X^3 + X)kX^{k-1} - (3X^2 - 1)X^k & si\ k \geq 1 \\ 1 - 3X^2 & si\ k = 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f(X^k) = (k-3)X^{k+2} + (k+1)X^k.$$

On a donc

$$\deg(f(X^k)) = \begin{cases} k + 2 & si\ k \neq 3 \\ k & si\ k = 3 \end{cases}.$$

Ceci limite fortement les possibilités de degrés pour les vecteurs propres de f.
En effet, si P est non nul et vérifie $f(P) = \lambda P$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\deg(P) \leq 3$, car si on avait

$\deg(P) \geq 4$, alors on aurait (par linéarité de f) $\deg(f(P)) = \deg(P) + 2$, ce qui rendrait impossible l'égalité $f(P) = \lambda P$.
S'ils existent, les vecteurs propres de f sont donc des polynômes non nuls de la forme :

$$P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0.$$

Or :

$$f(P) = a_3 \underbrace{f(X^3)}_{=4X^3} + a_2 \underbrace{f(X^2)}_{=3X^2-X^4} + a_1 \underbrace{f(X)}_{=2X-2X^3} + a_0 \underbrace{f(1)}_{=1-3X^2} = -a_2X^4 + (4a_3 - 2a_1)X^3 + (3a_2 - 3a_0)X^2 + 2a_1X + a_0,$$

donc

$$f(P) = \lambda P \iff \begin{cases} -a_2 = 0 \\ 4a_3 - 2a_1 = \lambda a_3 \\ 3a_2 - 3a_0 = \lambda a_2 \\ 2a_1 = \lambda a_1 \\ a_0 = \lambda a_0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = 0 \\ 4a_3 - 2a_1 = \lambda a_3 \\ -3a_0 = 0 \\ 2a_1 = \lambda a_1 \\ a_0 = \lambda a_0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_0 = 0 \\ (\lambda - 2)a_1 = 0 \\ (4 - \lambda)a_3 = 2a_1 \end{cases}.$$

Des cas sont alors à distinguer :

- *si $\lambda = 2$, alors*

$$f(P) = \lambda P \iff \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_3 = a_1 \end{cases} \iff P = \alpha(X + X^3),\ \alpha \in \mathbb{R}..$$

  Donc 2 est valeur propre (puisque ce système a des sol. non nulles), et $E_2(f) = Vect(X^3 + X)$.
- *si $\lambda = 4$, alors*

$$f(P) = \lambda P \iff \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \iff P = \alpha X^3,\ \alpha \in \mathbb{R}..$$

  Donc 4 est valeur propre (puisque ce système a des solutions non nulles), et $E_4(f) = Vect(X^3)$.
- *si $\lambda \notin \{2; 4\}$, alors*

$$f(P) = \lambda P \iff \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ (4 - \lambda)a_3 = 2a_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \iff P = 0,$$

  donc λ n'est pas valeur propre de f.

En définitive, l'endomorphisme f possède deux valeurs propres (2 et 4), et les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

Remarque.
Bien entendu, cela n'a pas de sens de se demander si f est diagonalisable puisqu'il s'agit d'un endomorphisme en dimension infinie (donc on ne dispose pas d'écriture matricielle).

Corrigé de l'exercice 4.

1. *$A^2 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -16 \\ -6 & 1 & -12 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 24 \\ 9 & -1 & 18 \\ -6 & 0 & -13 \end{pmatrix}$. On a donc bien $A^3 + A^2 - A - I_3 = 0$.*
2. *Soit λ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé. On a donc $V \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $AV = \lambda V$. En appliquant V à l'équation vérifiée par la matrice A on obtient :*

$$\lambda^3V + \lambda^2V - \lambda V - V = 0$$

   (en effet, $A^2V = A(AV) = A(\lambda V) = \lambda(AV) = \lambda^2V$, et on montre de même que $A^3V = \lambda^3V$) et comme V est non nul, on a nécessairement (en factorisant) $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.
   Les solutions de $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ sont $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$.
   Donc les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et -1.
   Attention nous n'avons pas démontré ici que 1 et -1 sont des valeurs propres !!!

3. *Il faut regarder si les équations $AV = V$ et $AV = -V$ admettent des solutions non nulles.*
   $AV = V \Leftrightarrow x = y = z = 0$ *donc 1 n'est pas une valeur propre.*
   $AV = -V \Leftrightarrow x = -2z$. *Donc -1 est bien une valeur propre.*
   En conclusion, A n'admet qu'une valeur propre, le réel -1.

