Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 17
Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

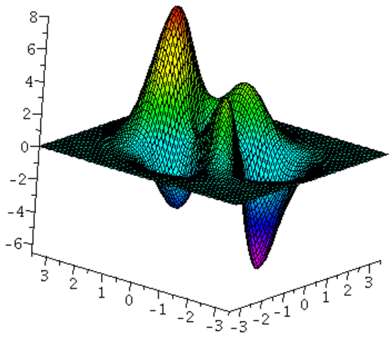


Table des matières

I Notions de topologie dans $\mathbb{R}^n$ **1**

1) Rappels sur la norme euclidienne et la distance 1
2) Boules, parties bornées 3
3) Point intérieur, extérieur, adhérent à une partie 6
4) Parties ouvertes, parties fermées 9

II Limite, continuité **12**

1) Définitions 12
2) Propriétés des fonctions continues 17

III Calcul différentiel **19**

1) Dérivées partielles d'ordre 1 19
2) Gradient 24
3) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ 26
4) Composées classiques 32
5) Dérivées partielles d'ordre 2, classe $\mathcal{C}^2$ 38

IV Exemples d'équations aux dérivées partielles **43**

1) Indépendance par rapport à une variable 44
2) Résolution par changement de variables 47

V Extremums d'une fonction de deux variables **55**

1) Définitions, propriétés 55
2) Méthode de recherche des extremums globaux sur une partie fermée et bornée 59

VI Applications géométriques **65**

1) Courbes du plan définies implicitement 65
   a) Définition paramétrique/implicite 65
   b) Cas particulier du graphe de fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 68
   c) Tangente et normale d'une courbe plane implicite 69
   d) Gradient et lignes de niveau 75
2) Surfaces définies implicitement 76
   a) Définition, plan tangent 76
   b) Position d'une surface d'équation $z = g(x, y)$ par rapport à son plan tangent 82

Dans ce chapitre on s'intéresse à des fonctions $f : A \to \mathbb{R}$, avec $A \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans la pratique, on se limitera à $n = 2$ ou $n = 3$.

Exemple (Fonction de $A \to \mathbb{R}$ avec $n = 3$)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times [1; +\infty[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & xye^z + \ln(x)\sqrt{y-1} \end{array}$$

I Notions de topologie dans $\mathbb{R}^n$

1) Rappels sur la norme euclidienne et la distance

Définition 1 (Produit scalaire euclidien, norme euclidienne).

*(i) On appelle **produit scalaire euclidien** de $\mathbb{R}^n$, et on note $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$, l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall \vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \text{ et } \vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$$

*(ii) On appelle **norme euclidienne** de $\mathbb{R}^n$, et on note $||\,.\,||$, l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall \vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad ||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2} = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$$

Proposition 2 (Propriétés de la norme).

(i) $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $||\vec{u}|| = 0 \iff \vec{u} = (0, \ldots, 0)$.

(ii) $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda \vec{u}|| = |\lambda|\, ||\vec{u}||$ *(homogénéité).*

(iii) $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $||\vec{u} + \vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 3 (Distance euclidienne).

*On appelle **distance euclidienne**, et on note $d(.\,, .)$, l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :* $\forall \vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n,\ \vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n,\ d(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u} - \vec{v}||$.

Proposition 4 (Propriétés de la distance).

Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

(i) $d(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{u} = \vec{v}$ *(séparation) ;*

(ii) $d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{v}, \vec{u})$ *(symétrie) ;*

(iii) $d(\vec{u}, \vec{v}) \leqslant d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v})$ *(inégalité triangulaire).*

2) Boules, parties bornées

Définition 5 (Boule ouverte, boule fermée).
Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$.

(i) *On appelle* ***boule ouverte*** *de centre a et de rayon r l'ensemble* :
$$\mathcal{B}_o(a; r) = \{u \in \mathbb{R}^n,\ d(a, u) < r\}$$.

(ii) *On appelle* ***boule fermée*** *de centre a et de rayon r l'ensemble* :
$$\mathcal{B}_f(a; r) = \{u \in \mathbb{R}^n,\ d(a, u) \leqslant r\}$$.

Remarque (Boules en dimension $n \leq 3$)

- En dimension 1 une boule est en fait un intervalle (fermé ou ouvert).
- En dimension 2 la boule de centre $a = (a_1, a_2)$ et de rayon r est en fait un disque (avec son bord ou non).
- En dimension 3 la boule de centre $a = (a_1, a_2, a_3)$ et de rayon r est une boule au sens commun (avec sa surface ou non).

<u>**Dessin**</u> :

Définition 6 (Partie bornée).
Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que *A est une **partie bornée** de $\mathbb{R}^n$ s'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ tels que $A \subset \mathcal{B}_f(a; r)$.*

Remarque

- A est bornée signifie qu'on peut contenir A dans une (grande) boule.
- A est bornée ssi il existe $K > 0$ tel que, pour tout $u \in A$, $||u|| \leqslant K$ (on peut en effet se ramener à une boule de centre 0).

<u>**Dessin**</u> :

3) Point intérieur, extérieur, adhérent à une partie

Définition 7 (Point intérieur, extérieur, adhérent à une partie).
Soit a un élément de $\mathbb{R}^n$ et A une partie de $\mathbb{R}^n$.

(i) On dit que *a est un **point intérieur à** A si il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(a; r) \subset A$.*

(ii) On dit que *a est un **point extérieur à** A s'il est intérieur au complémentaire de A*, *c'est-à-dire si* *$\exists r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(a; r) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$*.

