Corrigé du TD3 : Déterminants

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1.*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

2.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 & 3 \\ a & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ a & 0 & 0 & 3 \\ b & a & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix} (\textit{dvl par rapport à } L_1)$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & a & 3 \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix}}_{\textit{dvl par rapport à } L_1} + \underbrace{3 \left(3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ b & a & a \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ a & 0 & 0 \\ b & a & a \end{vmatrix} \right)}_{\textit{dvl par rapport à } C_4}$$

$$= a^3 - 3a^3 + 3\left(3 \times (-b) \times (-3b) + a \times (-a) \times (-2a)\right)$$
$$= 4a^3 + 27b^2.$$

Corrigé de l'exercice 2. *1.*

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ a+b+c & 0 & b & c \\ a+b+c & b & 0 & c \\ a+b+c & b & c & 0 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & 0 & b & c \\ 1 & b & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix} \quad \textit{linéarité par rapport à la première colonne.}$$

2.

$$D = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & -b & 0 \\ 0 & b-a & c-b & -c \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}.$$

3. Il suffit ici de développer par rapport à la première colonne et on obtient le résultat demandé.

4. Le déterminant restant à calculer est triangulaire donc il suffit de multiplier les éléments diagonaux.
On obtient :$D = (a+b+c) \times (-a) \times (-b) \times (-c) = -abc(a+b+c)$.

Corrigé de l'exercice 3.
On effectue les transvections $L_1 \leftarrow L_1 - (1-x)L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$ *:*

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & x & x & x - y + xy \\ 0 & x & 0 & -y \\ 0 & 0 & -y & -y \\ 1 & 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}.$$

Ensuite, on développe par rapport à la colonne C_1 :

$$\Delta(x,y) = -\begin{vmatrix} x & x & x-y+xy \\ x & 0 & -y \\ 0 & -y & -y \end{vmatrix}.$$

On factorise C_1 par x et L_3 par $-y$:

$$\Delta(x,y) = xy\begin{vmatrix} 1 & x & x-y+xy \\ 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{=} xy\begin{vmatrix} 0 & x & x+xy \\ 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Enfin, on développe par rapport à la ligne L_2 :

$$\boxed{\Delta(x,y)} = -xy\begin{vmatrix} x & x+xy \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -xy(x-x-xy) = \boxed{x^2y^2}.$$

Corrigé de l'exercice 4. *1. Il est très facile d'obtenir la matrice de la famille (Q_0, Q_1, Q_2) dans la base $\mathcal{B}_c$ donc nous allons nous servir du déterminant pour montrer que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.*

On a $\det_{\mathcal{B}_c}(Q_0, Q_1, Q_2) = \begin{vmatrix} -i & i & 0 \\ 1 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2i.$

Comme $\det_{\mathcal{B}_c}(Q_0, Q_1, Q_2) \neq 0$ *on peut affirmer que* $\boxed{(Q_0, Q_1, Q_2) \text{ est une base de } \mathbb{C}_2[X]}.$

2. Il faut ici penser à remarquer que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_c) = \dfrac{1}{\det_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})}$. *On a donc* $\boxed{\det_{\mathcal{B}}(P_0, P_1, P_2) = \dfrac{1}{-2i} = \dfrac{i}{2}}.$

Corrigé de l'exercice 5. *1.*

- *On remarque facilement que :* $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = Vect(A, B, C).$

  La famille (A, B, C) est donc génératrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est donc un espace vectoriel.
- *Montrons que la famille (A, B, C) est libre. On cherche tous les réels a, b et c tels que : $aA + bB + cC = 0$.*

  Or, $aA + bB + cC = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = 0 \iff a = b = c = 0.$

  La famille (A, B, C) est donc libre.
- *La famille (A, B, C) est libre et génératrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ donc c'est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et* $\dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = 3$.

