Corrigé du TD1 : Séries numériques

I Exercices à traiter en priorité

Corrigé de l'exercice 1. *1. Puisque $n \in \mathbb{N}$ et $n^2+4n+3=(n+1)(n+2)$, le dénominateur ne s'annule jamais (il est toujours strictement positif). Donc le terme u_n est bien défini pour tout entier naturel n.*

2. Pour tous réels a,b et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{a}{n+1}+\frac{b}{n+3}=\frac{a(n+3)+b(n+1)}{(n+1)(n+3)}=\frac{(a+b)n+(3a+b)}{n^2+4n+3}.$$

Donc pour que cette quantité soit égale à u_n pour toute valeur de n, il faut et il suffit que $\begin{cases} a+b=0 \\ 3a+b=1 \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} a=1/2 \\ b=-1/2 \end{cases}$
Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n=\frac{1/2}{n+1}-\frac{1/2}{n+3}.$$

3. Fixons $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1/2}{k+1}-\frac{1/2}{k+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+3}\right).$$

En effectuant le changement d'indice $k \leftarrow k+2$ dans la seconde somme, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1/2}{k+1}-\frac{1/2}{k+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{k+1}\right).$$

Simplifions maintenant :

- *Si $n \geq 2$, alors on a*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\underbrace{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}}_{=0}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right),$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right).$$

- *Si $n=0$ ou $n=1$, alors on vérifie sans peine que cette relation reste vraie.*

On a donc bien la relation voulue.

4. En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient que $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}$, ce qui montre que la série $\sum u_n$ converge, et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k=\frac{3}{4}$.

Corrigé de l'exercice 2. *1. Une série de Riemann $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$. Ici, $\alpha=3$, donc la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^3}$ converge. Cela revient à dire que la suite (S_n) est convergente.*

2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$, donc

$$\forall k \geq 2, \quad \forall x \in [\![k-1;k]\!], \qquad \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x}.$$

Par croissance de l'intégrale, ceci entraîne

$$\forall k \geq 2, \quad \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^3} dx,$$

c'est-à-dire

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^3} dx.$$

3. *Fixons des entiers n, M tels que $1 \leq n < M$. En sommant les inégalités précédemment obtenues pour $k = n+1 \cdots M$ (ce qui est possible car $n+1 \geq 2$), on obtient*

$$\sum_{k=n+1}^{M} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^{M} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^3} dx = \int_{n}^{M} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2M^2}.$$

Puisque $\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2M^2} \leq \frac{1}{2n^2}$, on en déduit l'inégalité voulue.

4. *Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \lim_{M \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{M} \frac{1}{k^3}.$$

Puisque la majoration $\sum_{k=n+1}^{M} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2n^2}$ est valable pour tout entier $M > n$, on en déduit par passage à la limite (lorsque $M \to +\infty$) dans cette inégalité que $R_n \leq \frac{1}{2n^2}$.

5. *La suite S_n est croissante (puisque le terme général de la somme $\frac{1}{k^3}$ est positif). On a donc $S_n \leq S$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'où*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |S - S_n| = S - S_n = R_n \leq \frac{1}{2n^2}.$$

Pour avoir $|S - S_n| \leq 10^{-4}$, il suffit donc que $\frac{1}{2n^2} \leq 10^{-4}$, c'est-à-dire $n \geq \frac{100}{\sqrt{2}} \simeq 70,7$. L'entier $n_0 = 71$ convient, ce qui montre que

$$S_{71} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{70^3} + \frac{1}{71^3}$$

est une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Remarque.

Jusqu'à ce jour, on ne sait pas calculer la valeur exacte de $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

On sait seulement (depuis 1978) que $S \notin \mathbb{Q}$.

Corrigé de l'exercice 3.

On procède par téléscopage dans les trois cas : on travaille sur **les sommes partielles** *(impossible de travailler directement avec les sommes infinies car on ne peut pas séparer une série convergente en plusieurs séries divergentes !).*

$$\forall n \geq 2, \qquad S_1^{(n)} := \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1/2}{k-1} - \frac{1/2}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on en déduit $S_1 = \frac{3}{4}$.

$$\forall n \geq 1, \qquad S_2^{(n)} := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right).$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on en déduit $S_2 = \dfrac{1}{4}$.

$$\forall n \geq 2, \qquad S_3^{(n)} := \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k)) = -\ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on en déduit $S_3 = -\ln(2)$.

Corrigé de l'exercice 4. *1) $u_n = e^{-\ln(2)/n} \to 1$, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

2) $u_n \sim \frac{1}{n^3} > 0$, donc (par le critère des équivalents), la série $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n^3}$, donc elle converge (par le critère de Riemann).

3) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Puisque $n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim 1$, on a $u_n \to e^1$, et donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

4) En faisant un DL, on obtient $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$, donc $\sum u_n$ converge (en combinant le critère de Riemann et celui des équivalents).

5) $u_n \sim \frac{1}{n^3}$, donc $\sum u_n$ converge.

6) La série $\sum u_n$ est absolument convergente, puisque $|u_n| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ et la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Donc $\sum u_n$ converge.

7) $u_n \sim \frac{1}{2^n} > 0$, et la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge. Donc, par le critère des équivalents, $\sum u_n$ converge.

8) $u_n \sim \frac{1}{n^2}$, donc $\sum u_n$ converge.

9) $u_n = \left(\frac{1}{2^x}\right)^n = \left(e^{-x\ln(2)}\right)^n$, donc $\sum u_n$ est une série géométrique.

- *Si $x > 0$, alors $0 < e^{-x\ln(2)} < 1$, donc $\sum u_n$ converge.*
- *Si $x \leq 0$, alors $e^{-x\ln(2)} \geq 1$, donc $\sum u_n$ diverge.*

Corrigé de l'exercice 5. *1) $u_n \sim \frac{n}{2^{n-1}} > 0$, donc $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{n}{2^{n-1}} := \sum a_n$. Or, par le critère de d'Alembert, $\sum a_n$ converge (puisque $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2} < 1$) donc $\sum u_n$ converge.*

2) $u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$, donc (par le critère des équivalents), $\sum u_n$ diverge (puisque $\sum \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge par le critère de Riemann).

3) Pour n suffisamment grand, on a $\ln(n)^2 \leq n$. En effet, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2(n)}{n} = 0$, donc à partir d'un certain rang n_0, on a $0 < \frac{\ln^2(n)}{n} \leq 1$. On en déduit que $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq \dfrac{1}{n}$, et donc que $\sum u_n$ diverge (par le critère de comparaison), puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

4) Le critère de d'Alembert montre que $\sum u_n$ converge (puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-2n-1} \to 0 < 1$).

5) On a $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En effet :

$$n^2 u_n = n^{3/2} e^{-\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n})^3}{e^{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée). On en déduit que pour n suffisamment grand, on a $0 < u_n \leq \frac{1}{n^2}$, et donc (par le critère de comparaison) que $\sum u_n$ converge (puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge).

6) Le critère de d'Alembert montre que $\sum u_n$ converge (puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{1}{n+1}} \to 0 < 1$).

7) Le critère de d'Alembert montre que $\sum u_n$ diverge (puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$).

8) Pour n suffisamment grand, on a $\ln(n) \leq \sqrt{n}$. En effet, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$, donc à partir d'un certain rang n_0, on a $0 < \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \leq 1$. On en déduit que $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq \dfrac{1}{n}$, et donc que $\sum u_n$ diverge (par le critère de comparaison), puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

9) *Posons, pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$. On a $u_n \geq 0$, et pour n suffisamment grand, on a $\ln(n) \geq 2$, donc par croissance de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$:*

$$\forall n \geq e^2, \quad u_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

On conclut en utilisant le critère de comparaison des séries positives : la série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, donc $\sum u_n$ aussi.

Corrigé de l'exercice 6.

On pose $u_n = \dfrac{a^n}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) *Si $a > 0$, alors $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est bien défini, et*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a.$$

D'après le critère de d'Alembert, la série converge si $0 < a < 1$, et diverge si $a > 1$. On ne sait pas pour $a = 1$.

   (b) *Les cas restants à traiter sont $a = 0$ et $a = 1$.*
   - *le cas $a = 0$ est trivial : la suite $\frac{a^n}{n^2}$ est nulle, donc la série converge.*
   - *le cas $a = 1$ est connu : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (c'est une série de Riemann).*

2. (a) *Si $a < -1$, le terme général u_n ne tend pas vers 0, car*

$$|u_n| = \frac{|a|^n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

par croissance comparée (puisque $|a| > 1$). Donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente (on rappelle qu'il est nécessaire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ pour que $\sum u_n$ converge).

   (b) *Ici, on a $|a| \leq 1$. Le plus simple est d'utiliser la majoration $|a|^n \leq 1$, qui entraîne*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_n| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Vu que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit par le critère de comparaison des séries à termes positifs que $\sum |u_n|$ converge, et donc que $\sum u_n$ est absolument convergente.
Comme la convergence absolue entraîne la convergence, on conclut que $\sum u_n$ converge dans ce cas.

