Corrigé du TD2 : Compléments d'algèbre linéaire

I A faire en priorité

Corrigé de l'exercice 1. • *Pour $n = 0$, le résultat est évident car pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la famille $((X - z_0)^0) = (1)$ est libre (car formée d'un seul vecteur non nul).*

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tous nombres complexes $z_0, \cdots, z_n$ deux à deux distincts, la famille $((X - z_0)^n, (X - z_1)^n, \cdots, (X - z_n)^n)$ est libre.*
Considérons alors des nombres complexes $w_0, w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}$ des nombres complexes deux à deux distincts et montrons que la famille $((X - w_0)^{n+1}, (X - w_1)^{n+1}, \cdots, (X - w_{n+1})^{n+1})$ est libre.
On suppose que $\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k (X - w_k)^{n+1} = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Ceci implique
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k (x - w_k)^{n+1} = 0 \qquad (E_1),$$
donc en dérivant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (n+1) \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k (x - w_k)^{n} = 0,$$
c'est-à-dire
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k (x - w_k)^{n} = 0 \qquad (E_2).$$
En effectuant la combinaison $E_1 - (x - w_{n+1})E_2$, on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k (x - w_k)^{n} (w_{n+1} - w_k) = 0.$$
Le dernier terme de cette somme est nul (pour $k = n + 1$), donc ceci se réécrit :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (w_{n+1} - w_k) (x - w_k)^{n} = 0.$$
On a l'égalité polynomiale :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (w_{n+1} - w_k) (X - w_k)^{n} = 0_{\mathbb{C}[X]}.$$
On utilise alors l'hypothèse de récurrence : la famille $((X - w_k)^n)_{0 \le k \le n}$ est libre, donc
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \lambda_k (w_{n+1} - w_k) = 0,$$
ce qui entraîne $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ (vu que $w_{n+1} \neq w_k$).
En reportant dans l'égalité initiale, il vient
$$\lambda_{n+1} (X - w_{n+1})^{n+1} = 0_{\mathbb{C}[X]},$$
et donc $\lambda_{n+1} = 0$ puisque le polynôme $(X - w_{n+1})^{n+1}$ est non nul, ce qui montre bien que la famille $\left((X - w_k)^{n+1}\right)_{0 \le k \le n+1}$ est libre, montrant ainsi l'hérédité de la propriété.

Finalement, la propriété voulue est vraie pour $n = 0$ et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 2.
Vu que chaque polynôme $P_{k,n}$ est de degré n, la famille $\mathcal{B}_n = (P_{0,n}, P_{1,n}, \cdots, P_{n,n})$ est bien une famille de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, on a $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1 = Card(\mathcal{B}_n)$, il suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}_n$ est libre. On va le montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: notons la propriété
$$A(n) : \quad \text{"la famille } \mathcal{B}_n \text{ est libre".}$$

- *La propriété $A(0)$ est vraie car la famille $\mathcal{B}_0 = (P_{0,0}) = (1)$ est libre (famille formée d'un vecteur non nul).*
- *Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $A(n)$ est vraie. Montrons alors que $A(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que la famille $\mathcal{B}_{n+1} = (X^k(1-X)^{n+1-k})_{0\leq k\leq n+1}$ est libre. Pour cela, considérons des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1}$ tels que*
$$\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k X^k (1-X)^{n+1-k} = 0,$$
et montrons que ces réels sont tous nuls. En évaluant l'identité précédente en $X = 1$, on obtient
$$\alpha_{n+1} = 0,$$
(car $(1-X)^{n+1-k}$ vaut 0 en $X = 1$ si $k < n+1$, et 1 si $k = n+1$). On a donc
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k (1-X)^{n+1-k} = 0,$$
ce qui se réécrit (en mettant $1 - X$ en facteur) :
$$(1-X).\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k (1-X)^{n-k}\right) = 0.$$
On a donc un produit de polynômes qui est le polynôme nul. Vu que le polynôme $1-X$ est non nul, cela entraîne que
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k (1-X)^{n-k} = 0$$
(dans $\mathbb{K}[X]$, on a $PQ = 0_{\mathbb{K}[X]} \iff (P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ ou $Q = 0_{\mathbb{K}[X]})$).
Par hypothèse de récurrence, la famille $\mathcal{B}_n = (X^k(1-X)^{n-k})_{0\leq k\leq n}$ est libre, donc $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$. Finalement, on a bien tous les coefficients α_k qui sont nuls, ce qui prouve $A(n+1)$.
- *La propriété $A(n)$ est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, ce qu'il fallait montrer.*

Corrigé de l'exercice 3. 1. *Non, car $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable, alors que toute combinaison linéaire de la famille $\mathcal{A}$ est une fonction dérivable (puisque de la forme $x \mapsto \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e^{a_k x}$).*

2. *Non, car il existe des fonctions de E qui ne sont pas combinaison linéaire de $\mathcal{A}$ (par exemple $x \mapsto |x|$). On a $Vect(\mathcal{A}) \subsetneq E$.*
3. *Soit une famille finie de réels $(a_1, \cdots, a_N)$ (avec $N \in \mathbb{N}^*$). Montrons que la famille $(f_{a_1}, \cdots, f_{a_N})$ est libre. Supposons donc que $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k f_{a_k} = 0_E$ et montrons que les λ_k sont nuls.*
Quitte à permuter les vecteurs de la famille $(f_{a_1}, \cdots, f_{a_N})$, on peut supposer que
$$a_1 < a_2 < \cdots < a_N.$$
On a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \lambda_k e^{a_k x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrons par récurrence que $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, N\}$:
   - *En divisant l'égalité précédente par $e^{a_N x} \neq 0$, on obtient*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_N + \lambda_{N-1} e^{(a_{N-1}-a_N)x} + \cdots + \lambda_1 e^{(a_1-a_N)x} = 0.$$
Vu que $a_i - a_N < 0$ pour tout $1 \leq i \leq N-1$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{(a_i-a_N)x} = 0$, et donc en faisant tendre $x \to +\infty$ dans la relation, on obtient $\lambda_N = 0$.