Corrigé de l'exercice 5.
Les calculs ne sont pas détaillés pour cet exercice. Dans chacun des cas, les matrices P et D données ne sont pas les seules réponses possibles :

1. $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1)$.
   En posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *on a* $P^{-1}AP = D$.
2. $\chi_B(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 7)$.
   En posant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, *on a* $P^{-1}BP = D$.

Corrigé de l'exercice 6.

1. *Notons C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de A. Puisque $C_1 = C_3 = C_4$, on a $rg(A) = rg(C_1, C_2)$.*
   En outre, la famille (C_1, C_2) est libre car $C_1 \neq 0$ et C_2 n'est pas colinéaire à C_1, donc $rg(A) = 2$.
   Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(Ker(A)) = 4 - rg(A) = 2$.
2. *La question précédente montre que $Ker(A) \neq \{0\}$.*
   Il existe donc $X \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ tel que $AX = 0 = 0X$, c'est-à-dire que 0 est valeur propre de A.
3. *Par définition,* $P_A(X) = \det(XI_4 - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ -1 & X-k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & X \end{vmatrix}$.

   En effectuant la transformation $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2$, on obtient
   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} 0 & X(X-k)-1 & -X & -X \\ -1 & X-k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & X \end{vmatrix}.$$
   En développant par rapport à la première colonne, il vient
   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} X(X-k)-1 & -X & -X \\ -1 & X & 0 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix}.$$
   On effectue ensuite $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$, et on développe par rapport à la troisième colonne :
   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} X(X-k)-2 & -X & 0 \\ -1 & X & 0 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X(X-k)-2 & -X \\ -1 & X \end{vmatrix}.$$
   Enfin, on factorise par X dans la deuxième colonne, pour obtenir :
   $$P_A(X) = X^2 \begin{vmatrix} X(X-k)-2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = X^2(X^2 - kX - 3).$$
4. (a) *Le discriminant du polynôme $X^2 - kX - 3$ vaut $\Delta(k) = k^2 + 12$. Puisque k est réel, on a $\Delta(k) > 0$, et donc $X^2 - kX - 3$ possède deux racines réelles distinctes. Puisque $P_A(X) = X^2(X^2 - kX - 3)$, et que 0 n'est pas racine de $X^2 - kX - 3$, on en déduit que $P_A(X)$ possède trois racines réelles distinctes, donc que A possède trois valeurs propres.*

(b) *Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$: $P_A(X) = X^2(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.*
Le sous-espace propre $E_0(A) = Ker(A)$ est de dimension 2 (montré auparavant).
Les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(A)$ et $E_{\lambda_2}(A)$ sont nécessairement de dimension 1 car les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont simples (i.e. de multiplicité 1).
On a donc $\dim(E_0(A)) + \dim(E_{\lambda_1}(A)) + \dim(E_{\lambda_2}(A)) = 2+1+1 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, ce qui montre que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

(c) *Si $k=0$, alors $P_A(X) = X^2(X^2-3) = X^2(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$, donc les valeurs propres de A sont $0, \sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. De plus, on a*

- $E_0(A) = Ker(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.
- $E_{\sqrt{3}}(A) = Ker(A-\sqrt{3}I_4) = Vect\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\1\\1\end{pmatrix}$.
- $E_{-\sqrt{3}}(A) = Ker(A+\sqrt{3}I_4) = Vect\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\\1\\1\end{pmatrix}$.

On en déduit que la famille

$$(v_1,v_2,v_3,v_4) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

est une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^4 = E_0(A) \oplus E_{\sqrt{3}}(A) \oplus E_{-\sqrt{3}}(A)$, donc c'est une base de diagonalisation de A.
En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à cette nouvelle base, on a donc $P = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\-1&0&1&1\\0&-1&1&1\end{pmatrix}$, et $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\sqrt{3}&0\\0&0&0&-\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

5. (a) *Si $k \in \mathbb{C}$, alors le polynôme $P_A(X) = X^2(X^2-kX-3)$ a pour racines complexes 0 (de multiplicité 2), et les racines de X^2-kX-3. Vu que ce trinôme a pour discriminant $\Delta(k) = k^2+12$, deux cas se présentent :*

- *Si $k \notin \{2i\sqrt{3}; -2i\sqrt{3}\}$, alors $\Delta(k) \neq 0$, donc X^2-kX-3 possède deux racines complexes distinctes et non nulles. On en déduit que P_A possède trois racines complexes distinctes, et donc que A possède trois valeurs propres distinctes.*
- *Si $k \in \{2i\sqrt{3}; -2i\sqrt{3}\}$, alors $\Delta(k) = 0$, donc X^2-kX-3 possède une racine complexe double et non nulle (c'est $\frac{k}{2}$). On en déduit que P_A possède deux racines complexes distinctes, et donc que A possède deux valeurs propres distinctes.*