(iii) On dit que *a est un **point adhérent à** A si pour tout $r > 0$, $\mathcal{B}_o(a; r) \cap A \neq \emptyset$*.

Remarque
On a $\mathcal{B}_o(a; r) \subset \mathbb{R}^n \setminus A \iff \mathcal{B}_o(a; r) \cap A = \emptyset$, donc on a l'équivalence :

$$(\exists r > 0,\ \mathcal{B}_o(a; r) \subset \mathbb{R}^n \setminus A) \iff \text{non}\,(\forall r > 0,\ \mathcal{B}_o(a; r) \cap A \neq \emptyset)\,.$$

Ceci montre que

$$a \text{ extérieur à } A \iff a \text{ non adhérent à } A.$$

Exemple

Sur la figure ci-dessous : on a $a, d \in A$ et $b, c \notin A$, mais

* a est un point intérieur à A ;
* b est un point extérieur à A ;
* c et d ne sont ni intérieurs, ni extérieurs à A ;
* a, c et d sont des points adhérents à A, mais pas b .

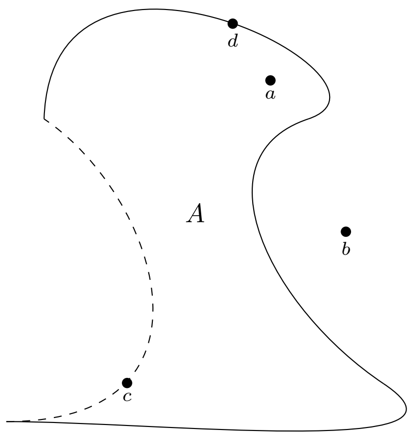


FIGURE 1 – Une partie A de $\mathbb{R}^2$ (les pointillés ne sont pas inclus dans A) et quelques points.

Définition 8 (Frontière d'une partie de A).
Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On appelle ***frontière*** *ou* ***bord*** *de A l'ensemble des points adhérents à A qui ne sont pas intérieurs à A.*

Remarque

- Un point adhérent à A n'appartient pas forcément à A.
- Tous les points de A sont adhérents à A.
- Tous les points de A ne sont pas forcément intérieurs à A : il y a des points qui ne sont ni intérieurs ni extérieurs à A, ce sont les points de la frontière de A.
- Dans la figure précédente, la frontière de A est la réunion du trait plein et du trait pointillé.

4) Parties ouvertes, parties fermées

Définition 9 (Partie ouverte, partie fermée).
Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.

(i) *On dit que* *A est une **partie ouverte** de $\mathbb{R}^n$ si* *pour tout $a \in A$ il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(a; r) \subset A$* .

(ii) *On dit que* *A est une **partie fermée** de $\mathbb{R}^n$ si* *le complémentaire de A est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$* .

Remarque
- Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est ouverte si et seulement si tout point de A est intérieur à A.
- En gros, une partie ouverte est un ensemble A tel que autour de chaque point de A on peut tracer une boule (parfois très petite) qui soit incluse dans A.
- On peut montrer facilement que toute boule ouverte est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, et toute boule fermée est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.
- On peut employer aussi la terminologie "ouvert de $\mathbb{R}^n$" au lieu de "partie ouverte de $\mathbb{R}^n$".

Exemple (Quelques parties ouvertes de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$)

1. Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (bornés ou non) ;
2. Le rectangle ouvert $]a; b[\times]c; d[$;
3. Le demi-plan ouvert $]a; +\infty[\times\mathbb{R}\ldots$

Exemple (Quelques parties fermées de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$)

1. Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ (bornés ou non) ;
2. Le rectangle fermé $[a; b] \times [c; d]$;
3. La bande $[a; b] \times \mathbb{R}$;
4. La courbe $y = x^2 \dots$

II Limite, continuité

Dans cette partie, $f : A \to \mathbb{R}$, où A est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou $n = 3$).

1) Définitions

La définition de limite, déjà étudiée en TSI 1 pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se généralise :

Définition 10 (Limite finie / infinie en a).
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ (avec $A \subset \mathbb{R}^n$) et a un point adhérent à A.

*(i) On dit que f **admet une limite en a** s'il existe un réel ℓ vérifiant :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall u \in A,\quad ||u - a|| \leqslant \delta \implies |f(u) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{u \to a} f(u) = \ell$

*(ii) On dit que f **tend vers $+\infty$ en a** si :*

$$\forall B > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall u \in A,\quad ||u - a|| \leqslant \delta \implies f(u) \geqslant B.$$

On note alors $\lim\limits_{u \to a} f(u) = +\infty$.

*(iii) On dit que f **tend vers $-\infty$ en a** si :*

$$\forall B < 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall u \in A,\quad ||u - a|| \leqslant \delta \implies f(u) \leqslant B.$$

On note alors $\lim\limits_{u \to a} f(u) = -\infty$.

Définition 11 (Continuité en un point).
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ (avec $A \subset \mathbb{R}^n$) et $a \in A$.
*On dit que f est **continue en** a si $\lim\limits_{u \to a} f(u) = f(a)$.*
*De plus on dit que f est **continue sur** A si f est continue en tout point de A .*

Remarque

- f est continue en a signifie :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall u \in A,\quad ||u - a|| \leqslant \delta \implies |f(u) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$
- L'étude de la continuité d'une fonction de plusieurs variables **n'est pas un attendu du programme.**

Exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
Montrons que la fonction f est continue en $a = (0;0)$.
En effet,

ATTENTION !