2. Les matrices M_1, M_2 et M_3 sont bien des matrices symétriques, on peut donc calculer le déterminant demandé.

- *On a* $M_1 = 0A + 1B + 1C$ *donc* $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(M_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- *On a* $M_2 = 1A + 0B + 1C$ *donc* $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(M_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- *On a* $M_3 = 1A + 1B + 0C$ *donc* $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(M_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

On a donc : $\det_{\mathcal{B}}(M_1, M_2, M_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

3. Comme $\det_{\mathcal{B}}(M_1, M_2, M_3) \neq 0$, *la famille (M_1, M_2, M_3) est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.*

Corrigé de l'exercice 6.
Soit $M = (x, y, z)$ un point de $\mathbb{R}^3$. Notons $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \in Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \text{ est liée .}$$

(parce que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille libre). On en déduit que

$$M \in \mathcal{P} \iff \det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-0 & 1 & 1 \\ y-5 & 1 & 2 \\ z+1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient ainsi une équation cartésienne de $\mathcal{P}$: $\boxed{x - 2y + z + 11 = 0}$.

Corrigé de l'exercice 7.

1. - *Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et λ un réel.*
   Alors $u(P + \lambda Q) = X(P + \lambda Q)' + (P + \lambda Q)(1) = XP' + \lambda XQ' + P(1) + \lambda Q(1) = XP' + P(1) + \lambda(XQ' + Q(1)) = u(P) + \lambda u(Q)$ u est une application linéaire.
   - *De plus si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc $XP' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P(1) \in \mathbb{R}$ donc $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.*
   - *En conclusion u est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui même donc* $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.
2. *On va pour calculer ce déterminant, commencer par trouver la matrice de u dans la base canonique $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.*
   Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $u(P_i) = X \times iX^{i-1} + 1 = iX^i + 1 = P_0 + iP_i$.
   Ainsi la matrice de u dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & n \end{pmatrix}$
   Ainsi $\boxed{\det(u) = \det(A) = n!}$.
3. *Comme* $\det(u) \neq 0$, $\boxed{u \text{ est un endomorphisme bijectif c'est-à-dire un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

Corrigé de l'exercice 8.

1. (a) $f(x) = \begin{vmatrix} c-x & a-x & a-x \\ b-c & c-a & 0 \\ b-c & b-a & c-a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$.
   (b) *Il suffit de développer le déterminant précédent par rapport à la première ligne pour obtenir un somme de termes de degré 1 en x.*
   Ainsi $f(x)$ est bien de la forme $mx + p$.
2. (a) *On revient à la définition initiale de f.*
   $$f(a) = \begin{vmatrix} c-a & 0 & 0 \\ b-a & c-a & 0 \\ b-a & b-a & c-a \end{vmatrix} = (c-a)^3 \text{ et } f(b) = \begin{vmatrix} c-b & a-b & a-b \\ 0 & c-b & a-b \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = (c-b)^3.$$
   (b) *On a calculé $f(a)$ et $f(b)$ en fonction de a, b et c mais on a aussi $f(a) = ma + p$ et $f(b) = mb + p$.*
   Donc $\begin{cases} ma + p = (c-a)^3 \\ mb + p = (c-b)^3 \end{cases}$ *, ce qui nous donne* $\begin{cases} m = \dfrac{(c-a)^3 - (c-b)^3}{a-b} \\ p = \dfrac{a(c-b)^3 - b(c-a)^3}{a-b} \end{cases}$.
3. *On remarque que* $\begin{vmatrix} c & a & a \\ b & c & a \\ b & b & c \end{vmatrix} = f(0) = p = \dfrac{a(c-b)^3 - b(c-a)^3}{a-b}$.
4. *On applique le même procédé. On définit* $g(x) = \begin{vmatrix} c-x & a-x & \ldots & a-x \\ b-x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a-x \\ b-x & \ldots & b-x & c-x \end{vmatrix}$.

En effectuant sur ce déterminant les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ avec $i \in \{2, \dots, n\}$ on obtient un déterminant où x n'apparaît que sur la première ligne. Puis en développant par rapport à la première ligne on voit que $g(x)$ est de la forme $mx + p$.
Ensuite on remarque que $g(a) = (c-a)^n$ et $g(b) = (c-b)^n$.
Donc $g(x) = \dfrac{(c-a)^n - (c-b)^n}{a-b} x + \dfrac{a(c-b)^n - b(c-a)^n}{a-b}$.
En conclusion, $\begin{vmatrix} c & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & c \end{vmatrix} = g(0) = \dfrac{a(c-b)^n - b(c-a)^n}{a-b}$.