   Remarque.
   Puisque le cas initial correspond à $\lambda_N = 0$ (et non pas $\lambda_1 = 0$), c'est une récurrence "descendante".

- *Fixons $k \in \{0, \cdots, N-2\}$ et supposons la propriété :*

$$\mathcal{P}(k): \quad \lambda_N = \cdots = \lambda_{N-k} = 0.$$

Montrons alors $\mathcal{P}(k+1)$, c'est-à-dire que le coefficient suivant $\lambda_{N-(k+1)}$ est nul.
Vu que $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k e^{a_k x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'hypothèse $\mathcal{P}(k)$ implique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{N-k-1} \lambda_k e^{a_k x} = 0.$$

En divisant par $e^{a_{N-k-1}x}$ et en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, on obtient (tout comme dans l'initialisation) : $\lambda_{N-k-1} = 0$, c'est-à-dire $\lambda_{N-(k+1)} = 0$.

On conclut par le théorème de récurrence que $\mathcal{P}(N-1)$ est vraie, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = 0$.
Finalement, la famille $\mathcal{A}$ est libre, car on a montré que toutes ses sous-familles finies sont libres.

Corrigé de l'exercice 4.
On a $H = Ker(\varphi)$, avec $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n.$$

Cette forme linéaire étant non nulle, H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.
Donc $\dim(H) + \dim(D) = n - 1 + 1 = n = \dim(E)$.
En outre, $H \cap D = \{(0, \cdots, 0)\}$ car si $x \in H \cap D$, on a $x = \lambda e = (\lambda, 0, \cdots, 0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (car $x \in D$), et la somme des coordonnées de x vaut 0 (puisque $x \in H$), donc $\lambda = 0$, et $x = (0, \cdots, 0)$.
Ceci montre que $E = D \oplus H$.

Corrigé de l'exercice 5.

- *Montrons que $F \cap G = \{0\}$.*
  Soit $P \in F \cap G$.
  Comme $P \in F$ on sait que $P(0) = 0$ et, de plus, comme $P \in G$, on sait que P est un polynôme constant donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = a$.
  Avec ces deux informations on obtient que $a = 0$ et donc P est le polynôme nul.
  En conclusion $F \cap G = \{0\}$.
- *Montrons que $F + G = \mathbb{R}[X]$.*
  Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme quelconque. On sait alors que l'on peut écrire :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$$

  avec $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
  On pose alors $Q(X) = a_0$ et $R(X) = a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$.
  On remarque que Q est un polynôme constant donc $Q \in G$ et $R(0) = 0$ donc $R \in F$.
  On a donc réussi à décomposer $P = Q + R$ avec $Q \in G$ et $R \in F$.
  Cela démontre que $\mathbb{R}[X] \subset F + G$.
  Il est, de plus, évident que $F + G \subset \mathbb{R}[X]$, donc $F + G = \mathbb{R}[X]$.

En conclusion, $\mathbb{R}[X] = F \oplus G$.

Corrigé de l'exercice 6.

- *Montrons que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.*
  La fonction nulle est paire (trivial), et si f, g sont paires, la fonction $\lambda f + g$ est paire, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x).$$

  Le même raisonnement s'adapte pour les fonctions impaires.

- *Pour montrer que les sous-espaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires, montrons que toute fonction $f \in E$ se décompose* **de manière unique** *sous la forme $f = f_1 + f_2$ avec f_1 paire et f_2 impaire.*
  On procède par analyse-synthèse :
  * *Analyse :* **Si** *une telle décomposition existe, alors on a*
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
  donc
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x),$$
  puisque f_1 est paire et f_2 impaire. Donc, en combinant les deux relations, on obtient :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) + f(-x) = 2f_1(x), \qquad f(x) - f(-x) = 2f_2(x).$$
  Donc $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.
  Ceci montre au passage l'unicité de la décomposition (sous réserve d'existence).
  * *Synthèse : Vérifions que la décomposition précédemment obtenue convient.*
  Etant donnée $f \in E$, on pose $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.
  On a $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f = f_1 + f_2$.
  De plus, on a bien f_1 paire et f_2 impaire car pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$f_1(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = f_1(x),$$
  $$f_2(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -f_2(x).$$

Corrigé de l'exercice 7. • *On peut commencer par remarquer que si $P \in F_i$ alors on connaît n racines de P : tous les entiers entre 0 et n, sauf i.*
Donc on sait que P peut s'écrire
$$P(X) = \alpha X(X-1)\dots(X-(i-1))(X-(i+1))\dots(X-n) = \alpha \prod_{k \in [0;n], k \neq i} (X-k).$$
On pose alors $Q_i = \prod_{k \in [0;n], k \neq i}(X-k)$. On a donc $F_i = Vect(Q_i)$.
Ainsi, on montre facilement que $\dim(F_i) = 1$ et on a donc $\dim(E) = \sum_{i=0}^{n} \dim(F_i)$.