(b) *Si $k \notin \{2i\sqrt{3}; -2i\sqrt{3}\}$, alors $sp(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.*
Comme à la question 4.(b), on a $\dim(E_0)(A) = 2$, et $\dim(E_{\lambda_1})(A) = \dim(E_{\lambda_2})(A) = 1$, donc
$\dim(E_0(A)) + \dim(E_{\lambda_1}(A)) + \dim(E_{\lambda_2}(A)) = 4$, *ce qui montre que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.*

(c) *Si $k = 2i\sqrt{3}$ ou si $k = -2i\sqrt{3}$, alors $sp(A) = \{0, \frac{k}{2}\}$, et donc (puisque $\dim(E_0(A)) = \dim(Ker(A)) = 2$), on a*

$$A \text{ diagonalisable} \iff \dim(E_{\frac{k}{2}}(A)) = 2.$$

En outre, pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$, on a

$$(x,y,z,t) \in E_{\frac{k}{2}}(A) \iff (A - \tfrac{k}{2} I_4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\frac{k}{2}x + y = 0 \\ x + \frac{k}{2}y + z + t = 0 \\ y - \frac{k}{2}z = 0 \\ y - \frac{k}{2}t = 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$(x,y,z,t) \in E_{\frac{k}{2}}(A) \iff \begin{cases} x = \frac{2}{k}y \\ z = \frac{2}{k}y \\ t = \frac{2}{k}y \\ \left(\frac{12+k^2}{2k}\right) y = 0 \end{cases}.$$

Mais $\Delta(k) = 12 + k^2 = 0$, donc

$$(x,y,z,t) \in E_{\frac{k}{2}}(A) \iff \begin{cases} x = \frac{2}{k}y \\ z = \frac{2}{k}y \\ t = \frac{2}{k}y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2/k \\ 1 \\ 2/k \\ 2/k \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que le sous-espace propre $E_{\frac{k}{2}}(A)$ est de dimension 1.
Donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Corrigé de l'exercice 7.
Les valeurs propres de $M(\alpha)$ sont $\{2+\alpha; 2; 2-\alpha\}$.
On peut rapidement remarquer que si $\alpha \neq 0$ alors les trois valeurs propres sont distinctes donc $M(\alpha)$ est diagonalisable.
Étudions alors le cas $\alpha = 0$.
La matrice $M(0)$ admet une unique valeur propre 2.
Or, une matrice qui n'est pas diagonale et qui n'admet qu'une seule valeur propre n'est jamais diagonalisable.
En effet, si $M(0)$ était diagonalisable, alors on aurait $M = PDP^{-1}$ avec D matrice diagonale contenant les valeurs propres, donc $D = 2I_3$.
On aurait alors $M(0) = P2I_3P-1 = 2I_3$ ce qui est absurde car on voit bien que $M(0)$ n'est pas égale à $2I_3$.
Donc $M(\alpha)$ est diagonalisable si, et seulement si, $\alpha \neq 0$.

Corrigé de l'exercice 8. *1. On a $J^2 = nJ$.*

2. On procède par analyse-synthèse :
   - *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de J. Il existe alors un vecteur $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $JV = \lambda V$. Ceci implique $J^2V = \lambda JV$, c'est-à-dire $nJV = \lambda JV$. Ceci se réécrit $n\lambda V = \lambda^2 V$, ou encore $\lambda(n-\lambda)V = 0$. Vu que $V \neq 0$, on a $\lambda = 0$ ou $\lambda = n$.*
     Les valeurs propres **possibles** *de J sont donc 0 et n.*
   - *Vérifions si 0 et n sont* **effectivement** *valeurs propres de J. Pour cela, on calcule $Ker(J)$ et $Ker(J - nI_n)$.*
     * *$Ker(J)$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \cdots, x_n)$ qui vérifient*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0.$$

On a donc

$$Ker(J) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \qquad \dim(Ker(J)) = n-1.$$

* *$Ker(J-nI_n)$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1,\cdots,x_n)$ qui vérifient*

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n = nx_1 \\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n = nx_2 \\ \vdots \\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n = nx_{n-1} \\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n = nx_n \end{cases},$$

qui est équivalent à $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n$. On a donc

$$Ker(J-nI_n) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad \dim(Ker(J-nI_n)) = 1.$$

Puisque ces deux sous-espaces vectoriels sont non nuls, on en déduit que 0 et n sont bien valeurs propres de J.

On a donc bien $sp(J) = \{0; n\}$.