Corrigé de l'exercice 9.

1. *Soit $n \geq 3$. On développe D_n par rapport à la première colonne :*

$$D_n = (a+b) \underbrace{\begin{vmatrix} a+b & ab & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & a+b & ab \\ 0 & & 1 & a+b \end{vmatrix}}_{=D_{n-1}} - \underbrace{\begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & ab & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}}_{\text{déterminant de taille } n-1}.$$

Le second déterminant de taille $n-1$ se développe facilement par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & ab & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} a+b & ab & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & a+b & ab \\ 0 & & 1 & a+b \end{vmatrix} = abD_{n-2}.$$

Finalement, on a donc

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2},$$

pour tout $n \geq 3$.

2. *La suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie par les relations de récurrence :*

$$D_1 = a+b, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2,$$

$$\forall n \geq 1, \qquad D_{n+2} = (a+b)D_{n+1} - abD_n.$$

C'est une relation de récurrence linéaire double. L'équation caractéristique associée à cette relation est

$$r^2 - (a+b)r + ab = 0,$$

c'est-à-dire

$$(r-a)(r-b) = 0.$$

Deux cas se présentent alors :

- $\boxed{\text{Si } a \neq b}$*, alors l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes a et b. Donc (d'après le cours), il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que*

$$\forall n \geq 1, \qquad D_n = \lambda \times a^n + \mu \times b^n.$$

En faisant $n=1$ puis $n=2$ dans cette relation, on trouve :

$$a+b=\lambda a+\mu b, \qquad a^2+ab+b^2=\lambda a^2+\mu b^2.$$

Donc (λ,μ) est la solution du système de Cramer

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b \\ a^2+ab+b^2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\lambda=\frac{\begin{vmatrix} a+b & b \\ a^2+ab+b^2 & b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}}=\frac{a}{a-b}, \qquad \mu=\frac{\begin{vmatrix} a & a+b \\ a^2 & a^2+ab+b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}}=\frac{b}{b-a}.$$

D'où

$$\forall n\geq 1, \qquad D_n=\frac{a}{a-b}a^n+\frac{b}{b-a}b^n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

- $\boxed{\textit{Si } a=b}$*, alors l'équation caractéristique possède une seule racine double : $a=b$. Il y a alors deux sous-cas :*

  * *<u>Si cette racine a est non nulle</u> : alors (d'après le cours), il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que*

  $$\forall n\geq 1, \qquad D_n=\lambda a^n+\mu n a^{n-1}.$$

  En faisant $n=1$ puis $n=2$ dans cette relation, on trouve :

  $$2a=\lambda a+\mu, \qquad 3a^2=\lambda a^2+2\mu a.$$

  Donc (λ,μ) est la solution du système de Cramer

  $$\begin{pmatrix} a & 1 \\ a^2 & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a \\ 3a^2 \end{pmatrix}.$$

  On a donc

  $$\lambda=\frac{\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 3a^2 & 2a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}}=1, \qquad \mu=\frac{\begin{vmatrix} a & 2a \\ a^2 & 3a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}}=a.$$

  D'où

  $$\forall n\geq 1, \qquad D_n=(n+1)a^n.$$

  * *<u>Si $a=0$</u>, alors trivialement $D_n=0$ pour tout $n\geq 1$ (car le déterminant est triangulaire inférieur avec des 0 sur la diagonale), donc la formule $D_n=(n+1)a^n$ reste vraie.*

Conclusion de l'exercice : *On a*

$$\boxed{\forall n\geq 1, \qquad D_n=\begin{cases} \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \textit{si } a\neq b \\ (n+1)a^n & \textit{si } a=b \end{cases}}.$$

Remarque.
Si $K=\mathbb{R}$, alors D_n est une fonction de deux variables en $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Une étude locale au voisinage des points (a_0,a_0) montre que D_n est **continue** *sur $\mathbb{R}^2$: cela vient du fait que si $b\neq a$, on a*

$$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n \underset{(a,b)\to(a_0,a_0)}{\longrightarrow} (n+1)a_0^n.$$

Normal, car en fait les déterminants sont des fonctions de plusieurs variables continues (puisque ce sont des polynômes en les coefficients de la matrice...)