- *Montrons que les F_i sont en somme directe en montrant l'unicité de la décomposition du vecteur nul.*
  On cherche tous les polynômes R_0, R_1, ..., R_n appartenant respectivement à F_0, F_1, ..., F_n tels que :
  $$R_0 + R_1 + \ldots + R_n = 0.$$
  Comme $R_i \in F_i = Vect(Q_i)$, on sait qu'il existe un réel a_i tel que $R_i = a_i Q_i$.
  On a donc :
  $$R_0 + R_1 + \ldots + R_n = 0 \iff a_0 Q_0(X) + a_1 Q_1(X) + a_2 Q_2(X) + \ldots + a_n Q_n(X) = 0.$$
  On applique cette égalité pour $X = 0$. On sait que $Q_1(0) = 0$, $Q_2(0) = 0$, ..., $Q_n(0) = 0$, et $Q_0(0) = -1 \times (-2) \ldots \times (-n) \neq 0$. Donc on obtient $a_0 = 0$.
  On procède de même pour $X = 1$ et on obtient $a_1 = 0$, puis ainsi de suite pour $X = 2, \ldots, n$.
  On a donc $R_0 = R_1 = \ldots = R_n = 0$.

En conclusion, $E = F_0 \oplus F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$.

Corrigé de l'exercice 8. *1. Une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de E.*
Comme on nous donne ici $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$, on peut calculer n'importe quelle image : pour tout vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a $\overrightarrow{u} = xe_1 + ye_2 + ze_3$.
On a donc $f(\overrightarrow{u}) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$ car f est une application linéaire.
Ainsi, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a :
$$f(x, y, z) = x(2e_2 + 3e_3) + y(2e_1 - 5e_2 - 8e_3) + z(-e_1 + 4e_2 + 6e_3) = (2y - z, 2x - 5y + 4z, 3x - 8y + 6z).$$

2. *Il suffit ici d'utiliser l'énoncé qui nous donne* $f(e_1)$, $f(e_2)$ *et* $f(e_3)$.
   On a donc $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.
3. (a) *Par définition* $Ker(f - Id_E) = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3/(f - Id_E)(\overrightarrow{u}) = 0\}$.
   On souhaite montrer que $f(Ker(f - Id_E)) \subset Ker(f - Id_E)$.
   Soit $\overrightarrow{u} \in Ker(f - Id_E)$. *Cela signifie que* $(f - Id_E)(\overrightarrow{u}) = 0$ *donc que* $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$.
   On veut montrer que $f(\overrightarrow{u}) \in Ker(f - Id_E)$.
   Mais comme $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$, *on peut tout de suite affirmer que* $f(\overrightarrow{u}) \in Ker(f - Id_E)$.
   Ainsi, $Ker(f - Id_E)$ *est stable par* f.

   (b)
   $$(x, y, z) \in Ker(f - Id_E) \Leftrightarrow f(x, y, z) - (x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 6y + 4z = 0 \\ 3x - 8y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = y = z.$$
   Donc $Ker(f - Id_E) = \{(x, x, x)/x \in \mathbb{R}\} = Vect((1, 1, 1))$.
   La famille $((1, 1, 1))$ *est une famille génératrice de* $Ker(f - Id_E)$ *et est une famille libre car formée d'un seul vecteur non nul.*
   Donc $((1, 1, 1))$ *est une base de* $Ker(f - Id_E)$.
4. (a) *Par définition* $Ker(f^2 + Id_E) = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3/(f^2 + Id_E)(\overrightarrow{u}) = 0\}$.
   On souhaite montrer que $f(Ker(f^2 + Id_E)) \subset Ker(f^2 + Id_E)$.
   Soit $\overrightarrow{u} \in Ker(f^2 + Id_E)$. *Cela signifie que* $(f^2 + Id_E)(\overrightarrow{u}) = 0$ *donc que* $f^2(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}$.
   On veut montrer que $f(\overrightarrow{u}) \in Ker(f^2 + Id_E)$.
   On a $(f^2 + Id_E)(f(\overrightarrow{u})) = f^3(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{u}) = f(f^2(\overrightarrow{u})) + f(\overrightarrow{u}) = f(-\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{u}) = 0$.
   Donc on a bien $f(\overrightarrow{u}) \in Ker(f^2 + Id_E)$.
   Ainsi, $Ker(f^2 + Id_E)$ *est stable par* f.