3. *Les calculs précédents montrent que $\chi_J(X)$ a pour racines 0 et n. Notons α_0 et $\alpha_n \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives. D'après le cours, on a $\alpha_0 \geq \dim(E_0(J)) = n-1$ et $\alpha_n \geq \dim(E_n(J)) = 1$. Mais $\alpha_0+\alpha_n = \deg(\chi_J) = n$, donc nécessairement : $\alpha_0 = n-1$ et $\alpha_n = 1$.*
   Finalement,
   $$\chi_J(X) = X^{n-1}(X-n).$$
4. *Puisque $\dim(E_0(J)) + \dim(E_n(J)) = n-1+n = n = \dim(\mathbb{R}^n)$, la matrice J est diagonalisable.*

Corrigé de l'exercice 9. *1. — D'après la formule donnée pour $u(P)$ on voit bien que $u(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, donc comme $n \geqslant 2$, on a $u(P) \in E$.*

— Soient P et Q deux éléments de E et a un réel.
On a :

$$\begin{aligned} u(aP+Q) &= (X^2-X)(aP+Q)(1) + (X^2+X)(aP+Q)(-1) \\ &= (X^2-X)(aP(1)+Q(1)) + (X^2+X)(aP(-1)+Q(-1)) \\ &= au(P)+u(Q) \end{aligned}$$

L'application u est donc linéaire.

En conclusion u est un endomorphisme de E.

2. *On a $\begin{cases} u(1) = 2X^2 \\ u(X) = -2X \\ u(X^2) = 2X^2 \end{cases}$ donc $Mat_{(1,X,X^2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.*
   (a) *On peut voir directement que $Im(u) = Vect(X, X^2)$ donc (X, X^2) est une base de $Im(u)$. D'après le théorème du rang, $\dim(Ker(u)) = 1$ et d'après la forme de la matrice $X^2-1 \in Ker(u)$ (puisque $C_3 - C_1 = 0$).*
   Donc (X^2-1) est une base de $Ker(u)$.
   (b) *Sur la matrice, qui est triangulaire, on peut lire les valeurs propres de u : 0, -2 et 2.*
   u admet 3 valeurs propres distinctes et $\dim(E) = 3$ donc u est diagonalisable.
   (c) *On a déjà trouvé les valeurs propres : 0, -2 et 2.*
   De plus $E_0(u) = Ker(u) = Vect(X^2-1)$, $E_{-2}(u) = Vect(X)$, $E_2(u) = Vect(X^2)$.
3. *— Commençons par déterminer une base de $Ker(u)$. On a :*

$$u(P) = 0 \iff (P(1)+P(-1))X^2 + (-P(1)+P(-1))X = 0 \iff \begin{cases} P(1)+P(-1) = 0 \\ -P(1)+P(-1) = 0 \end{cases},$$

et cela équivaut à $P(1) = P(-1) = 0$.
Donc les éléments de $Ker(u)$ sont les polynômes admettant 1 et-1 pour racine.

On a donc

$$Ker(u) = \{(X^2-1)Q(X)/Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\} = Vect(X^2-1, (X^2-1)X, \ldots, (X^2-1)X^{n-2}).$$

La famille $(X^2-1, (X^2-1)X, \ldots, (X^2-1)X^{n-2})$ *est génératrice de* $Ker(u)$ *et libre, car échelonnée en degré, donc c'est une base de* $Ker(u)$.

— *D'après le point précédent,* $\dim(Ker(u)) = n-1$ *et donc, d'après le théorème du rang,* $\dim(Im(u)) = 2$.
De plus, on voit que $\forall P \in E,\ u(P) \in Vect(X, X^2)$.
Donc $Im(u) \subset Vect(X, X^2)$ *et comme ces deux espaces ont la même dimension, ils sont égaux.*
En conclusion, $Im(u) = Vect(X, X^2)$ *et* (X, X^2) *est une base de* $Im(u)$.

4. — *Comme* $Ker(u)$ *n'est pas réduit à* 0, 0 *est une valeur propre de* u *et son sous-espace propre associé est* $Ker(u)$ *qui est de dimension* $n-1$.
   — *On remarque que* $u(X) = -2X$, *donc* -2 *est une valeur propre.*
   — *On remarque que* $u(X^2) = 2X^2$ *donc* 2 *est une valeur propre.*

   On sait que $\dim(E_0(u)) + \dim(E_{-2}(u)) + \dim(E_2(u)) \leqslant \dim(E) = n+1$ *donc* $\dim(E_{-2}(u)) + \dim(E_2(u)) \leqslant 2$.
   Ainsi $\dim(E_{-2}(u)) = \dim(E_2(u)) = 1$, *donc* $E_{-2}(u) = Vect(X)$ *et* $E_2(u) = Vect(X^2)$.
5. *On a* $\dim(E_0(u)) + \dim(E_{-2}(u)) + \dim(E_2(u)) = \dim(E)$ *donc* u *est diagonalisable.*

