TD1 : Séries numériques

Les exercices ou questions marqués d'un astérisque (*) sont plus difficiles.

I Exercices à traiter en priorité

Exercice 1 (Calcul d'une série par téléscopage).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2+4n+3}$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+3}.$$
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right).$$
4. En déduire que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2 (Valeur approchée d'une série de Riemann).
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^3}$.

1. Expliquer pourquoi la suite (S_n) converge.
On notera dans la suite $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}$.
2. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a $\dfrac{1}{k^3} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^3}$.
3. En déduire que pour tous entiers n, M tels que $1 \leq n < M$, on a
$$\sum_{k=n+1}^{M} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2n^2}.$$
4. En notant $R_n = S - S_n$ le reste de la série, quelle majoration de R_n obtient-on ?
5. Déterminer une valeur approchée de S à 10^{-4} près.
On cherchera un entier n_0 tel que $|S - S_{n_0}| \leq 10^{-4}$.

Exercice 3 (Calcul de sommes infinies).
Calculer, si elles existent, les sommes infinies suivantes :
$$S_1 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \qquad S_3 = \sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$
On pourra procéder par téléscopage.

Exercice 4 (Exemples faciles).
Dans chaque cas, étudier la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n$:

1) $u_n = 2^{-\frac{1}{n}}$
2) $u_n = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
3) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
4) $u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$
5) $u_n = \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$
6) $u_n = (-1)^n \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^{3/2}}$
7) $u_n = \frac{1}{2^n+2}$
8) $u_n = \frac{1}{n^2+\sin n}$
9) $u_n = \frac{1}{2^{nx}}$ avec $x \in \mathbb{R}$

Exercice 5 (Exemples moyens).
Dans chaque cas, étudier la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n$:

1) $u_n = \frac{2n}{n+2^n}$
2) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3) $u_n = \frac{1}{(\ln n)^2}$
4) $u_n = \exp(-n^2)$
5) $u_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
6) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$
7) $u_n = \frac{n^n}{n!}$
8) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$
9) $u_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$.

Exercice 6 (Etude d'une série avec un paramètre).
On considère la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^2}$, où a est un paramètre réel.

1. On commence par supposer $a \geq 0$.
   (a) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le critère de d'Alembert permet-il de conclure quant à la convergence de cette série ?
   (b) Etudier la convergence de cette série dans les autres cas.
2. On suppose maintenant $a < 0$.
   (a) Montrer que si $a < -1$, alors la série est grossièrement divergente.
   (b) Montrer que si $-1 \leq a < 0$, alors la série est absolument convergente.
3. Finalement, pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la série est-elle convergente ?

Exercice 7 (Calcul de sommes infinies bis).
On admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. Calculer, si elles existent, les sommes infinies suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!}, \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

On pourra faire des changements d'indice.

Exercice 8 (Ecriture fractionnaire d'un développement décimal).
Ecrire les nombres rationnels suivants sous forme de fraction irréductible :

$$x = 0,1717171717\cdots, \qquad y = 0,55123123123\cdots.$$

Exercice 9 (Encore des développements décimaux).

1. Soit $q \in \mathbb{N}^*$, et soient $a_1, \cdots, a_q$ des entiers compris entre 0 et 9. Montrer que

$$0,\underbrace{a_1 a_2 \cdots a_q}\ \underbrace{a_1 a_2 \cdots a_q} \cdots \underbrace{a_1 a_2 \cdots a_q} \cdots = \frac{a_1 a_2 \cdots a_q}{\underbrace{99\cdots 9}_{q\ fois}}$$

2. Ecrire le nombre rationnel $x = 4,29123123123\cdots$ sous forme de fraction irréductible.

II Exercices supplémentaires

Exercice 10 (Estimation d'une série alternée).
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Montrer que les sous-suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge.
3. Cette série est-elle absolument convergente ?

4. En utilisant les deux suites adjacentes, déterminer une valeur approchée de $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ à 10^{-3} près.
   On cherchera un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $|S - S_{n_0}| \leq 10^{-3}$.
5. Cette série converge-t-elle "vite" ?

Exercice 11 (*Critère de Raabe-Duhamel).
Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs tel qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\beta > 1$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

1. On pose $v_n := n^\alpha u_n$. Donner un développement asymptotique de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ au voisinage de $+\infty$.
2. Montrer que la série $\sum(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ converge absolument.
3. En déduire que la suite (v_n) converge vers un réel strictement positif.
4. Montrer enfin que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
   Il s'agit du critère de Raabe-Duhamel. Il permet d'améliorer le critère de d'Alembert car il donne des informations dans certains cas où $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$.

Exercice 12 (La convergence absolue implique la convergence).
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème du cours qui affirme que toute série absolument convergente est convergente.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit les deux suites (u_n^+) et (u_n^-) par :
   $$u_n^+ := \max(0, u_n), \qquad u_n^- = \max(0, -u_n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   (a) Montrer que (u_n^+) et (u_n^-) sont des suites positives.
   (b) Etablir une formule reliant u_n, u_n^+ et u_n^-.
   (c) Etablir une formule reliant $|u_n|$, u_n^+ et u_n^-.
2. Montrer que si la série $\sum |u_n|$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
3. On considère maintenant une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On note (x_n) et (y_n) ses parties réelle et imaginaire.
   (a) Comparer $|x_n|$ et $|z_n|$, ainsi que $|y_n|$ et $|z_n|$.
   (b) Montrer que si la série $\sum |z_n|$ converge, alors la série $\sum z_n$ converge.

On a donc montré que toute série absolument convergente (réelle ou complexe) est convergente.

Exercice 13 (Exemple avec paramètre).
Soit $a > 0$. Discuter, suivant la valeur de a, de la nature de la série $\sum \frac{(3n)!}{a^{3n}(n!)^3}$.
On pourra utiliser la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Exercice 14 (*Exemples avec paramètre).
Dans chaque cas, étudier la nature de la série $\sum u_n$ en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

$$1)\ u_n = \binom{n}{2} a^{2n}, \qquad 2)\ u_n = \frac{a^n}{\sqrt{n}+1}$$

Exercice 15 (Compléments sur les développements décimaux).
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On note $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ son développement décimal propre.

1. Montrer que $a_0 = E(x)$ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = E(10^k x) - 10E(10^{k-1}x)$, où $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ désigne la fonction "partie entière".

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + 10^{-n}$ l'approximation décimale de x par excès à 10^{-n} près. Etudier la monotonie de la suite (T_n).

Exercice 16 (*Un nombre irrationnel).
On considère le réel $x = 0,01001000100001\cdots$, où le nombre de 0 qui suivent le chiffre $a_k = 1$ est augmenté de 1 à chaque étape. Montrer que x est irrationnel.