   (b) *Pour déterminer* $Ker(f^2 + Id_E)$ *le plus simple est d'utiliser la matrice de* f^2 *dans la base canonique (c'est-à-dire* A^2*) car :* $(x, y, z) \in Ker(f^2 + Id_E) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A^2 + I_3)$.
   Or, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, *donc*
   $$(x, y, z) \in Ker(f^2 + Id_E) \Leftrightarrow (A^2 + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = x + z.$$
   Donc $Ker(f^2 + Id_E) = \{(x, x + z, z)/(x, z) \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1, 1, 0), (0, 1, 1))$.
   La famille $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ *est génératrice de* $Ker(f^2 + Id_E)$ *et cette famille est libre car formée de deux vecteurs non proportionnels.*
   Ainsi, $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ *est une base de* $Ker(f^2 + Id_E)$.
5. - *On a* $\dim(Ker(f - Id_E)) + \dim(Ker(f^2 + Id_E)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
   - *Soit* $\overrightarrow{u} \in Ker(f - Id_E) \cap Ker(f^2 + Id_E)$.
     Comme $\overrightarrow{u} \in Ker(f - Id_E)$ *on a* $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ *donc* $f^2(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$.
     Or, on sait aussi que $\overrightarrow{u} \in Ker(f^2 + Id_E)$ *donc* $f^2(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}$.
     Donc $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$ *et ainsi* $\overrightarrow{u} = 0$.
     Ainsi, $Ker(f - Id_E) \cap Ker(f^2 + Id_E) = \{0\}$.

   En conclusion, $\mathbb{R}^3 = Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f^2 + Id_E)$.
6. *On considère la famille* $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ *avec* $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, 1, 0)$ *et* $e'_3 = (0, 1, 1)$. $\mathcal{B}'$ *est une base adaptée à la somme précédente.*
   On a $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = 2e'_2 - 5e'_3$ *et* $f(e'_3) = e'_2 - 2e'_3$.
   Donc la matrice de f *dans la nouvelle base est* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 9. *1. Vu que p est le plus petit entier tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, l'endomorphisme u^{p-1} n'est pas nul. Il existe donc un vecteur $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.*

2. Soient des scalaires $\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1} \in K$ tels que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0_E$. En appliquant $u^{p-1} = u \circ \cdots \circ u$ à cette égalité, on obtient (par linéarité)

$$\lambda_0 u^{p-1}(x_0) + \lambda_1 u^p(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{2p-2}(x_0) = u^{p-1}(0_E) = 0_E.$$

Vu que tous les vecteurs $u^k(x_0)$ sont nuls pour $k \geq p$, il reste

$$\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0_E,$$

et donc (puisque $u^{p-1}(x_0) \neq 0_E$), on en déduit $\lambda_0 = 0$.
En reportant dans la relation initiale, on a

$$\lambda_1 u(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0_E.$$

Cette fois-ci, on applique u^{p-2} et on en déduit $\lambda_1 = 0$. Une récurrence simple montre alors que

$$\lambda_0 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0,$$

et donc que la famille $(x_0, u(x_0), \cdots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.

3. Dans l'espace vectoriel E, de dimension n, toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à n. La famille $(x_0, u(x_0), \cdots, u^{p-1}(x_0))$ est libre et de cardinal p, donc $p \leq n$.
On a donc (puisque $n - p \in \mathbb{N}$) : $u^n = u^p \circ u^{n-p} = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ u^{n-p} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

4. Si $p = n$, alors la famille $(x_0, u(x_0), \cdots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E, notée $\mathcal{B}$.
La matrice de l'endomorphisme u dans cette base est très simple :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{cc} u(x_0) u^2(x_0) \cdots u^{n-1}(x_0) u^n(x_0) & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_0 \\ u(x_0) \\ \vdots \\ u^{n-2}(x_0) \\ u^{n-1}(x_0) \end{matrix} \end{array}.$$

Cette matrice est évidemment de rang $n-1$ (les $n-1$ premières colonnes sont libres, puisqu'échelonnées), et la dernière colonne est nulle). Donc $rg(u) = n-1$.

Corrigé de l'exercice 10. *1. Montrons que la famille $\mathcal{B}'$ est libre.*
On cherche tous les réels $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$a_1 e'_1 + a_2 e'_2 + \ldots + a_n e'_n = 0.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & a_1 e'_1 + a_2 e'_2 + \ldots + a_n e'_n = 0 \\ \Rightarrow & a_1(e_2 + \ldots + e_n) + a_2(e_1 + e_3 + \ldots + e_n) + \ldots + a_n(e_1 + \ldots + e_{n-1}) = 0 \\ \Rightarrow & (a_2 + \ldots + a_n)e_1 + (a_1 + a_3 + \ldots + a_n)e_2 + \ldots + (a_1 + \ldots + a_{n-1})e_n = 0 \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{c} a_2 + \ldots + a_n = 0 \\ a_1 + a_3 + \ldots + a_n = 0 \\ \vdots \\ a_1 + \ldots + a_{n-1} = 0 \end{array} \right. \quad \text{car la famille } \mathcal{B} \text{ est libre} \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} a_2 + \ldots + a_n = 0 & \\ a_1 - a_2 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ a_1 - a_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \vdots & \\ a_1 - a_n = 0 & L_n \leftarrow L_n - L_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (n-1)a_1 = 0 \\ a_2 = a_1 \\ a_3 = a_1 \\ \vdots \\ a_n = a_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ \vdots \\ a_n = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre.
Ainsi, la famille $\mathcal{B}'$ est une famille libre de n vecteurs et $\dim(E) = n$, donc $\mathcal{B}'$ est une base de E.

2. *Par définition des vecteurs* e'_j, *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *est :* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Il nous faut maintenant exprimer les vecteurs e_i *en fonction des* e'_j.
   Pour cela, on commence par remarquer que $\sum_{j=1}^n e'_j = (n-1)\sum_{i=1}^n e_i$.
   Et comme $e_j = \sum_{i=1}^n e_i - e'_j$, *on a donc* $e_j = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n e'_i - e'_j$.