Corrigé de l'exercice 10. *1. On a*

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & X & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X-a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne, il vient :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= (X-a_{n-1}) \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & -1 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & X & -a_{n-3} \\ 0 & & -1 & -a_{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (X-a_{n-1})X^{n-1} + D_{n-1}. \end{aligned}$$

Mais le déterminant D_{n-1} *(de taille* $n-1$*) se calcule simplement par récurrence, en le développant par rapport à sa dernière ligne :*

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & X & -a_{n-3} \\ 0 & & -1 & -a_{n-2} \end{vmatrix} = -a_{n-2}X^{n-2} + \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & X & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -1 & -a_{n-3} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$D_{n-1} = -a_{n-2}X^{n-2} + D_{n-2}.$$

Une récurrence immédiate fournit donne alors (puisque $D_2 = \begin{vmatrix} X & -a_0 \\ -1 & -a_1 \end{vmatrix} = -a_1X - a_0$*)*

$$D_{n-1} = -a_{n-2}X^{n-2} - a_{n-3}X^{n-3} - \cdots - a_2X^2 - a_1X - a_0.$$

Donc

$$\chi_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \cdots - a_2X^2 - a_1X - a_0.$$

2. *Si λ est une valeur propre complexe, on a*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A) \iff \begin{cases} a_0 x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + a_1 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} + a_{n-2} x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1}) x_n \\ x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2}) x_n \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1) x_n \\ (\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0) x_n = 0 \end{cases}.$$

Mais λ étant valeur propre, on a (d'après la première question) :

$$\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0 = \chi_A(\lambda) = 0.$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A) \iff \begin{cases} x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1}) x_n \\ x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2}) x_n \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1) x_n \end{cases},$$

ce qui montre que

$$E_\lambda(A) = Vect \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1 \\ \vdots \\ \lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2} \\ \lambda - a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. *La question précédente montre que chaque sous-espace propre de A est de dimension 1. La matrice A n'est donc diagonalisable que si elle possède n sous-espaces propres. On a donc (***dans ce cas seulement !***) :*

$$A \text{ est diagonalisable} \iff A \text{ possède } n \text{ valeurs propres distinctes.}$$

4. *La matrice compagnon*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

convient.

Corrigé de l'exercice 11. *1. C'est évident car*

$$(f - 2Id_E) \circ (f - 3Id_E) = f \circ f - 2Id_E \circ f - 3f \circ Id_E + 6Id_E = f^2 - 5f + 6Id_E.$$

2.
   - *On a $F \cap G = \{0_E\}$ car si $x \in F \cap G$, on a $f(x) = 2x$ et $f(x) = 3x$, donc $3x = 2x$, c'est-à-dire $x = 0_E$.*
   - *Soit $x \in E$. On peut le décomposer de la manière suivante :*

   $$x = Id_E(x) = (f - 2Id_E)(x) - (f - 3Id_E)(x) = (f(x) - 2x) + (3x - f(x)).$$

   Appelons $x_1 = f(x) - 2x$ et $x_2 = 3x - f(x)$. On a alors $x_1 + x_2 = x$, mais aussi :
     * *$x_1 \in G$, puisque*

     $$f(x_1) = f(f(x)) - 2f(x) = (f^2 - 2f)(x) = (3f - 6Id_E)(x) = 3(f(x) - 2x) = 3x_1;$$

     * *$x_2 \in F$, puisque*

     $$f(x_2) = 3f(x) - f(f(x)) = (3f - f^2)(x) = (-2f + 6Id_E)(x) = 2(-f(x) + 3x) = 2x_2.$$

Ceci montre que $E = F + G$.

Finalement, les sous-espaces F et G sont bien supplémentaires dans E.

3. *Considérons une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$. Les vecteurs de $\mathcal{B}$ qui sont dans F vérifient $f(e) = 2e$, tandis que ceux qui sont dans G vérifient $f(e) = 3e$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Cette matrice est diagonale, donc f est diagonalisable.*

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 12.

On a $A^2 = A$ donc l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A est un projecteur. On en déduit que f est diagonalisable, et donc que A est diagonalisable.

De plus, f étant non trivial ($f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f \neq Id$), on a $sp(f) = \{0; 1\}$, et $\mathbb{R}^2 = E_0(f) \oplus E_1(f)$.

Il ne reste qu'à obtenir une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ adaptée à cette somme directe.