On dispose des mêmes outils qu'en TSI 1 pour calculer une limite (somme, produit, composition, inégalités, ...) mais **attention, on ne peut pas « fixer une variable puis l'autre » pour étudier la continuité**.

Voici un exemple pour illustrer cela :

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Montrons que la fonction f n'est pas continue en $a = (0;0)$.

On a, pour tout $x \neq 0$, $f(x,0) = \dfrac{x \times 0}{x^2+0^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$ et évidemment de même $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$.

Mais $f(x,x) = \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim_{x\to 0} f(x,x) \neq 0$.

Or :

$$f \text{ continue en } (0,0) \iff \left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x,y)\| \leq \delta \implies |f(x,y)| \leq \varepsilon\right),$$

et ce n'est pas le cas ici car sinon on aurait en particulier $|f(x,x)| \leq \varepsilon$ pour tout x suffisamment proche de 0, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq \varepsilon$, ce qui est absurde.

La fonction f n'est donc pas continue en $(0,0)$ mais pourtant si on étudie « une variable après l'autre » on a l'impression que « ça marche ».

2) Propriétés des fonctions continues

Nous listons ici les propriétés essentielles des fonctions continues de plusieurs variables, sans démonstration.

Proposition 12 (Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$).
Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des fonctions continues sur A, noté $\mathcal{C}^0(A, \mathbb{R})$, forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (en fait un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$).

Remarque
Cela signifie que toute combinaison linéaire de deux fonctions continues est continue.

Proposition 13 (Composition de fonctions continues).
Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, et $g : B \to \mathbb{R}$ telles que $f(A) \subset B$.
On suppose que f est continue en a et g est continue en $f(a)$.
Alors $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ est continue en a.

Proposition 14 (Produit et quotient de fonctions continues).
Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ et $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en a.
Alors :

(i) la fonction $f \times g$ est continue en a

(ii) si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in A$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Théorème 15 (Fonction continue sur une partie fermée et bornée).
Soit K une partie **fermée et bornée** *de $\mathbb{R}^n$, et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue* .
Alors f est bornée sur K et atteint ses bornes sur K. Autrement dit :

$$\exists (a, b) \in K^2, \quad \forall x \in K, \qquad f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b).$$

Remarque
Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce théorème correspond la propriété, vue en TSI 1, qui dit que : « l'image d'un segment par une fonction continue est un segment ».

III Calcul différentiel

Dans cette partie $f : \Omega \to \mathbb{R}$ désigne une fonction définie sur un **ouvert** Ω de $\mathbb{R}^n$.

1) Dérivées partielles d'ordre 1

Définition 16 (Applications partielles en un point a).
Soient $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$. On appelle i-ème application partielle de f en a la fonction $f_{x_i} : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.
Cette fonction f_{x_i} est définie au moins sur un intervalle ouvert contenant a_i .

Remarque
Le fait d'avoir choisi une partie ouverte Ω permet de "se déplacer autour du point a dans toutes les directions tout en restant dans Ω" : par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, en notant $a = (a_1, a_2)$, on peut considérer une boule $B(a; r)$ incluse dans Ω. Dès lors :

$$\exists \delta > 0, \quad]a_1 - \delta; a_1 + \delta[\times]a_2 - \delta; a_2 + \delta[\subset B(a; r) \subset \Omega.$$

Donc les deux applications partielles $f_x : t \mapsto f(t, a_2)$ et $f_y : t \mapsto f(a_1, t)$ sont respectivement au moins définies sur les intervalles $]a_1 - \delta; a_1 + \delta[$ et $]a_2 - \delta; a_2 + \delta[$.

__Dessin__ :

Exemple
Reprenons la fonction du premier exemple de ce chapitre définie sur l'ouvert :
$\Omega =]0; +\infty[\times]1; +\infty[\times \mathbb{R}$ par $f(x, y, z) = xye^z + \ln(x)\sqrt{y-1}$.
La première application partielle de f en $a = (1, 2, 3)$ est la fonction $f_x : t \to 2te^3 + \ln(t)$, définie sur $I =]0; +\infty[$.
La deuxième application partielle de f en $a = (1, 2, 3)$ est $f_y : t \mapsto te^3$, définie sur $\mathbb{R}$.
La troisième est $f_z : t \mapsto 2e^t$, définie sur $\mathbb{R}$.

Définition 17 (Dérivée partielle au point a).
Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ et $i \in \{1, \dots, n\}$.

On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x_i en a si l'application partielle f_{x_i} est dérivable en a_i. Cela revient à dire que

$$\lim_{t \to a_i} \left(\frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t - a_i} \right) \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

Cette limite est alors notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$ et s'appelle la i-ème dérivée partielle de f en a ou dérivée partielle de f par rapport à x_i en a .

Remarque
Sous réserve d'existence, on a donc (par changement de variable) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} \right).$$

A deux variables ($n = 2$), cela donne :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}.$$

Remarque
Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ revient donc à calculer le nombre dérivé en $t = a_i$ de la fonction **d'une variable** $t \mapsto f(a_1, \cdots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \cdots, a_n)$.

