TD4 : Réduction des endomorphismes (diagonalisation)

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1 (D'après oral CCP 2015 - filière TSI).
Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $u(P) = P(-1)X^2 + P(1)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Trouver les valeurs propres de u ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres.

Exercice 2 (Diagonalisation guidée en dimension 3).
Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A (on a donc $A = Mat_{\mathcal{B}_0}(f)$, où $\mathcal{B}_0$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

1. Montrer que les valeurs propres de f sont 0 et 1.
2. Calculer les sous-espaces propres $E_0(f)$ et $E_1(f)$, et montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = E_0(f) \oplus E_1(f)$. On la notera D.
4. L'endomorphisme f est-il un projecteur ?
5. Quelle relation y a-t-il entre les matrices A et D ?

Exercice 3 (*Eléments propres en dimension infinie).
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(P) = (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P$.
Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f (*on pourra raisonner sur les degrés de P et $f(P)$*).

Exercice 4 (Valeurs propres et polynôme annulateur).
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 + A^2 - A - I_3 = 0$.
2. Montrer que si λ est une valeur propre de A alors $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.
   En déduire que $\mathrm{sp}(A) \subset \{1; -1\}$.
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de A, déterminer les valeurs propres de A.

Exercice 5 (Pratique de la diagonalisation).
Diagonaliser (si possible) les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 (Diagonalisation avec paramètre).
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où k est une constante réelle ou complexe.

1. Quel est le rang de A ? Et la dimension de $Ker(A)$?
2. En déduire **sans calcul** que 0 est valeur propre de A.
3. Calculer le polynôme caractéristique de A. On le notera $P_A(X)$.
4. **On suppose que $k \in \mathbb{R}$.**
   (a) Montrer que A possède trois valeurs propres distinctes.
   (b) En déduire que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ quel que soit $k \in \mathbb{R}$.
   (c) **On suppose que $k = 0$.** Diagonaliser explicitement A (on donnera $P \in GL_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$).
5. **On suppose que $k \in \mathbb{C}$.**
   (a) Combien de valeurs propres distinctes A possède-t-elle en fonction de k ?
   (b) **Si $k \notin \{2i\sqrt{3}; -2i\sqrt{3}\}$**, la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?
   (c) **Si $k \in \{2i\sqrt{3}; -2i\sqrt{3}\}$**, la matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

Exercice 7 (D'après oral CCS 2015 - filière TSI).

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la matrice $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 2+\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 8 (Eléments propres via un polynôme annulateur).

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une relation entre J et J^2.
2. **En déduire** les valeurs propres et les sous-espaces propres de J.
3. **En déduire** le polynôme caractéristique de J.
4. La matrice J est-elle diagonalisable ?

Exercice 9 (D'après oral CCS 2011 - filière TSI).
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère l'application u définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, par :

$$\forall P \in E, \qquad u(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1).$$

1. Justifier que u est un endomorphisme de E.
2. Seulement dans cette question, on prend $n = 2$.
   Écrire la matrice de u relativement à la base $(1, X, X^2)$ et sans calculs, répondre aux questions suivantes :
   (a) Déterminer une base de $Ker(u)$ et une base de $Im(u)$.
   (b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
   (c) Déterminer les éléments propres de u.
3. On revient au cas général.
   Déterminer une base de $Ker(u)$ et une base de $Im(u)$.
4. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de u.
5. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 10 (*Matrice compagnon).

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
   On pourra développer par rapport à la dernière ligne et procéder par récurrence sur n.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Calculer le sous-espace propre $E_\lambda(A)$.
3. A quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?
4. Trouver une matrice A telle que $\chi_A(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X + 1$.

Exercice 11 (*Polynôme annulateur scindé à racines simples).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f un endomorphisme de E qui vérifie :

$$f^2 - 5f + 6Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1. Montrer que cette condition équivaut à $(f - 2Id_E) \circ (f - 3Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. On pose $F = Ker(f - 2Id_E)$ et $G = Ker(f - 3Id_E)$.
   Montrer que $E = F \oplus G$. *Indication : pour montrer que $E = F + G$, on pourra utiliser la décomposition $Id_E = (f - 2Id_E) - (f - 3Id_E)$.*
3. En déduire que f est diagonalisable.

II Exercices supplémentaires

Exercice 12 (Diagonalisation non guidée en dimension 3).
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, puis diagonaliser **rapidement** A.

Exercice 13 (Diagonalisation en dimension 4).
La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
Si oui, diagonaliser-la explicitement.

Exercice 14 (Equivalentes en ligne ? Semblables ?).

1. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont-elles équivalentes en lignes ?
2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ sont-elles semblables ?

Exercice 15 (Diagonalisation en dimension 3 avec paramètre).
Soit $a > 0$. Si c'est possible, diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 (Diagonalisation en dimension 4 avec paramètres).

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs des paramètres réels a, b, c, d, e, f la matrice A est-elle diagonalisable ? Préciser les sous-espaces propres dans ce cas.
2. Même question pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 (*Eléments propres de deux endo. qui commutent).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux endomorphismes f et g de E qui commutent (i.e. $f \circ g = g \circ f$). On suppose de plus que f admet n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g.
2. Montrer qu'un vecteur propre de g n'est pas nécessairement un vecteur propre de f.
   On cherchera un contre-exemple dans $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 18 (*Diagonalisation en dimension n).
Soient α et β deux réels (avec $\beta \neq 0$), et soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} a_{i,i} = \alpha, \quad a_{i,2n+2-i} = \beta \quad \text{si } i \in [\![1, 2n+1]\!] \setminus \{n+1\}, \\ a_{n+1,n+1} = \alpha + \beta, \\ a_{i,j} = 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}.$$

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 19 (*Valeurs propres de $u \circ v$ et $v \circ u$).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et u, v deux endomorphismes de E.
Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 20 (*Une condition nécessaire de diagonalisabilité).
Montrer que si f est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie, alors $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires dans E. La réciproque est-elle vraie ?