$E_0(f) = Vect(u_1)$ et $E_1(f) = Vect(u_2, u_3)$, avec $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est alors $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *car $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = u_2$, $f(u_3) = u_3$.*

Finalement, $P^{-1}AP = D$ avec $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.*

Corrigé de l'exercice 13.

Le polynôme caractéristique de A vaut

$$\chi_A(X) = (1 + X^2)^2 = (X - i)^2(X + i)^2.$$

A possède donc deux valeurs propres doubles complexes non réelles, elle n'est donc pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

On a $E_i(A) = Ker(A - iI_4) = Vect\left(\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, *et* $E_{-i}(A) = Ker(A + iI_4) = Vect\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Vu que $\dim(E_i(A)) + \dim(E_{-i}(A)) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$, on a A diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

En posant $P = \begin{pmatrix} -i & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *on a $P \in GL_4(\mathbb{C})$ (c'est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^4$ à la base de diagonalisation), et*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 14. 1. *On obtient facilement :*

$$A \text{ et } B_\lambda \text{ sont équivalentes en ligne} \iff \lambda \neq 0.$$

2. **Si** *A et B_λ sont semblables,* **alors** *elles ont mêmes valeurs propres (car même polynôme caractéristique). Vu que $\chi_A(X) = X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$, on a $sp(A) = \{1; 3\}$. Mais B_λ*

étant triangulaire, on a $sp(B_\lambda) = \{1; \lambda\}$*, donc* **nécessairement**, $\lambda = 3$.
Etudions maintenant **la réciproque**. *Si* $\lambda = 3$*, alors* A *étant diagonalisable (car elle possède deux valeurs propres distinctes), elle est semblable à* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *(et à* $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*, d'ailleurs...), donc* A *est bien semblable à* B_3.
Conclusion :

$$A \text{ et } B_\lambda \text{ sont semblables} \iff \lambda = 3.$$

Corrigé de l'exercice 15.
Pour calculer $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -a & -a^2 \\ -1/a & X & -a \\ -1/a^2 & -1/a & X \end{vmatrix}$*, on effectue* $L_1 \leftarrow L_1 - aL_2$ *:*

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & -a(X+1) & 0 \\ -1/a & X & -a \\ -1/a^2 & -1/a & X \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ -1/a & X & -a \\ -1/a^2 & -1/a & X \end{vmatrix}$$

(en factorisant la première colonne). Puis on effectue $C_2 \leftarrow C_2 + aC_1$ *:*

$$\chi_A(X) = (X+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/a & X-1 & -a \\ -1/a^2 & -2/a & X \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} X-1 & -a \\ -2/a & X \end{vmatrix} = (X+1)(X^2 - X - 2),$$

ce qui donne après factorisation :

$$\chi_A(X) = (X+1)^2(X-2).$$

Ainsi, A *possède deux valeurs propres distinctes :* -1 *et* 2*, et ce quelle que soit la valeur du paramètre* $a > 0$.
Les sous-espaces propres sont (après calculs) :

$$E_{-1}(A) = Ker(A+I_3) = Vect\left(\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad E_2(A) = Ker(A-2I_3) = Vect \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a bien $\dim(E_{-1}(A)) + \dim(E_2(A)) = 2 + 1 = \dim(\mathbb{R}^3)$*, donc la matrice* A *est diagonalisable pour tout* $a > 0$*, et en posant* $P = \begin{pmatrix} -a & -a^2 & a^2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*, on a* $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$.

Corrigé de l'exercice 16. *1. On a* $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^3$*, donc* A *est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre* $E_2(A) = Ker(A-2I_4)$ *est de dimension* 3*. D'après le théorème du rang, on a donc*

$$A \text{ est diagonalisable} \iff rg(A - 2I_4) = 4 - 3 = 1.$$

Puisque $A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*, on a* $rg(A - 2I_4) = 1 \iff d = e = f = 0$*. Donc*

$$A \text{ est diagonalisable} \iff d = e = f = 0.$$

Dans ce cas, on a $E_2(A) = Ker(A-2I_4) = Ker \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Vect\left(\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$

et $E_1(A) = Ker(A - I_4) = Ker \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2. *On a* $\chi_B(X) = (X-1)^2(X-2)^2$*, donc* B *est diagonalisable si et seulement si les sous-espaces propres* $E_1(B)$ *et* $E_2(B)$ *sont tous deux de dimension* 2*. Par le théorème du rang, on en déduit que*

$$B \text{ est diagonalisable} \iff rg(B-I_4) = rg(B-2I_4) = 4-2 = 2.$$

Or, $B - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, donc* $rg(B-I_4) = 2 \iff a = 0$*.*

Egalement : $B - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*, donc* $rg(B-2I_4) = 2 \iff f = 0$*.*