Définition 18 (Fonction dérivée partielle).
Fixons $i \in \{1, \cdots, n\}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

*La fonction qui à tout point $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$ associe le nombre réel $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $\partial_i f$ et s'appelle **la i-ème dérivée partielle de f** ou encore **la dérivée partielle de f par rapport à** x_i.*

C'est une fonction définie sur Ω ou une partie de Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque
- La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur Ω si et seulement si pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$, la fonction d'une variable $t \mapsto f(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ est dérivable (sur l'intervalle où elle est définie).
- Lorsqu'elles existent, les n dérivées partielles de f, notées $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$, sont donc chacune des fontions de n variables et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Pour $n = 1$, on retrouve la notion de fonction dérivée "classique".

Méthode
Pour calculer la dérivée partielle de $\boldsymbol{f}$ par rapport à $\boldsymbol{x_i}$, il faut considérer que dans l'expression de f, **seule $\boldsymbol{x_i}$ est la variable** et toutes les autres « lettres » sont en fait des constantes. On applique alors les formules de dérivations "classiques" des fonctions d'une variable réelles : dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, ...

Exemple
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = ye^{-x^2-y}$.
Calculer ses dérivées partielles.
Par composition et produit de fonctions usuelles, la fonction f est dérivable par rapport à ses deux variables.

- Pour calculer la dérivée de f par rapport à x, on considère que y est une constante. On a donc une expression de la forme $Ke^{u(x)}$ qui se dérive sous la forme $Ku'(x)e^{u(x)}$. On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \times (-2x)e^{-x^2-y} = -2xye^{-x^2-y}$
- Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, on considère que x est une constante. On a donc une expression de la forme $u(y)e^{v(y)}$ qui se dérive sous la forme $u'(y)e^{v(y)} + u(y)v'(y)e^{v(y)}$. On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{-x^2-y} + y \times (-1)e^{-x^2-y} = (1 - y)e^{-x^2-y}$

2) Gradient

Définition 19 (Gradient de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$).
*Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \Omega$. Si f possède des dérivées partielles au point a, alors on appelle **gradient de f en a**, et on note $\nabla f(a)$, le vecteur de $\mathbb{R}^n$ suivant :*

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

....

Exemple
Calculer le gradient en $a = (1, 1, 1)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 \cos(yz)e^{x-z}.$$

Pour cela il faut commencer par calculer les dérivées partielles de f par rapport à ses trois variables :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \cos(yz)\left(2xe^{x-z} + x^2e^{x-z}\right) = x(x + 2)\cos(yz)e^{x-z}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2e^{x-z}\left(-z\sin(yz)\right) = -x^2z\sin(yz)e^{x-z}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x^2\left(-y\sin(yz)e^{x-z} - \cos(yz)e^{x-z}\right) = -x^2\left(y\sin(yz) + \cos(yz)\right)e^{x-z}$

Donc $\nabla f(1,1,1) = (3\cos(1), -\sin(1), -\sin(1) - \cos(1))$.

Définition 20 (Application gradient).
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si f possède des dérivées partielles sur l'ouvert Ω, alors on appelle ***gradient de f****, et on note ∇f, l'application suivante :*

$$\begin{array}{cccc} \nabla f : & \Omega & \to & \mathbb{R}^n \\ & a & \to & \nabla f(a) \end{array}$$

3) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

ATTENTION !
A l'inverse des fonctions d'une variable, l'existence des dérivées partielles n'entraîne même pas la continuité, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple
La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

possède des dérivées partielles en $(0,0)$ **mais elle n'est pas continue en $(0,0)$** (voir p.15).
En effet, on a $f(t,0) = f(0,t) = 0$ pour tout $t \neq 0$, donc

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t-0} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0,$$

$$\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t-0} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0,$$

ce qui montre que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = 0.$$

En outre, f est discontinue en $(0,0)$ car

$$\forall t \neq 0, \quad f(t,t) = \frac{1}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

On introduit donc la notion suivante, qui "demande" plus que la simple existence de dérivées partielles.

Définition 21 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$).
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$).
On dit que *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si toutes les applications* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \to \mathbb{R}$ *(pour $i \in \{1, \cdots, n\}$) existent et sont continues sur Ω* .
On notera $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur l'ouvert Ω.

Remarque
On retrouve la définition déjà connue pour les fonctions d'une variable : $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si f' existe et est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Théorème 22 (Développement limité d'ordre 1 de f en a).
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in \Omega$. Alors au voisinage de a, on a :

$$f(x) = f(a) + (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ldots + (x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + o\big(||(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)||\big),$$

c'est-à-dire

$$f(x) = f(a) + \big\langle x - a, \nabla f(a)\big\rangle + \underset{x\to a}{o}\big(||x - a||\big).$$

Preuve : Admis. $\square$

Corollaire 23 ($\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$).
Si f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'ouvert* Ω, **alors** f *est continue sur* Ω.

Preuve : Fixons $a \in \Omega$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe, d'après le théorème précédent, une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et

$$f(x) = f(a) + \left\langle x - a, \nabla f(a) \right\rangle + \|x - a\| \varepsilon(\|x - a\|).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left| \left\langle x - a, \nabla f(a) \right\rangle \right| \leq \|x - a\| \times \|\nabla f(a)\|,$$

donc

$$|f(x) - f(a)| \leq \|x - a\| \times \left(\|\nabla f(a)\| + \varepsilon(\|x - a\|) \right),$$

ce qui montre que $\lim_{x \to a} |f(x) - f(a)| = 0$, et donc que f est continue en a.
Ceci étant vrai pour tout point $a \in \Omega$, on a bien $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$. $\square$

Remarque
La notion de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est donc analogue au cas des fonctions d'une variable réelle, puisqu'elle assure la continuité de f (alors que la simple existence des dérivées partielles, non).