3. *La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^2}$ converge si et seulement si $a \in [-1; 1]$.*

Corrigé de l'exercice 7.

Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ convergent (facile à vérifier par le critère de d'Alembert). On en déduit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!}$ converge, et on a

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} + e.$$

Simplifions la première somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + e = 2e.$$

On a donc $S_1 = 2e + e = 3e$.
Ensuite la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$ converge (toujours par le critère de d'Alembert), et on a :

$$S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Lors du calcul de S_1, on a montré que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = e$. Donc

$$S_2 = 2e + 2e + e = 5e.$$

Corrigé de l'exercice 8.
On a $100x = 17,171717\cdots = 17 + x$, *donc* $99x = 17$, *et* $x = \frac{17}{99}$.
On a $100y = 55,123123123\cdots = 55 + z$, *avec* $z = 0,123123123\cdots$.
En outre $1000z = 123,123123123\cdots = 123 + z$, *donc* $z = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$, *et*

$$100y = 55 + \frac{41}{333}, \qquad y = \frac{4589}{8325}.$$

Corrigé de l'exercice 9. *1. Soit* $x = 0,\underbrace{a_1a_2\cdots a_q}\ \underbrace{a_1a_2\cdots a_q}\cdots$. *On a* $x = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{10^k}$ *(où la suite* (a_k) *est q-périodique), donc*

$$10^q x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{q-k} = \sum_{k=1}^{q} a_k 10^{q-k} + \sum_{k=q+1}^{+\infty} a_k 10^{q-k} = \sum_{k=0}^{q-1} a_{q-k}10^k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k+q}10^{-k}.$$

Or, on a $a_{k+q} = a_k$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, *donc*

$$10^q x = \sum_{k=0}^{q-1} a_{q-k}10^k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k} = \left(a_q + 10a_{q-1} + \cdots + 10^{q-1}a_1\right) + x,$$

c'est-à-dire

$$(10^q - 1)x = a_1a_2\cdots a_q.$$

On en déduit $x = \dfrac{a_1a_2\cdots a_q}{10^q - 1} = \dfrac{a_1a_2\cdots a_q}{\underbrace{99\cdots 9}_{q\ fois}}$.

2. *On a* $100x = 429 + 0,123123123\cdots = 429 + \frac{123}{999} = 429 + \frac{41}{333}$, *donc* $x = \frac{71449}{16650}$.

II Exercices supplémentaires

Corrigé de l'exercice 10. *1.*
- *La suite* $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ *est décroissante puisque*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=2n+2}^{2n+3}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \leq 0.$$

- *La suite* $(S_{2n})_{n\geq 1}$ *est croissante puisque*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0.$$

- *On a* $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$, *puisque*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}.$$

Donc les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ *et* $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ *sont adjacentes.*

2. *Etant adjacentes, les sous-suites* $(S_{2n})_{n\geq 1}$ *et* $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ *convergent vers une même limite* $S \in \mathbb{R}$. *Cela entraîne la convergence de la suite* $(S_n)_{n\geq 1}$ *vers le réel* S, *prouvant ainsi que la série* $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ *converge.*

3. *Non, cette série n'est pas absolument convergente, puisque* $\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ *qui est une série divergente.*

4. *L'adjacence des deux sous-suites donne les encadrements suivants :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_{2n} \leq S_{2n+2} \leq S \leq S_{2n+3} \leq S_{2n+1}.$$

D'où les inégalités

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, \quad |S - S_{2n}| \leq S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |S - S_{2n+1}| \leq S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \end{cases}$$

Pour avoir $|S - S_{2n}| \leq 10^{-3}$, *il suffit donc que* $\frac{1}{2n+1} \leq 10^{-3}$, *c'est-à-dire* $n \geq 499,5$. *L'entier* $n = 500$ *convient, ce qui montre que*

$$S_{1000} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}$$

est une valeur approchée de S.

5. *La convergence de la série est très lente, puisqu'il faut additionner* 1000 *termes pour avoir seulement une précision à* 3 *chiffres après la virgule !*

Remarque.
On montrera par la suite qu'en fait $S = \ln(2)$.

Corrigé de l'exercice 11. 1. *Pour tout* $n \geq 1$, *on a* $v_n > 0$, *et*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right) = \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right).$$

On obtient donc après simplification :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^\delta}\right), \qquad \textit{avec } \delta = \min(\beta, 2) > 1.$$

2. *Pour tout* $n \geq 1$, *on a*

$$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^\delta}\right)\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^\delta}\right).$$

Il existe donc une constante $M > 0$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)| \leq \frac{M}{n^\delta}$.
Vu que $\delta > 1$, *la série* $\sum \frac{1}{n^\delta}$ *converge. On conclut par le critère de comparaison que la série* $\sum |\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)|$ *converge, c'est-à-dire que* $\sum(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ *converge absolument.*

3. *D'après la question précédente, la série* $\sum(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ *converge, donc par téléscopage, la* **suite** $\ln(v_n)$ *converge vers un réel* γ. *On en déduit par continuité de l'exponentielle que* $v_n \to e^\gamma > 0$.