On en déduit que

$$B \text{ est diagonalisable} \iff a = f = 0.$$

Dans ce cas, on a

$$E_1(B) = Ker(B-I_4) = Ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$E_2(B) = Ker(B-2I_4) = Ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Vect\left(\begin{pmatrix} b \\ d \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ e \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

Corrigé de l'exercice 17. 1. *Par hypothèse, tous les sous-espaces propres de* f *sont de dimension* 1 *: ce sont des droites (car le polynôme caractéristique est scindé* **à racines simples***).*
On fixe un vecteur propre x *de* f *associé à une valeur propre* λ*. On a alors* $x \neq 0_E$ *et* $f(x) = \lambda x$*.*
En appliquant g*, on obtient (puisque* $f \circ g = g \circ f$*) :*

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Ceci montre que $g(x) \in E_\lambda(f) = Ker(f - \lambda Id_E)$*.*
Attention, $g(x)$ **n'est pas forcément un vecteur propre, car il pourrait être nul...**
Mais $E_\lambda(f)$ *étant de dimension* 1*, on a* $E_\lambda(f) = Vect(x)$*, et donc* $g(x)$ *est colinéaire à* x*.*
Il existe donc $\alpha \in \mathbb{K}$ *tel que* $g(x) = \alpha x$*, ce qui montre (car* $x \neq 0_E$*) que* x *est un vecteur propre de* g *(associé à une valeur propre qui peut être différente de* λ *...)*
On a montré que tout vecteur propre de f *est un vecteur propre de* g*.*

2. *L'inverse est faux en général. Par exemple, si* $E = \mathbb{R}^2$*,* $g = Id_{\mathbb{R}^2}$*, et* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *défini par* $f(x;y) = (x;2y)$*, alors on a*

- g *qui commute avec* f*.*
- f *possède deux valeurs propres distinctes :* 1 *et* 2*.*
- *tout vecteur de* $\mathbb{R}^2$ *est un vecteur propre de* g*, puisque* $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$*,* $g(x;y) = (x;y)$*.*
- *Et pourtant, tout vecteur propre de* g *n'est pas nécessairement un vecteur propre de* f *: sinon, tous les vecteurs de* $\mathbb{R}^2$ *seraient vecteurs propres de* f*, ce qui est impossible, puisque par exemple :* $f(1;1) = (1;2)$ *n'est pas colinéaire à* $(1;1)$*, donc* $(1;1)$ *n'est pas un vecteur propre de* f*.*

Corrigé de l'exercice 18.

On a $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & & \cdots & & 0 & \beta \\ 0 & \ddots & & & & \iddots & 0 \\ & & \alpha & & \beta & & \\ \vdots & & & \alpha+\beta & & & \vdots \\ & & \beta & & \alpha & & \\ 0 & \iddots & & & & \ddots & 0 \\ \beta & 0 & & \cdots & & 0 & \alpha \end{pmatrix}$*, donc pour tout réel* λ *:*

$$A - \lambda I_{2n+1} = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 0 & & \cdots & & 0 & \beta \\ 0 & \ddots & & & & \iddots & 0 \\ & & \alpha-\lambda & & \beta & & \\ \vdots & & & \alpha+\beta-\lambda & & & \vdots \\ & & \beta & & \alpha-\lambda & & \\ 0 & \iddots & & & & \ddots & 0 \\ \beta & 0 & & \cdots & & 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}.$$

On remarque alors que pour $\lambda = \alpha + \beta$*, la matrice* $A - \lambda I_{2n+1}$ *n'est pas inversible :*

$$A - (\alpha+\beta) I_{2n+1} = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & & \cdots & & 0 & \beta \\ 0 & \ddots & & & & \iddots & 0 \\ & & -\beta & & \beta & & \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ & & \beta & & -\beta & & \\ 0 & \iddots & & & & \ddots & 0 \\ \beta & 0 & & \cdots & & 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

ce qui montre que $\alpha + \beta$ *est valeur propre de* A*.*
De plus $rg(A - (\alpha+\beta)I_{2n+1}) = n$*, donc par le théorème du rang :*

$$\dim(E_{\alpha+\beta}(A)) = (2n+1) - n = n+1,$$

et plus précisément :

$$E_{\alpha+\beta}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

En outre, le réel $\lambda = \alpha - \beta$ *est aussi valeur propre, puisque*

$$A - (\alpha-\beta) I_{2n+1} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & & \cdots & & 0 & \beta \\ 0 & \ddots & & & & \iddots & 0 \\ & & \beta & & \beta & & \\ \vdots & & & 2\beta & & & \vdots \\ & & \beta & & \beta & & \\ 0 & \iddots & & & & \ddots & 0 \\ \beta & 0 & & \cdots & & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible (elle est de rang $n+1$). De plus, $\dim(E_{\alpha-\beta}(A)) = 2n+1-(n+1) = n$, *et*