Citons enfin (sans démonstration, mais elles sont faciles à établir) les opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

Proposition 24 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).
Soient f et g deux fonctions définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

(i) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $af+bg$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, et

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(af+bg) = a\frac{\partial f}{\partial x_i} + b\frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

(ii) La fonction $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, et

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(f \times g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

(iii) Si g ne s'annule par sur Ω, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, et

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \times g - f \times \frac{\partial g}{\partial x_i}\right) \times \frac{1}{g^2}$$

Remarque
Le point (i) dit que l'ensemble $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$.

4) Composées classiques

Ici, $n = 2$ (on est dans le plan). Les résultats suivants, qui permettent de calculer des dérivées partielles de fonctions composées, seront admis.

Proposition 25 (Composition $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}$, $v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall t \in I, \ (u(t), v(t)) \in \Omega.$$

Alors la fonction $g : t \mapsto f(u(t), v(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I, \qquad g'(t) = u'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)).$$

Proposition 26 (Composition $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $g : \Omega \to \mathbb{R}$, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall (u,v) \in \Omega, \quad (g(u,v), h(u,v)) \in U.$$

Alors la fonction $\varphi : (u,v) \mapsto f(g(u,v),h(u,v))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(g(u,v),h(u,v)) + \dfrac{\partial h}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(g(u,v),h(u,v)) \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(g(u,v),h(u,v)) + \dfrac{\partial h}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(g(u,v),h(u,v)) \end{cases}$$

Remarque

- Ces règles de dérivation composée fonctionnent aussi pour les fonctions de 3 variables $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$. Il faut être capable de les adapter.
- La principale application de ces propriétés sera la résolution d'équations aux dérivées partielles que nous verrons dans la partie IV. Mais nous allons tout de suite appliquer cette formule sur un exemple.

Exemple (Passage en coordonnées polaires)
On appelle **changement de variables en coordonnées polaires** l'application $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par
$$\Psi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$
Cette application est surjective (tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$), mais non injective (à cause de la périodicité de cos et sin).
En considérant les ouverts $U =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ et $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq 0\}$ (le plan privé d'une demi-droite fermée), **la restriction $\Psi : U \to V$ est bijective** :
$$\forall (x,y) \in V,\ \exists! (r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[, \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

<u>**Dessin**</u> :

Exemple (Passage en coordonnées polaires, suite)
On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dont les variables sont notées (x, y) ("coordonnées cartésiennes").

On souhaite "passer aux coordonnées polaires" (r, θ) définies par $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$.

On définit donc une **nouvelle fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$** par $F(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

(on dit que F est l'expression de la fonction f en coordonnées polaires).

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (par composition).
Calculons les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

1. Pour calculer la dérivée partielle de F par rapport à r il faut remarquer que la variable r apparait deux fois dans la formulation $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. On va donc obtenir une somme de deux termes : un premier terme où on « s'occupe du premier r » et un second terme où on « s'occupe du deuxième r ».
$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$
Lorsqu'on s'occupe du premier r, on s'inspire de la formule de dérivée d'une composée de fonctions d'une seule variable : $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$ (ici $v = r\cos(\theta)$ et $u = f$). Et comme on est en train de s'intéresser au r qui se situe dans la première variable de f il faut dériver f par rapport à sa première variable qui s'appelle x !

On procède de même pour le deuxième r.
2. En utilisant le même raisonnement la dérivée de F par rapport à θ donne :
$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Remarque
Cet exercice de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires est un grand classique, à connaitre par cœur.

Remarque (Expression de (r, θ) en fonction de (x, y))
La bijection réciproque $\Psi^{-1} : V \to U$ du changement de variables en coordonnées polaires a une expression compliquée.
En effet : pour tout $(r,\theta) \in U =]0;+\infty[\times]-\pi,\pi[$ et $(x,y) \in V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \leq 0\}$, on a

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \iff \begin{cases} x^2+y^2 = r \\ \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

donc si on veut exprimer θ en fonction de (x,y), il faut utiliser des fonctions trigonométriques réciproques.

ATTENTION !
La formule $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$ est valable **uniquement si $x \neq 0$**, c'est-à-dire si $\theta \in \left]-\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$.
On en déduit que $\theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ seulement si $\theta \in]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[$ (i.e. $x > 0$).

5) Dérivées partielles d'ordre 2, classe $\mathcal{C}^2$

Lorsqu'on décide de dériver une fonction de n variables on obtient n dérivées partielles.
Ces dérivées partielles sont elles-mêmes des fonctions de n variables que l'on peut tenter de dériver par rapport à chacune de leurs variables.
On obtient alors **$n \times n$ fonctions** que l'on appelle des **dérivées secondes**.
Par exemple on peut dériver une fois par rapport à x_i, on obtient donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, puis on décide de dériver cette fonction par rapport à x_j.

