TD3 : Déterminants

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1.
En essayant d'être le plus « astucieux » possible, calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.
On souhaite calculer $D = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$.

1. Effectuer sur D l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.
2. Effectuer sur D les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$.
3. Quelle opération permet d'obtenir $D = (a+b+c) \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ b-a & -b & 0 \\ b-a & c-b & -c \end{vmatrix}$?
4. Conclure sur la valeur de D.

Exercice 3 (Déterminant 4×4).
Calculer le déterminant :

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}, \qquad x, y \in K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

Exercice 4 (Un exemple sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
On considère les 3 polynômes suivants :

$$Q_0 = X - i \qquad Q_1 = X + i \qquad Q_2 = X^2 - iX.$$

On considère de plus la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$: $\mathcal{B}_c = (P_0, P_1, P_2)$.

1. En calculant un déterminant, montrer que la famille $\mathcal{B} = (Q_0, Q_1, Q_2)$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.
2. Calculer $\det_{\mathcal{B}}(P_0, P_1, P_2)$.

Exercice 5 (Base des matrices symétriques).
On considère $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est le sous-espace engendré par la famille $\mathcal{B} = (A, B, C)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   En déduire une base et la dimension de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
2. On pose $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\det_{\mathcal{B}}(M_1, M_2, M_3)$.

3. La famille (M_1, M_2, M_3) est-elle une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 6 (Equation de plan dans $\mathbb{R}^3$).
Dans $\mathbb{R}^3$ (identifié à l'espace affine usuel), on considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$, et le point $A = (0,5,-1)$. Déterminer une équation cartésienne du plan affine

$$\mathcal{P} = A + Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Exercice 7 (Déterminant d'un endomorphisme dans les polynômes).
Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = XP' + P(1)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\det(u)$.
3. u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 8 (Inspiré d'un exercice d'oral de CCP).
Soient a, b et c trois réels distincts. On pose, pour tout réel x, $f(x) = \begin{vmatrix} c-x & a-x & a-x \\ b-x & c-x & a-x \\ b-x & b-x & c-x \end{vmatrix}$.

1. (a) À l'aide de deux opérations sur les lignes, montrer que $f(x) = \begin{vmatrix} c-x & a-x & a-x \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$, où d, e, f, g, h et k ne dépendent pas de x.
   (b) Sans calculer explicitement le déterminant, expliquer pourquoi $f(x)$ est de la forme $mx+p$ avec m et p deux réels indépendants de x.
2. (a) Calculer $f(a)$ et $f(b)$.
   (b) En déduire les valeurs de m et p en fonction de a, b et c.
3. Grâce aux calculs précédents, calculer très rapidement $\begin{vmatrix} c & a & a \\ b & c & a \\ b & b & c \end{vmatrix}$.
4. En s'inspirant de la méthode détaillée ci-dessus, calculer $\begin{vmatrix} c & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & c \end{vmatrix}$

   (ce déterminant est de taille n).

Exercice 9 (Calcul d'un déterminant $n \times n$ par récurrence double).
Pour a, b réels et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

(ce déterminant est de taille n).

1. Vérifier que pour tout $n \geq 3$, on a
$$D_n - (a+b)D_{n-1} + abD_{n-2} = 0.$$
2. En déduire la valeur de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10 (*Déterminant de Vandermonde).
Le déterminant de Vandermonde de $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ est défini par :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Quelle est la valeur de ce déterminant s'il existe $i \neq j$ tel que $a_i = a_j$?
2. On suppose maintenant que les a_i sont deux à deux distincts. Pour tout x réel, on pose :

$$P(x) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}, x).$$

   (a) Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   (b) Quelles sont les racines du polynôme P ?
   (c) Quel est le coefficient du terme de plus haut degré dans le polynôme P ?
   (d) En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \times \prod_{k=1}^{n-1}(x - a_k)$.
3. Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 2$, $V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_j - a_i)$.

II Exercices supplémentaires

Exercice 11 (*Factorisation d'un déterminant 3×3).
Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant suivant sous forme factorisée :

$$D = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b. \end{vmatrix}.$$

Exercice 12.
Résoudre l'équation : $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = 0.$
Indication : utiliser les opérations sur les lignes et les colonnes pour "faire sortir" des facteurs du type $ax+b$.

Exercice 13 (Déterminant d'un endomorphisme).
Montrer que l'application suivante est un endomorphisme et calculer son déterminant :
$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\varphi(P) = Q$, où Q est le polynôme tel que $Q(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)dt.$

Exercice 14 (Dét. d'une matrice antisymétrique en dimension impaire).
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension impaire, que vaut le déterminant d'une matrice antisymétrique ?

Exercice 15.
On considère deux matrices inversibles A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = 0$.
Montrer que n est un entier pair.

Exercice 16 ($u \circ u = -Id_E$).
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ u = -Id_E$.
Montrer que n est pair.

Exercice 17 (*Déterminant d'un projecteur et d'une symétrie).
1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et F et G deux sous-espaces vectoriels non nuls et supplémentaires dans E.

(a) Calculer $det(p)$, où $p \in \mathcal{L}(E)$ est le projecteur sur F parallèlement à G.

(b) Calculer $det(s)$, où $s \in \mathcal{L}(E)$ est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

2. Application : calculer le déterminant de l'endomorphisme $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\varphi(A) = A^T$.

Exercice 18 (Un autre déterminant $n \times n$).
Calculer le déterminant suivant (de taille $n \geq 2$, avec $a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$) :

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

On pourra commencer par ajouter à la première colonne toutes les autres colonnes.

Exercice 19.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la matrice B de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.
Exprimer le déterminant de B en fonction de celui de A.