$$E_{\alpha-\beta}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Finalement, puisque $\beta \neq 0$, on a trouvé deux sous-espaces propres distincts **supplémentaires** *dans $\mathbb{R}^{2n+1}$, puisqu'ils sont toujours en somme directe et que* $\dim(E_{\alpha+\beta}(A)) + \dim(E_{\alpha-\beta}(A)) = 2n+1$. *On en déduit que ce sont les seuls sous-espaces propres et que A est diagonalisable (et au passage, on peut affirmer que le polynôme caractéristique de A vaut $\chi_A(X) = (X-\alpha-\beta)^{n+1}(X-\alpha+\beta)^n$).*

Corrigé de l'exercice 19. • *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $u \circ v$, alors il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $(u \circ v)(x) = \lambda x$,*
c'est-à-dire $u(v(x)) = \lambda x$. En composant par v, on obtient $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$,
c'est-à-dire $v(x) \in Ker(v \circ u - \lambda Id_E)$. Reste à voir si le vecteur $v(x)$ est non nul...

* *Dans le cas où $\lambda \neq 0$, l'égalité $v(x) = 0_E$ entraîne $\lambda x = 0_E$ et donc $x = 0_E$, ce qui est absurde. Donc on a $v(x) \neq 0_E$, et $v(x) \in Ker(v \circ u - \lambda Id_E)$, ce qui montre que λ est valeur propre de $v \circ u$.*
* *Dans le cas où $\lambda = 0$, on ne peut hélas rien dire sur $v(x)$, et donc on procède autrement. On a $u \circ v$ non injective (puisque 0 est valeur propre de $u \circ v$), donc $u \circ v$ non bijective, et* $\det(u \circ v) = 0$. *Mais* $\det(v \circ u) = \det(u \circ v)$ *(les deux valent* $\det(u) \times \det(v)$*), donc $v \circ u$ a lui aussi un déterminant nul, ce qui prouve que $\lambda = 0$ est valeur propre de $v \circ u$.*

Dans les deux cas, on a donc λ valeur propre de $u \circ v \implies \lambda$ valeur propre de $v \circ u$, ce qui montre que $Sp(u \circ v) \subset Sp(v \circ u)$.

• *Les endomorphismes u et v jouent ici des rôles symétriques, donc on a aussi $Sp(v \circ u) \subset Sp(u \circ v)$, et finalement $Sp(v \circ u) = Sp(u \circ v)$.*

Corrigé de l'exercice 20. • *Si f est diagonalisable, alors on a $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)$, où les λ_i sont les valeurs propres distinctes de f. Signalons qu'il y a deux types de sous-espaces propres :*

* *si $\lambda = 0$, alors $E_\lambda(f) = Ker(f)$.*
* *si $\lambda \neq 0$, alors $E_\lambda(f) \subset Im(f)$, car si $x \in E_\lambda(f)$, on a $f(x) = \lambda x$, donc $x = f(\frac{x}{\lambda})$, ce qui montre que $x \in Im(f)$.*

On en déduit que

* *Si 0 n'est pas valeur propre de f, alors tous les sous-espaces-propres sont inclus dans $Im(f)$, et donc (vu qu'ils sont supplémentaires dans E), on obtient $E \subset Im(f)$, c'est-à-dire $E = Im(f)$. Dans ce cas, on a évidemment $E = Ker(f) \oplus Im(f)$ puisque $Ker(f) = \{0_E\}$.*
* *Si 0 est valeur propre de f, alors on a $E = Ker(f) \oplus \left(E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_{p-1}}(f)\right)$, avec les $\lambda_i \neq 0$. Puisque $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, $E_{\lambda_i}(f) \subset Im(f)$, on a $E \subset Ker(f) + Im(f)$, et donc $E = Ker(f) + Im(f)$. Enfin, on a $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$, car*

$$\dim(Ker(f) \cap Im(f)) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) - \dim(Ker(f) + Im(f))$$

$$= \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) - \dim(E) = 0,$$

d'après le théorème du rang. D'où $E = Ker(f) \oplus Im(f)$ dans ce cas aussi.

• *La réciproque est fausse, sinon tous les endomorphismes bijectifs seraient diagonalisables (si f est bijectif, on a évidemment $Ker(f) = \{0_E\}$ et $Im(f) = E$, donc $Ker(f) \oplus Im(f) = E$). Et ce n'est pas le cas (chercher un contre-exemple avec une matrice $2 \times 2 \cdots$).*