   Donc la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ *à* $\mathcal{B}$ *est* $Q = \dfrac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2-n \end{pmatrix}$.

   On retrouve bien que $PQ = I$*...*

Corrigé de l'exercice 11. 1. *Pour toute matrice* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, *on a*

$$M = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{1,1}} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{1,2}} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{2,1}} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E_{2,2}},$$

et cette combinaison est nulle si et seulement si $a = b = c = d = 0$. *Ceci montre que la famille* $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ *engendre le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, *et qu'elle est libre. Cette famille est donc une base de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, *qui est donc un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* 4.

2. *Non, car* G *n'est pas stable par multiplication externe (la propriété* $M \in G \implies \lambda M \in G$ *est fausse pour certains* $\lambda \in \mathbb{C}$*) : en effet* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in G$ *mais* $iM = \begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix} \notin G$.

3. *En écrivant* $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$, $d = d_1 + id_2$ *avec* $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} M \quad = \quad & a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + c_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} + d_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \end{aligned},$$

et cette combinaison est nulle si et seulement si les huit coefficients réels sont nuls. Ceci montre que la famille

$$(E_{1,1}; iE_{1,1}; E_{1,2}; iE_{1,2}; E_{2,1}; iE_{2,1}; E_{2,2}; iE_{2,2})$$

est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, *qui est donc un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* 8.

4. - *La matrice nulle est évidemment dans* G.
   - *Si* M *et* N *sont dans* G, *alors pour tout* **réel** λ, *on a* $\lambda M + N \in G$, *puisque :*

$$\left(\overline{\lambda M + N}\right)^T = \left(\overline{\lambda}\ \overline{M} + \overline{N}\right)^T = \left(\lambda\overline{M} + \overline{N}\right)^T = \lambda\overline{M}^T + \overline{N}^T = \lambda M + N,$$

$$tr(\lambda M + N) = \lambda tr(M) + tr(N) = \lambda \times 0 + \times 0 = 0.$$

Donc l'ensemble G *est bien un sous-espace vectoriel du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5. *On a :*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \iff \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } a + d = 0.$$

Ceci se réécrit :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \iff \begin{cases} \overline{a} = a \\ \overline{b} = c \\ \overline{c} = b \\ \overline{d} = d \\ d = -a \end{cases} \iff \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ d = -a \\ c = \overline{b} \end{cases}$$

En utilisant les notations de la question 3., on en déduit :

$$M \in G \iff M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 + ib_2 \\ b_1 - ib_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \text{ avec } (a_1, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Les matrices de G sont donc les matrices de la forme :

$$M = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } (a_1, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Vu qu'une telle combinaison linéaire est nulle ssi $a_1 = b_1 = b_2 = 0$, on en déduit que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right)$$

est génératrice de G et libre, donc c'est une base de G. Finalement $\dim(G) = 3$.

Corrigé de l'exercice 12. *1. Vu que p et q sont linéaires, $p \circ q$ l'est aussi. En outre, puisque $p \circ q = q \circ p$, on a*

$$(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q = (p \circ p) \circ (q \circ q).$$

Mais p et q étant des projecteurs, on a $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$, donc

$$(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ q,$$

ce qui montre que $p \circ q$ est un projecteur.

2. * *Montrons que $Ker(p \circ q) = Ker(p) + Ker(q)$ par double inclusion :*

$\boxed{\subset}$ *Si $x \in Ker(p \circ q)$, alors $p(q(x)) = 0_E$, c'est-à-dire $q(x) \in Ker(p)$.*
En outre, le vecteur $x - q(x)$ est dans $Ker(q)$, puisque :

$$q(x - q(x)) = q(x) - (q \circ q)(x) = q(x) - q(x) = 0_E.$$

Donc on a bien $x = q(x) + (x - q(x)) \in Ker(p) + Ker(q)$.

$\boxed{\supset}$ *Si $x \in Ker(p) + Ker(q)$, alors x se décompose sous la forme*

$$x = x_1 + x_2, \qquad x_1 \in Ker(p), \qquad x_2 \in Ker(q).$$

On en déduit que

$$(p \circ q)(x) = p(q(x_1 + x_2)) = p(q(x_1)) + p(q(x_2)) = q(p(x_1)) + p(q(x_2))$$

(puisque p et q commutent). Mais $p(x_1) = q(x_2) = 0_E$, donc

$$(p \circ q)(x) = q(0_E) + p(0_E) = 0_E,$$

ce qui montre que $x \in Ker(p \circ q)$.

* *Montrons que $Im(p \circ q) = Im(p) \cap Im(q)$ par double inclusion :*

$\boxed{\subset}$ *$Im(p \circ q) = p(q(E)) = p(q(E)) \cap q(p(E))$ (puisque p et q commutent).*
On en déduit $Im(p \circ q) \subset p(E) \cap q(E) = Im(p) \cap Im(q)$.

$\boxed{\supset}$ *Si $x \in Im(p) \cap Im(q)$, alors il existe t_1 et t_2 dans E tels que*

$$x = p(t_1) = q(t_2).$$

D'où (en appliquant p) :

$$(p \circ q)(t_2) = (p \circ p)(t_1) = p(t_1) = x,$$

ce qui montre que $x \in Im(p \circ q)$.