Corrigé de l'exercice 10. 1. *On a dans ce cas deux lignes identiques donc le déterminant de Vandermonde est nul.*

2. (a) *Il suffit pour cela de développer le déterminant $V(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$ par rapport à la dernière ligne et on voit que $P(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.*

   (b) *En s'inspirant de la première question on voit que $P(a_1) = P(a_2) = \ldots = P(a_{n-1}) = 0$.*

   Les racines de P sont donc $(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

   (c) *P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ et on a trouvé $n-1$ racines distinctes donc il existe un réel A tel que $P(x) = A(x-a_1) \times (x-a_2) \times \ldots \times (x-a_{n-1})$.*

   Si on développe cette écriture de P on remarque que A est le coefficient de x^{n-1}.

   De plus, en revenant à la définition de $P(x)$ et en développant par rapport à la dernière ligne on remarque que le coefficient de x^{n-1} est $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = V(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

   On a donc $P(x) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1}(x-a_k)$.

3. *Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: $V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.*

   — $V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$ *donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.*

   — *Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.*
   S'il existe $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$ tels que $i \neq j$ et $a_i = a_j$ alors $V(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0$ et $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1}(a_j - a_i) = 0$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Si pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$ $(i \neq j)$, $a_i \neq a_j$ alors d'après la question précédente :

   $$V(a_1, \ldots, a_{n+1}) = V(a_1, \ldots, a_n) \prod_{k=1}^{n}(a_{n+1} - a_k) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i) \prod_{k=1}^{n}(a_{n+1} - a_k) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1}(a_j - a_i).$$

   Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

   — *En conclusion, pour tout $n \geqslant 2$, $V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i)$.*

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 11.

On remarque que la somme de chaque colonne vaut $a+b+c$, donc en effectuant la transformation $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, on obtient :

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b. \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Ensuite, on effectue $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$:

$$D = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c) * (1 * (-b-c-a) * (-c-a-b)).$$

Finalement, $\boxed{D = (a+b+c)^3}$.

Corrigé de l'exercice 12.

Avant de résoudre l'équation calculons le déterminant :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -x-1 & -x-1 & -x-1 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&= -(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} \\
&= -(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x+3 & x+1 & 2x+2 \\ 3x+5 & 2x+3 & 7x+12 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array} \\
&= -(x+1) \begin{vmatrix} x+1 & 2(x+1) \\ 2x+3 & 7x+12 \end{vmatrix} = (x+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2x+3 & 7x+12 \end{vmatrix} \\
&= -(x+1)^2(7x+12-4x-6) = (x+1)^2(3x+6) = -3(x+1)^2(x+2)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -2.}$

Corrigé de l'exercice 13. • *φ est linéaire, car pour tout $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\varphi(\lambda P_1 + P_2) \quad = \quad \left\{ x \mapsto \int_x^{x+1} (\lambda P_1(t) + P_2(t))\, dt \right\}.$$

Mais pour tout réel x, on a

$$\int_x^{x+1} (\lambda P_1(t) + P_2(t))\, dt = \lambda \int_x^{x+1} P_1(t) dt + \int_x^{x+1} P_2(t) dt = \lambda\varphi(P_1)(x) + \varphi(P_2)(x).$$

Donc

$$\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda\varphi(P_1) + \varphi(P_2).$$

- **Attention !** *A ce stade-là, on ne sait pas encore que φ est un endomorphisme, il faut vérifier que $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Pour cela, il suffit (par linéarité) de calculer les images de la base canonique $(1, X, X^2)$:*

$$\varphi(1) = \int_X^{X+1} 1 dt = (X+1) - X = 1,$$

$$\varphi(X) = \int_X^{X+1} t dt = \frac{1}{2}\left((X+1)^2 - X^2\right) = X + \frac{1}{2},$$

$$\varphi(X^2) = \int_X^{X+1} t^2 dt = \frac{1}{3}\left((X+1)^3 - X^3\right) = X^2 + X + \frac{1}{3}.$$

Ces trois images sont bien dans $\mathbb{R}_2[X]$, donc $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$, et φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

- *La matrice de φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ est, d'après les calculs précédents :*

$$A = Mat_{(1,X,X^2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc $\boxed{\det(\varphi) = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1}.$