<u>**Notation**</u> : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Lorsqu'elle existe, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ désigne la dérivée de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ par rapport à x_j.
Si on dérive deux fois de suite par rapport à la même variable x_i, on notera $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

ATTENTION !
Prendre garde à **l'ordre des variables** indiqué sous la dérivée.
On commence par celle de droite pour ensuite aller vers la gauche. Symboliquement :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Exemple
Reprenons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = ye^{-x^2-y}$.
Calculons les 4 dérivées secondes de cette fonction f.
Pour avoir accès aux dérivées secondes il faut d'abord avoir calculé les dérivées premières, ce que nous avons déjà fait :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xye^{-x^2-y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1-y)e^{-x^2-y}$$

. On souhaite maintenant calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ signifie que l'on doit dériver la fonction f deux fois par rapport à x.
  La dérivée première par rapport à x est $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xye^{-x^2-y}$. Pour la dériver par rapport à x nous considérons que y est une constante. On a donc une fonction du type $u(x)e^{v(x)}$ qui se dérive sous la forme $u'(x)e^{v(x)} + u(x)v'(x)e^{v(x)}$.
  On obtient : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2ye^{-x^2-y} - 2xy \times (-2x)e^{-x^2-y} = -2y(1-2x^2)e^{-x^2-y}$.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ signifie que l'on doit dériver la fonction f une fois par rapport à x dériver le résultat obtenu par rapport à y.
  La dérivée première par rapport à x est $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xye^{-x^2-y}$. Pour la dériver par rapport à y nous considérons que x est une constante. On a donc une fonction du type $u(y)e^{v(y)}$ qui se dérive sous la forme $u'(y)e^{v(y)} + u(y)v'(y)e^{v(y)}$.
  On obtient : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2xe^{-x^2-y} - 2xy \times (-1)e^{-x^2-y} = -2x(1-y)e^{-x^2-y}$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ signifie que l'on doit dériver la fonction f une fois par rapport à y dériver le résultat obtenu par rapport à x.
  La dérivée première par rapport à y est $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1-y)e^{-x^2-y}$. Pour la dériver par rapport à x nous considérons que y est une constante. On a donc une fonction du type $Ke^{u(x)}$ qui se dérive sous la forme $Ku'(x)e^{u(x)}$.
  On obtient : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2x(1-y)e^{-x^2-y}$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ signifie que l'on doit dériver la fonction f deux fois par rapport à y.
  Toujours avec le même raisonnement on obtient : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (-2+y)e^{-x^2-y}$.

Remarque
On peut remarquer sur cet exemple que les dérivées dites « croisées » sont égales :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

En fait, cela résulte d'une propriété générale (voir le théorème de Schwarz).

Définition 27 (Fonction de classe $\mathcal{C}^2$).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω si toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 existent **et sont continues** *sur Ω.*

Citons rapidement (sans démonstration) les propriétés des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Proposition 28 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$).
Soient f et g deux fonctions définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

(i) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $af + bg$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

(ii) La fonction $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

(iii) Si g ne s'annule par sur Ω, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

Théorème 29 (Théorème de Schwarz).
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω alors

$$\forall a \in \Omega, \quad \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

....

Remarque

- Dans l'exemple précédent, on peut remarquer que les 4 dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (par composition de fonctions usuelles). D'où nécessairement $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
- Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ en un point $a \in \Omega$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ (voir les exercices).

IV Exemples d'équations aux dérivées partielles

Une **équation aux dérivées partielles** est la généralisation (à plusieurs variables) d'une équation différentielle : c'est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction de plusieurs variables f et faisant intervenir des dérivées partielles de f.
Par exemple :

$$(x-y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0,$$

où l'inconnue est $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

De nombreuses équations aux dérivées partielles sont issues de la physique. Citons par exemple :

- **L'équation de la chaleur** : $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) - D\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 0,$

  où f est la température (qui dépend du temps t et de l'espace x) et $D > 0$ est le coefficient de diffusion.
- **L'équation des ondes** : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) - v^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 0,$

  où f est la "fonction d'onde" et $v > 0$ est la vitesse de propagation de l'onde.

On se contentera dans ce cours de traiter des exemples simples.

1) Indépendance par rapport à une variable

Commençons par donner une liste de cas évidents, qu'il faut connaître.

Proposition 30 (Exemples triviaux d'EDP).
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et soit $a, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors

(i) $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2} \iff$ *il existe $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(x,y) = A(y)$.*

(ii) $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2} \iff$ *il existe $B \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(x,y) = B(x)$.*

(iii) $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x)b(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2} \iff$ *$f(x,y) = A(x)b(y) + C(y)$, avec A, C de classe $\mathcal{C}^1$ et $A' = a$.*

(iv) $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = a(x)b(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2} \iff$ *$f(x,y) = a(x)B(y) + C(x)$, avec B, C de classe $\mathcal{C}^1$ et $B' = b$.*

Preuve :

(i) A $y \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)$ est la fonction dérivée de $t \mapsto f(t,y)$, donc, puisque cette dérivée est continue (f est de classe $\mathcal{C}^1$), on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x,y) - f(0,y) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)dt.$$

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$, on a donc $f(x,y) - f(0,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donc en posant $A : y \mapsto f(0,y)$, on obtient le résultat voulu (car A est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition).
Réciproquement si $f(x,y) = A(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ (par composition), et vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Idem (i) en échangeant les rôles de x et y.

(iii) Puisque a est continue sur $\mathbb{R}$, elle possède une primitive de classe $\mathcal{C}^1$, notée A, et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x)b(y) \iff \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) - A(x)b(y)) = 0,$$

et on se ramène au point (i).

(iv) Idem (iii).

$\square$

Remarque
Au lieu de résoudre sur $\mathbb{R}^2$, on peut se placer sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire chercher les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Mais cela peut être très compliqué, en fonction de la "forme" de Ω.

