TD2 : Compléments d'algèbre linéaire

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I A faire en priorité

Exercice 1 (Une famille libre de polynômes).
Soient $n \in \mathbb{N}$, $z_0, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts.
Montrer que la famille $((X - z_k)^n)_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.
On pourra procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ et utiliser la dérivation.

Exercice 2 (*Une base polynomiale).
Pour des entiers $0 \leq k \leq n$, on pose $P_{k,n} = X^k(1 - X)^{n-k}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{B}_n = (P_{0,n}, P_{1,n}, \cdots, P_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
On pourra procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (La famille des fonctions exponentielles).
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). On considère la famille $\mathcal{A} = (f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ où pour tout réel a, on note $f_a : x \mapsto e^{ax}$.

1. La fonction $x \mapsto |x|$ appartient-elle à $Vect(\mathcal{A})$?
2. La famille $\mathcal{A}$ est-elle génératrice de E ?
3. Montrer que la famille $\mathcal{A}$ est libre.
   Indication : étant donnée une combinaison linéaire nulle, on montrera par récurrence que chaque coefficient est nul en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 4 (Supplémentaire d'une droite).
Dans $E = \mathbb{R}^n$, on pose $e = (1, 0, \cdots, 0)$, $D = Vect(e)$ et $H = \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$.
Montrer que $E = D \oplus H$.

Exercice 5 (Supplémentaires dans les polynômes).
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) \leqslant 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6 (Fonctions paires/impaires).
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires et l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires.

Exercice 7 (*Somme directe de n sous-espaces vectoriels).
On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et pour tout $i \in [\![0; n]\!]$ on note :

$$F_i = \{P \in E \ / \ \forall j \in [\![0; n]\!] \setminus \{i\}, \quad P(j) = 0\}.$$

On admet que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $E = F_0 \oplus F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$.

Exercice 8 (Matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée).
Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3 \qquad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \qquad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

1. Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Construire la matrice représentative de f dans la base canonique.

3. On rappelle que Id_E désigne l'application identité de E dans E.
   (a) Sans expliciter $Ker(f - Id_E)$, montrer que le sev $Ker(f - Id_E)$ est stable par f.
   Rappel : un sev G est dit stable par f lorsque $f(G) \subset G$.
   (b) Déterminer $Ker(f - Id_E)$ et en donner une base.
4. (a) Sans expliciter $Ker(f^2 + Id_E)$, montrer que le sev $Ker(f^2 + Id_E)$ est stable par f.
   (b) Déterminer $Ker(f^2 + Id_E)$ et en donner une base.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f^2 + Id_E)$.
6. Déterminer la matrice représentative de f dans une base adaptée à la somme directe précédente.

Exercice 9 (Endomorphismes nilpotents).
Etant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un endomorphisme nilpotent u de E, c'est-à-dire $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ avec $u^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On pose alors :

$$p = \min\{k \in \mathbb{N}^*,\ u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}\}.$$

1. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.
2. Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \cdots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.
3. En déduire que $p \leq n$ et que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4. Déterminer le rang de l'application u dans le cas où $p = n$.

Exercice 10 (Matrices de passages).
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $e'_j = (\sum_{i=1}^n e_i) - e_j$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est une base de E.
2. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Exercice 11 (Matrices de Pauli).

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on note $\overline{M} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$ la conjuguée de M.

On note G l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $M = \overline{M}^T$ et $tr(M) = 0$.
On considère d'abord $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1. Déterminer une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Quelle est sa dimension ?
2. L'ensemble G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

On considère maintenant $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

3. Déterminer une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Quelle est sa dimension ?
4. Montrer que l'ensemble G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
5. Donner une base de G. Quelle est sa dimension ?

Exercice 12 (*Projecteurs qui commutent).
Soient p, q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2. Montrer que $Ker(p \circ q) = Ker(p) + Ker(q)$ et $Im(p \circ q) = Im(p) \cap Im(q)$.

II Exercices supplémentaires

Exercice 13 (Des hyperplans).
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.
On considère H_1, H_2, $\ldots$, H_n des hyperplans de E.

1. À l'aide de la formule de Grassmann vue en TSI 1, montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n - 2$.

2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur k, montrer que :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \quad \dim(H_1 \cap \ldots \cap H_k) \geqslant n-k.$$

Exercice 14 (Somme directe dans les polynômes).
On fixe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$. On note F l'ensemble des polynômes multiples de P, c'est-à-dire $F = \{Q \times P,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{K}[X] = F \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
   On pourra utiliser une division euclidienne.

Exercice 15 (Somme de trois sous-espaces).
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels de E.
On suppose $E = F \oplus G$, $E = F' \oplus G'$ et $F' \subset G$.

1. Qu'est-ce que le sous-espace somme $F + F' + (G \cap G')$?
2. Montrer que tout vecteur $x \in E$ est dans $F + F' + (G \cap G')$.
   On pourra s'appuyer sur le fait que $E = F + G$, mais aussi $E = F' + G'$.
3. Montrer que les trois sous-espaces $F, F', G \cap G'$ sont en somme directe.
4. Montrer finalement que $F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E$.

Exercice 16.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $S(A) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[1,n]^2} a_{i,j} \times a_{j,i}$.

1. Exprimer $S(A)$ en fonction de la trace de A^2.
2. Montrer que si A et B sont semblables, alors $S(A) = S(B)$.

Exercice 17 (*).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $Ker(f) = Ker(f^2)$ si et seulement si $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$.

Exercice 18 (*Equation matricielle).
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre l'équation $X + tr(X)A = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On pourra procéder par analyse-synthèse.

Exercice 19 (*).
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On considère f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = 0$.
On suppose, de plus, qu'il existe des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ tels que la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre.

1. Montrer que $\dim(Im(f)) \geqslant n$.
2. Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.
3. Montrer que $Ker(f) = Im(f)$.
4. Montrer que $E = Ker(f) \oplus Vect(u_1, \ldots, u_n)$.

Exercice 20 (*Matrices symétriques/antisymétriques).
Soit un entier $n \geq 2$. Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les ensembles

$$S = \{M \in E,\ M^T = M\}, \qquad A = \{M \in E,\ M^T = -M\}$$

(matrices symétriques et antisymétriques).

1. Justifier que S et A sont deux sev de E et préciser leur dimension.
   On cherchera une base de ces deux sous-espaces.
2. Montrer que $E = S \oplus A$.