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 13. *1. D'après la formule de Grassmann,* $\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2) = 2n - 2 - \dim(H_1 \cap H_2)$.
Or, $\dim(H_1 + H_2) \leqslant n$ *car* $H_1 + H_2 \subset E$*, donc* $\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant 2n - 2 - n = n - 2$.

2. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(k)$ *:* $\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_k) \geqslant n - k$*, est vraie pour tout* $k \in [\![1; n]\!]$.

- *Pour* $k = 1$*, la propriété est bien vérifiée car* $\dim(H_1) = n - 1 \geqslant n - 1$.
- *Soit* $k \in [\![1; n-1]\!]$ *fixé. Supposons que* $\mathcal{P}(k)$ *est vraie.*
  On a alors, d'après la formule de Grassmann :

$$\dim\left((H_1 \cap \ldots \cap H_k) \cap H_{k+1}\right) = \dim(H_1 \cap \ldots \cap H_k) + \dim(H_{k+1}) - \dim\left((H_1 \cap \ldots \cap H_k) + H_{k+1}\right).$$

  Or, $\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_k) \geqslant n - k$, $\dim(H_{k+1}) = n - 1$ *et* $\dim\left((H_1 \cap \ldots \cap H_k) + H_{k+1}\right) \leqslant n$.
  Donc :

$$\dim\left(H_1 \cap \ldots \cap H_k \cap H_{k+1}\right) \geqslant n - k + n - 1 - n = n - k - 1.$$

  $\mathcal{P}(k+1)$ *est bien vérifiée.*

Grâce au principe de récurrence, on a montré que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_k) \geqslant n - k$.

Corrigé de l'exercice 14. *1.*
- *Le polynôme nul appartient à* F*, car* $0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]} \times P$.
- *Si* $R_1, R_2 \in F$*, alors, pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$*, le polynôme* $\lambda R_1 + R_2$ *est dans* F *:*
  en effet, il existe Q_1*,* Q_2 *dans* $\mathbb{K}[X]$ *tel que* $R_1 = Q_1 P$ *et* $R_2 = Q_2 P$*, donc*

$$\lambda R_1 + R_2 = (\lambda Q_1 + Q_2) P.$$

Donc F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}[X]$.

2.
- *L'intersection* $F \cap \mathbb{K}_{n-1}[X]$ *est réduite à* $0_{\mathbb{K}[X]}$.
  En effet : si $R \in F \cap \mathbb{K}_{n-1}[X]$*, alors il existe* $Q \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $R = QP$ *(car* $R \in F$*).*
  Si $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$*, alors* $\deg(R) = \deg(Q) + \deg(P) \geq \deg(P) = n$*, ce qui contredit le fait que* $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$*. Donc* $Q = 0$*, ce qui entraîne* $R = 0$.
- $F + \mathbb{K}_{n-1}[X] = \mathbb{K}[X]$.
  En effet, tout polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ *se décompose comme somme d'un polynôme de* F *et d'un polynôme de* $\mathbb{K}_{n-1}[X]$*, car en effectuant la division euclidienne de* R *par* P*, il existe un unique couple* $(Q, T) \in \mathbb{K}[X]$ *tel que*

$$R = QP + T, \text{ avec } \deg(T) < \deg(P) = n,$$

  (Q *est le quotient et* T *est le reste) et on a bien* $QP \in F$*,* $T \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Corrigé de l'exercice 15. *1. Par définition,* $F + F' + (G \cap G')$ *est l'ensemble des vecteurs de* E *de la forme* $x_1 + x_2 + x_3$ *avec* $x_1 \in F$*,* $x_2 \in F$*,* $x_3 \in G \cap G'$.

2. Soit $x \in E$*. Puisque* $E = F + G$*, il existe* $(x_1, x_2) \in F \times G$ *tel que* $x = x_1 + x_2$*. Mais puisqu'on a aussi* $E = F' + G'$*, le vecteur* x_2 *se décompose : il existe* $(x_3, x_4) \in F' + G'$ *tel que* $x_2 = x_3 + x_4$*. Donc :*

$$x = x_1 + x_3 + x_4, \text{ avec } x_1 \in F,\ x_3 \in F',\ x_4 \in G'.$$

En outre, $x_3 \in F'$ *et* $F' \subset G$ *donc* $x_3 \in G$*. Enfin,* $x_4 = x_2 - x_3$ *avec* $x_2 \in G$ *et* $x_3 \in G$*, donc (par stabilité de* G*),* $x_4 \in G$*. Finalement, on a*

$$x = x_1 + x_3 + x_4, \text{ avec } x_1 \in F,\ x_3 \in F',\ x_4 \in G \cap G',$$

ce qui montre bien que $x \in F + F' + (G \cap G')$.

3. Supposons que $x_1 + x_2 + x_3 = 0_E$*, avec* $x_1 \in F, x_2 \in F'$ *et* $x_3 \in G \cap G'$ *et montrons que* $x_1 = x_2 = x_3 = 0_E$.
Vu que $F' \subset G$*, on a* $x_2 \in G$*, et donc (par stabilité de* G*),* $x_2 + x_3 \in G$ *(puisque* x_3 *est aussi dans* G*). On a donc* $x_1 + (x_2 + x_3) = 0_E$ *avec* $x_1 \in F$ *et* $(x_2 + x_3) \in G$*. Puisque* F *et* G *sont en somme directe, cela entraîne que* $x_1 = 0_E$ *et* $x_2 + x_3 = 0_E$.
En outre, $x_2 \in F'$ *et* $x_3 \in G'$*, donc (puisque* F' *et* G' *sont en somme directe), l'égalité* $x_2 + x_3 = 0_E$ *entraîne* $x_2 = x_3 = 0_E$.