2) Résolution par changement de variables

Méthode : Résolution d'une équation aux dérivées partielles
On veut résoudre une équation aux dérivées partielles, dont la fonction inconnue est notée f et ses variables sont x, y (et z si $n = 3$).

Si l'équation n'est pas évidente à résoudre, on peut **utiliser un changement de variables**. Pour expliquer la méthode, nous appellerons u, v et w les nouvelles variables (qui sont en fonction de (x, y, z)).

- **Nouvelle fonction inconnue :**
  On pose une nouvelle fonction g définie par : $g(u, v, w) = f(x, y, z)$.
  Dans cette égalité on exprime tout en fonction de (x, y, z) ou de (u, v, w) à l'aide du changement de variables donné
  (voir les exemples ci-dessous pour comprendre les deux situations).
- **Calcul des dérivées partielles :**
  On calcule les dérivées partielles de g en fonction de celles de f ou les dérivées partielles de f en fonction de celles de g
  (voir les exemples ci-dessous pour comprendre les deux situations).
- **Changement de fonction dans l'équation :**
  On utilise les calculs fait à l'étape précédente pour modifier l'équation de l'énoncé.
- **Résolution de l'équation simple avec les nouvelles variables.**
- **Expression de la solution avec les anciennes variables :** si possible.

ATTENTION !
Le plus important est de bien savoir « démarrer » c'est-à-dire **poser la nouvelle fonction inconnue** g : $g(u, v, w) = f(x, y, z)$.
Ensuite, c'est la forme du changement de variable donné qui vous aidera à savoir s'il faut plutôt remplacer les x, y, z ou les u, v, w.

Exemple (Résolution d'une EDP)
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

en utilisant le changement de variable $\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$.

1. Nouvelle fonction inconnue

   Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $g(u, v) = f(x, y) \iff g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$.

2. Dérivées partielles de g en fonction de celles de f :

   Calculons les dérivées partielles de g :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

3. Changement de fonction dans l'équation
   On a : *(dans l'équation de départ on remplace les x et y par leurs expressions en fonction de u et v)*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = 0$$
$$\iff 2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0 \iff \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$$

4. Résolution de la nouvelle équation
   On sait que $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0 \iff \quad \exists A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ;\ g(u,v) = A(u)$

5. Retour aux variables initiales (si possible)
   Pour conclure, il faut que l'on donne la fonction f. On sait que $f(x,y) = g(u,v) = A(u)$. Si cela est possible, il est plus « élégant »d'exprimer le résultat en fonction des variables initiales !
   On remarque facilement ici que $\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$
   Ainsi f est solution de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ si et seulement si il existe une fonction A de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = A(x+y)$.

Exemple (Résolution d'une EDP, 2)
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

en utilisant le changement de variable $\begin{cases} u = x+y \\ v = 3x - y \end{cases}$.

1. Nouvelle fonction inconnue
   Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$g(u,v) = f(x,y) \iff f(x,y) = g(x+y, 3x-y).$$

2. Dérivées partielles de f en fonction de celles de g :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x+y,3x-y) + 3\frac{\partial g}{\partial v}(x+y,3x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x+y,3x-y) - \frac{\partial g}{\partial v}(x+y,3x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+y,3x-y) + 6\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y,3x-y) + 9\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+y,3x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+y,3x-y) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y,3x-y) - 3\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+y,3x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+y,3x-y) - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y,3x-y) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+y,3x-y)$$

3. Changement de fonction dans l'équation

   On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)-3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0 \iff 16\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)=0 \iff \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)=0$$

4. Résolution de la nouvelle équation

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v)=0 \\ \iff & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)(u,v)=0 \\ \iff & \exists a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=a(v) \\ \iff & \exists A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ g(u,v)=A(v)+B(u) \quad A \text{ est en fait une primitive de } a \end{aligned}$$

5. Retour aux variables initiales

   On peut donc conclure en disant que f est solution de l'équation si et seulement si il existe A et B deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et telles que $f(x,y) = A(3x-y)+B(x+y)$.

Remarque

En général, les changements de variables utilisés seront linéaires $\left(\left\{\begin{array}{l} u=ax+by \\ v=cx+dy \end{array}\right.\right)$, ou alors ce sera le changement de variables en coordonnées polaires (voir les exercices).

V Extremums d'une fonction de deux variables

1) Définitions, propriétés

On rappelle que $\mathcal{B}_o(a;r)$ désigne la boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$.

Définition 31 (Extremum local, extremum global).
Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On fixe $a \in A$.

*(i) On dit que f admet un **minimum global en** a si :* $\forall u \in A, \quad f(u) \geqslant f(a)$

*(ii) On dit que f admet un **minimum local en** a si* *il existe $r > 0$ tel que* $\forall u \in \mathcal{B}_o(a,r) \cap A, \quad f(u) \geqslant f(a)$

*(iii) On dit que f admet un **maximum global en** a si :* $\forall u \in A, \quad f(u) \leqslant f(a)$

*(iv) On dit que f admet un **maximum local en** a si* *il existe $r > 0$ tel que* $\forall u \in \mathcal{B}_o(a,r) \cap A, \quad f(u) \leqslant f(a)$

Définition 32 (Point critique).
*Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie **ouverte** Ω de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in \Omega$.*
On dit que *a est un point critique de f si $\nabla f(a) = (0, \dots, 0)$*

Remarque
Un point critique est un point en lequel **toutes** les dérivées partielles de f s'annulent.