4. *Puisque* $e^\gamma = \lim_{n\to+\infty} v_n \neq 0$, *on a* $v_n \sim e^\gamma$, *donc* $u_n \sim \frac{e^\gamma}{n^\alpha}$. *On en déduit (par le critère des équivalents) que la série* $\sum u_n$ *est de même nature que la série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.
Finalement, on a donc $\sum u_n$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Corrigé de l'exercice 12. 1. (a) *C'est évident car le maximum de deux réels est supérieur (ou égal) à ces deux réels !*

(b) *On a* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$.
En effet :
— *si* $u_n \geq 0$, *alors* $u_n^+ = u_n$ *et* $u_n^- = 0$, *donc* $u_n^+ - u_n^- = u_n$.
— *si* $u_n \leq 0$, *alors* $u_n^+ = 0$ *et* $u_n^- = -u_n$ *(puisque* $-u_n \geq 0$*), donc* $u_n^+ - u_n^- = -(-u_n) = u_n$.
La relation $u_n^+ - u_n^- = u_n$ *est donc vraie dans tous les cas.*

(c) *On a* $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| = u_n^+ + u_n^-$.
En effet :
— *si* $u_n \geq 0$, *alors* $u_n^+ = u_n$ *et* $u_n^- = 0$, *donc* $u_n^+ + u_n^- = u_n = |u_n|$.
— *si* $u_n \leq 0$, *alors* $u_n^+ = 0$ *et* $u_n^- = -u_n$, *donc* $u_n^+ + u_n^- = -u_n = |u_n|$.
La relation $u_n^+ + u_n^- = |u_n|$ *est donc vraie dans tous les cas.*

2. *Puisque* $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ *et que* u_n^+ *et* u_n^- *sont positifs, on a les inégalités*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_n^+ \leq |u_n|, \qquad 0 \leq u_n^- \leq |u_n|.$$

Par hypothèse, on sait que $\sum |u_n|$ *converge, donc, puisque* $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on obtient (par le critère de comparaison pour les séries positives), que* $\sum u_n^+$ *converge. De même, on obtient la convergence de la série* $\sum u_n^-$. *Enfin, en utilisant les propriétés algébriques sur la convergence des séries, on obtient que la série "différence"* $\sum (u_n^+ - u_n^-) = \sum u_n$ *converge.*

3. (a) *Puisque* $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, *on a facilement les inégalités :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |z_n| \geq \sqrt{x_n^2} = |x_n|, \qquad |z_n| \geq \sqrt{y_n^2} = |y_n|.$$

(b) *Puisque par hypothèse,* $\sum |z_n|$ *converge, l'inégalité* $0 \leq |x_n| \leq |z_n|$ *entraîne la convergence de la série* $\sum |x_n|$ *(par le critère de comparaison des séries positives). La série* $\sum x_n$ *est donc absolument convergente, et c'est une série réelle, donc d'après les questions précédentes, elle converge. De même, on montre la convergence absolue, et donc la convergence, de la série* $\sum y_n$. *Par les propriétés algébriques sur la convergence des séries, on en déduit que la combinaison linéaire complexe* $\sum (x_n + iy_n) = \sum z_n$ *converge.*

Corrigé de l'exercice 13.
On a une série à termes strictement positifs. On peut déterminer un équivalent simple de u_n *au moyen de la formule de Stirling.*

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

donc

$$(3n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} (3n)^{3n} e^{-3n} \sqrt{6\pi n}, \qquad (n!)^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{3n} e^{-3n} \sqrt{2\pi n} \times (2\pi n),$$

puis (par compatibilité des équivalents avec le produit) :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{3}{a}\right)^{3n} \times \frac{\sqrt{3}}{2\pi n}.$$

Par le critère des équivalents, la série $\sum u_n$ *est donc de même nature que* $\sum \frac{1}{n}\left(\left(\frac{3}{a}\right)^3\right)^n := \sum a_n$. *Deux cas se présentent :*