4. *La question 2. montre que $F + F' + (G \cap G') = E$, puisqu'elle établit l'inclusion $E \subset F + F' + (G \cap G')$ et que l'inclusion $F + F' + (G \cap G') \subset E$ est évidente (une somme d'éléments de E est toujours dans E).*
   En outre, la question 3. montre que $F + F' + (G \cap G') = F \oplus F' \oplus (G \cap G')$.
   Donc finalement, on a bien
$$F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E.$$

Corrigé de l'exercice 16. 1. *Pour tout i, le coefficient d'indice (i,i) de la matrice A^2 est*
$$(A^2)[i,i] = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,i},$$
donc en sommant pour $i = 1, 2, \cdots, n$, on obtient
$$tr(A^2) = \sum_{i=1}^{n} (A^2)[i,i] = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,i} \right) = \sum_{(i,k) \in [1,n]^2} a_{i,k} \times a_{k,i},$$
c'est-à-dire $tr(A^2) = S(A)$.

2. *Supposons que $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$. On a alors, en utilisant la propriété $tr(CD) = tr(DC)$ (valable pour toutes matrices carrées C et D) :*
$$S(B) = tr(B^2) = tr((P^{-1}AP)^2) = tr(P^{-1}A^2P) = tr(PP^{-1}A^2) = tr(A^2) = S(A).$$

Corrigé de l'exercice 17.
On procède par double implication.

- $\boxed{\Longrightarrow}$ *Supposons $Ker(f^2) = Ker(f)$, et montrons $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$. L'inclusion $\{0_E\} \subset Ker(f) \cap Im(f)$ est évidente, car $Ker(f)$ et $Im(f)$ étant des sev de E, ils contiennent 0_E.*
  Pour l'inclusion réciproque $Ker(f) \cap Im(f) \subset \{0_E\}$, on utilise des éléments. Si $x \in Ker(f) \cap Im(f)$, alors on a $f(x) = 0_E$ (car $x \in Ker(f)$) et il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$ (car $x \in Im(f)$). Ceci entraîne $f(f(t)) = 0_E$, c'est-à-dire $t \in Ker(f^2)$. Mais par hypothèse, $Ker(f^2) = Ker(f)$, donc $t \in Ker(f)$, et $x = f(t) = 0_E$.
  En conclusion, on a donc bien $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$.
- $\boxed{\Longleftarrow}$ *Supposons $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$, et montrons qu'on a alors $Ker(f^2) = Ker(f)$. Déjà, l'inclusion $Ker(f) \subset Ker(f^2)$ est toujours vraie car*
$$x \in Ker(f) \implies f(x) = 0_E \implies f(f(x)) = f(0_E) = 0_E,$$
  c'est-à-dire $x \in Ker(f^2)$.
  Réciproquement, si $x \in Ker(f^2)$, on a $f(f(x)) = 0_E$, c'est-à-dire $f(x) \in Ker(f)$. De plus, $f(x) \in Im(f)$ (puisque $Im(f) = f(E)$), donc $f(x) \in Ker(f) \cap Im(f)$. Mais par hypothèse, $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$ donc $f(x) = 0_E$, c'est-à-dire $x \in Ker(f)$. D'où $Ker(f^2) \subset Ker(f)$.
  Finalement, on a bien l'égalité ensembliste $Ker(f) = Ker(f^2)$.

Corrigé de l'exercice 18. • *On analyse d'abord : supposons que $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit solution de l'équation. On a alors $X + tr(X)A = B$, et donc*
$$tr\left(X + tr(X)A\right) = tr(B),$$
ce qui équivaut (par linéarité de la trace) à :
$$tr(X) + tr(X)tr(A) = tr(B),$$
ou encore à
$$tr(X)\left(1 + tr(A)\right) = tr(B).$$
Deux cas se présentent alors :

* *si $tr(A) \neq -1$, alors $tr(X) = \frac{tr(B)}{1+tr(A)}$ et donc (en reportant dans l'équation de départ) :*

$$X = B - \frac{tr(B)}{1+tr(A)}A.$$

* *si $tr(A) = -1$, alors on a nécessairement $tr(B) = 0$.*

- *Synthèse :*
  * *Si $tr(A) \neq -1$, alors le calcul précédent montre que l'équation possède au plus une solution : la matrice $X = B - \frac{tr(B)}{1+tr(A)}A$. On vérifie qu'elle fonctionne :*

$$\begin{aligned} X + tr(X)A &= \left(B - \frac{tr(B)}{1+tr(A)}A\right) + tr\left(B - \frac{tr(B)}{1+tr(A)}A\right)A \\ &= B - \frac{tr(B)}{1+tr(A)}A + \left(tr(B) - \frac{tr(B)}{1+tr(A)}tr(A)\right)A \\ &= B + \underbrace{\left(-\frac{tr(B)}{1+tr(A)} + tr(B) - \frac{tr(B)tr(A)}{1+tr(A)}\right)}_{=0}A \\ &= B \end{aligned}.$$

  L'équation possède donc une unique solution.
  * *Si $tr(A) = -1$, alors il y a deux sous-cas :*
    - *si $tr(B) \neq 0$, alors l'équation ne possède pas de solution.*
    - *si $tr(B) = 0$, alors le calcul précédent ne donne pas d'indication.*
      Mais on remarque (d'après la forme de l'équation) que toute solution est de la forme $X = B + \lambda A$ (avec $\lambda = tr(X) \in \mathbb{K}$). En injectant cette forme dans l'équation, on obtient

$$\begin{aligned} X + tr(X)A &= B + \lambda A + tr(B + \lambda A)A \\ &= B + (\lambda + tr(B) + \lambda tr(A))\, A = B + (\lambda - \lambda)A = B, \end{aligned}$$

      et ce pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. On en conclut que dans ce cas, l'ensemble des solutions est $B + Vect(A)$.