Corrigé de l'exercice 14.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec n un entier naturel impair.
Si A est antisymétrique, on a $A^T = -A$. En appliquant le déterminant, on obtient (par n-linéarité) :

$$\det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A).$$

Mais le déterminant est invariant par transposition, donc $\det(A^T) = \det(A)$*, ce qui amène* $\det(A) = -\det(A)$*, et donc* $\det(A) = 0$.
Finalement, $\boxed{\text{le déterminant d'une matrice antisymétrique vaut 0 en dimension impaire.}}$

Corrigé de l'exercice 15.
On a $AB = -BA$ *donc* $\det(AB) = \det(-BA) = (-1)^n \det(BA)$.
Or, $\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \times \det(B) \neq 0$ *car* A *et* B *sont inversibles.*
On a donc $1 = (-1)^n$ *et ainsi* n *est pair.*

Corrigé de l'exercice 16.
Par multiplicativité du déterminant, on a $\det(u \circ u) = \det(u)^2$*. Mais* $u \circ u = -Id_E$*, donc* $\det(u)^2 = \det(-Id_E)$*, c'est-à-dire (par n-linéarité) :*

$$\det(u)^2 = (-1)^n \det(Id_E) = (-1)^n.$$

Or, puisque $\det(u)$ *est un réel ici, on a* $\det^2(u) \geq 0$*, et donc* $(-1)^n \geq 0$.
Ceci impose que $\boxed{n \text{ soit pair}}$.

Corrigé de l'exercice 17.

1. (a) $Ker(p) = F \neq \{0_E\}$*, donc* p *n'est pas injective. On en déduit que* p *n'est pas bijective, donc* $\boxed{\det(p) = 0}$.

   (b) *En choisissant une base* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$*, adaptée à la somme directe* $E = F \oplus G$*, on obtient :*

   $$Mat_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_{p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2} \end{pmatrix},$$

   où $p_1 = \dim(F)$ *et* $p_2 = \dim(G)$ *(en effet, les vecteurs de* $F = Ker(s - Id_E)$ *vérifient* $s(e_j) = e_j$ *et ceux de* $G = Ker(s + Id_E)$ *vérifient* $s(e_j) = -e_j$*).*
   On en déduit que $\boxed{\det(s) = (-1)^{\dim(G)}}$.

2. *On a* $(\varphi \circ \varphi)(A) = (A^T)^T = A$*, donc* φ *est une symétrie.*
   D'après la question précédente, on a donc $\det(\varphi) = (-1)^{\dim G}$*, où*

   $$G = Ker(\varphi + Id_E) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M^T = -M\} = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

   (les matrices antisymétriques). Finalement, $\boxed{\det(\varphi) = (-1)^{\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))}}$.

   Remarque.
   On peut montrer (cf. feuille TD 2) que $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$*. D'où* $\boxed{\det(\varphi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}$.

Corrigé de l'exercice 18.
En effectuant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$*, on obtient :*

$$D_n = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i & 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i & a_2 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Ensuite, on effectue successivement :

$$L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, \quad L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \quad \cdots \quad L_n \leftarrow L_2 - L_1.$$

On obtient

$$D_n = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & -a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & \ddots & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & -a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

On développe enfin par rapport à la première colonne :

$$D_n = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) \underbrace{\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & -a_2 & \ddots & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & -a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & -a_{n-1} \end{vmatrix}}_{\textit{triangulaire inf}} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) (-a_1)\times(-a_2)\times\cdots\times(-a_{n-1}).$$

Donc pour tout $n \geq 1$, $\boxed{D_n = (-1)^{n+1} a_1 \cdots a_{n-1}(a_1 + \cdots + a_{n-1})}$.

Corrigé de l'exercice 19.

On remarque ici qu'en échangeant la colonne C_1 *avec la colonne* C_{n+1}*, la colonne* C_2 *avec la colonne* C_{n+2} *et ainsi de suite jusqu'à la colonne* C_n*, la matrice* B *se transforme en la matrice* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

On a pour cela effectué n *échanges de colonnes.*

Donc $\det(B) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

En développant n *fois par rapport à la dernière colonne, on obtient :* $\det(B) = (-1)^n \det(A)$.