- *Si* $0 < a \leq 3$, *alors* $\left(\frac{3}{a}\right)^3 \geq 1$, *donc* $a_n \geq \frac{1}{n}$ *pour tout* $n \geq 1$. *On en déduit par le critère de comparaison que* $\sum a_n$ *diverge. Cela implique que* $\sum u_n$ *diverge.*
- *Si* $a > 3$, *alors on utilise la majoration* $0 < a_n \leq \left(\left(\frac{3}{a}\right)^3\right)^n$. *Vu que la série géométrique* $\sum \left(\left(\frac{3}{a}\right)^3\right)^n$ *converge (la raison est* $\left(\frac{3}{a}\right)^3 \in]0;1[$*), on en déduit par le critère de comparaison que* $\sum a_n$ *converge. Cela implique que* $\sum u_n$ *converge.*

Finalement, $\sum u_n$ *converge si et seulement si* $a > 3$.

Corrigé de l'exercice 14. *1) On a affaire à une série à termes positifs.*

- *si* $a = 0$, *alors* $\sum u_n$ *converge (puisque* $u_n = 0$ *pour tout* $n \geq 2$*).*
- *si* $0 < |a| < 1$, *alors* $u_n > 0$ *pour tout* $n \geq 2$ *et* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n-1} a^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a^2 < 1$, *donc* $\sum u_n$ *converge (par le critère de d'Alembert).*
- *si* $|a| \geq 1$, *alors* $u_n \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, *donc* $\sum a_n$ *diverge grossièrement.*

Finalement, $\sum u_n$ *converge si et seulement si* $a \in]-1;1[$.

2) Attention, ici la série n'est pas toujours à termes positifs (si $a < 0$ *les signes sont alternés).*

- *si $|a| < 1$, alors $|u_n| \leq |a|^n$ et la série géométrique $\sum |a|^n$ converge, donc (par le critère de comparaison) $\sum |u_n|$ converge. Ceci montre que $\sum u_n$ converge absolument, et donc qu'elle converge.*
- *si $|a| > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ (par croissance comparée), donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
- *si $|a| = 1$, il y a deux sous-cas :*
  * *si $a = 1$, la série $\sum u_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ diverge (car $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, et la série positive $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge).*
  * *si $a = -1$, la série $\sum u_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ converge (mais pas absolument).*
    En effet, on est ici dans un cas où le "critère spécial des séries alternées s'applique, mais ce critère étant hors-programme, on va refaire sa démonstration sur cet exemple. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1}$ et montrons que les sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes :
    - *$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1} = -\frac{1}{\sqrt{2n+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}+1} \leq 0$, donc (S_{2n}) est décroissante.*
    - *$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1} = \sum_{k=2n+2}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}+1} \geq 0$, donc (S_{2n+1}) est croissante.*
    - *$S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1} = -\frac{1}{\sqrt{2n+1}+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

    On en déduit que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, ce qui entraîne qu'elles convergent vers une même limite $S \in \mathbb{R}$. Enfin, puisque $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = S$, on en conclut (par un théorème du cours de sup !) que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, et donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ converge.

Finalement, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a \in [-1; 1[$.

Corrigé de l'exercice 15. 1. *Il suffit de considérer la suite (S_n) des approximations décimales de x par défaut :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}.$$

On sait d'après le cours que $S_n = \dfrac{E(10^n x)}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $a_0 = S_0 = E(x)$, et

$$\forall n \geq 1, \qquad \frac{a_n}{10^n} = S_n - S_{n-1} = \frac{E(10^n x)}{10^n} - \frac{E(10^{n-1} x)}{10^{n-1}} = \frac{E(10^n x) - 10E(10^{n-1} x)}{10^n},$$

d'où le résultat en multipliant par 10^n.

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$T_{n+1} - T_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} - \frac{1}{10^n} = \frac{a_{n+1} - 9}{10^n} \leq 0$$

(puisque $a_{n+1} \in \{0; \cdots; 9\}$), donc la suite (T_n) est décroissante.

Corrigé de l'exercice 16.

On a $x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{10^{p_k}}$, avec $p_0 = 2$ et pour $k \geq 1$, $p_k = p_{k-1} + k + 2$.
Supposons que $x \in \mathbb{Q}$. Alors, son développement décimal propre est de la forme :

$$x = a_0, a_1 \cdots a_p b_1 \cdots b_q b_1 \cdots b_q \cdots b_1 \cdots b_q \cdots$$

avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Par unicité du développement décimal propre, on en déduit qu'il existe $j \in \{1, \cdots, q\}$ tel que $b_j = 1$. Du coup, à partir du rang $p + 1$ des décimales de x, l'écart entre deux 1 consécutifs est majoré par q, ce qui contredit la relation de récurrence vérifiée par (p_k). On en déduit que $x \notin \mathbb{Q}$.