- *Résumé : en notant $S = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ X + tr(X)A = B\}$, on a*
  * *$tr(A) \neq -1 \implies S = \left\{B - \frac{tr(B)}{1+tr(A)}A\right\}$ (1 unique solution).*
  * *$tr(A) = -1$ et $tr(B) \neq 0 \implies S = \emptyset$ (0 solutions).*
  * *$tr(A) = -1$ et $tr(B) = 0 \implies S = B + Vect(A)$ (Infinité de solutions).*

  On remarque la structure de sous-espace affine de S (normal, l'équation de départ est une équation linéaire).

Corrigé de l'exercice 19. *1. La famille $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est une famille libre de $Im(f)$ qui contient n vecteurs donc $\dim(Im(f)) \geqslant n$.*

2. On cherche tous les réels a_1, ..., a_n tels que $a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = 0$.
En appliquant f, grâce à sa linéarité, on obtient $a_1f(u_1) + \ldots + a_nf(u_n) = 0$.
Or, on sait que la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre.
Donc $a_1f(u_1) + \ldots + a_nf(u_n) = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0$.
La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est donc libre.

3. — *Comme $f \circ f = 0$, si $u \in Im(f)$ alors $u = f(v)$ et donc $f(u) = f(f(v)) = 0$, c'est-à-dire $u \in Ker(f)$.*
Ainsi, $Im(f) \subset Ker(f)$.
— *D'après le point précédent, $\dim(Im(f)) \leqslant \dim(Ker(f))$. Et donc, en utilisant le théorème du rang, on obtient $2\dim(Im(f)) \leqslant 2n$, c'est-à-dire $\dim(Im(f)) \leqslant n$.*
Or, dans la question 1., on a montré que $\dim(Im(f)) \geqslant n$.
Donc on a $\dim(Im(f)) = n$ et, d'après le théorème du rang, $\dim(Ker(f)) = n$.

En conclusion, $Im(f) \subset Ker(f)$ et $\dim(Im(f)) = \dim(Ker(f))$, donc $Im(f) = Ker(f)$.

4. — *Grâce aux questions précédentes, $\dim(Ker(f)) + \dim(Vect(u_1, \ldots, u_n)) = 2n = \dim(E)$.*

— *Soit* $u \in Ker(f) \cap Vect(u_1, \ldots, u_n)$.
On a alors $f(u) = 0$ *et* $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ *avec* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.
Avec ces deux informations, on obtient $\alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_n f(u_n) = 0$.
Or, la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ *est libre donc* $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ *et ainsi* $u = 0$.
On a donc montré que $Ker(f) \cap Vect(u_1, \ldots, u_n) = \{0\}$.

En conclusion $E = Ker(f) \oplus Vect(u_1, \ldots, u_n)$.

Corrigé de l'exercice 20. *1.* • *Une matrice* $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ *est dans* S *si et seulement si*

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On peut écrire cette matrice en fonction des matrices élémentaires $(E_{i,j})$ *:*

$$M = a_{1,1}E_{1,1} + \cdots + a_{n,n}E_{n,n} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}).$$

Donc $S = Vect(E_{1,1}, \cdots, E_{n,n}, (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}))$, *ce qui montre que* S *est un sous-espace vectoriel de* E. *De plus, une telle combinaison linéaire est nulle ssi tous les coefficients* $a_{i,j}$ *sont nuls, donc la famille* $(E_{1,1}, \cdots, E_{n,n}, (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}))$ *est libre, c'est donc une base de* S. *On en déduit que* $\dim(S) = n + \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

• *Une matrice* $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ *est dans* A *si et seulement si*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{1,n-1} & -a_{2,n-1} & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ -a_{1,n} & -a_{2,n} & \cdots & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

On peut écrire cette matrice en fonction des matrices élémentaires $(E_{i,j})$ *:*

$$M = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}(E_{i,j} - E_{j,i}).$$

Donc $A = Vect((E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n})$, *ce qui montre que* A *est un sous-espace vectoriel de* E. *De plus, une telle combinaison linéaire est nulle ssi tous les coefficients* $a_{i,j}$ *sont nuls, donc la famille* $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ *est libre, c'est donc une base de* A. *On en déduit que* $\dim(A) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

2. D'après la question précédente, on a

$$\dim(S) + \dim(A) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim(E).$$

De plus, $S \cap A = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ *car si* $M \in S \cap A$, *on a* $M^T = M$ *et* $M^T = -M$, *donc* $M = -M$, *ce qui donne* $2M = 0$, *puis* $M = 0$. *Ceci montre bien que* $E = S \oplus A$.