Exemple
Soit la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2xy - 4y$.
Déterminer les points critiques de f.
Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+2y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y+2x-4$.
Il nous faut maintenant résoudre :

$$\nabla_{(x,y)} f = (0,0) \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 6y + 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 4y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

f admet donc un unique point critique, le point $(-1,1)$.

Théorème 33 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum local). *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie* ***ouverte*** *Ω de $\mathbb{R}^n$ et a un point de Ω.*
Si *f admet un extremum local en a* **alors** *a est un point critique de f* .
. . . .

Preuve : Traitons le cas du maximum local, l'autre cas est similaire.
Fixons $i \in \{1, \cdots, n\}$ et montrons que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.
En notant $\overrightarrow{e_i} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ le i^e vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\overrightarrow{e_i}) - f(a)}{t}.$$

Puisque Ω est ouvert, il existe $r_1 > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(a, r_1) \subset \Omega$. De plus, f atteint un maximum local en a, donc il existe $r_2 > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{B}_o(a, r_2) \cap \Omega$, $f(x) \leq f(a)$.
En posant $r = \min(r_1, r_2)$, on a $r > 0$ et $\forall x \in \mathcal{B}_o(a, r)$, $x \in \Omega$ et $f(x) \leq f(a)$.
En outre, $\forall t \in]-r; r[$, $a + t\overrightarrow{e_i} \in \mathcal{B}_o(a, r)$, puisque $\|a + t\overrightarrow{e_i} - a\| = |t| \underbrace{\|\overrightarrow{e_i}\|}_{=1} = |t| < r$.

On a donc $\forall t \in]-r; r[$, $f(a + t\overrightarrow{e_i}) \leq f(a)$, d'où

$$\forall t \in]0; r[, \ \frac{f(a + t\overrightarrow{e_i}) - f(a)}{t} \leq 0, \qquad \forall t \in]-r; 0[, \ \frac{f(a + t\overrightarrow{e_i}) - f(a)}{t} \geq 0.$$

Mais par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc on sait que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + t\overrightarrow{e_i}) - f(a)}{t}$ existe. Donc les inégalités précédentes, donnent, en passant à la limite à gauche et à droite en 0 :

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(a + t\overrightarrow{e_i}) - f(a)}{t} \leq 0, \qquad \lim_{t \to 0^-} \frac{f(a + t\overrightarrow{e_i}) - f(a)}{t} \geq 0.$$

Puisque $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + t\overrightarrow{e_i}) - f(a)}{t} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{f(a + t\overrightarrow{e_i}) - f(a)}{t} = \lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{f(a + t\overrightarrow{e_i}) - f(a)}{t}$, on en déduit que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + t\overrightarrow{e_i}) - f(a)}{t}$ est positif et négatif, donc nul.

□

ATTENTION !
La réciproque à ce théorème est en générale fausse. Il peut exister des points critiques de f qui ne sont pas des extremums locaux.

2) Méthode de recherche des extremums globaux sur une partie fermée et bornée

Méthode : Dans toute cette partie f est une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie D **fermée et bornée** de $\mathbb{R}^2$.

On sait alors que cette fonction f est bornée et atteint ses bornes.
On souhaite donc trouver le maximum et le minimum de f sur D.

Voici les étapes à suivre :

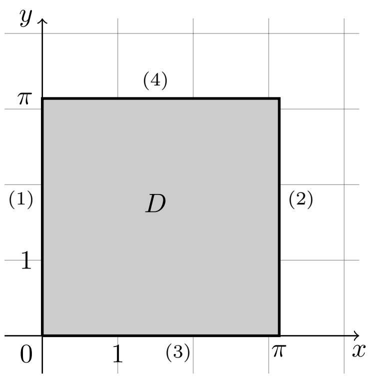
- On se place tout d'abord sur **l'intérieur de *D*** *(c'est une partie ouverte)* et on cherche sur cette partie les **points critiques** de f.

  Sur l'intérieur de D les seuls candidats possibles pour être le maximum ou le minimum sont les points critiques.

  On calcule ensuite la valeur de f en ces points.
- On étudie f sur **la frontière de *D***, et on y détermine le maximum et le minimum. *En général, cela se fait en paramétrant la frontière, souvent constituée de courbes simples.*
- On **compare les valeurs** obtenues dans les deux étapes précédentes pour déterminer le maximum et le minimum global de f sur D.

Exemple
On souhaite déterminer les extremums globaux sur $D = [0;\pi] \times [0;\pi]$ de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y).$$



D est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ et f est continue sur D donc f est bornée et atteint ses bornes sur D.

L'intérieur de D est la partie grisée et la frontière de D est constituées de 4 segments numérotés sur la figure.

1. Étude sur $]0;\pi[\times]0;\pi[$

   Sur la partie ouverte $]0;\pi[\times]0;\pi[$, les candidats pour le maximum et le minimum sont les points critiques de f.

   Pour trouver les points critiques nous avons besoin des dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(x)+\cos(x+y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(y)+\cos(x+y)$$

   Pour trouver les points critiques nous devons donc résoudre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(x)+\cos(x+y)=0 \\ \cos(y)+\cos(x+y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\cos\left(\dfrac{y}{2}\right)\cos\left(x+\dfrac{y}{2}\right)=0 \\ 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(y+\dfrac{x}{2}\right)=0 \end{cases}$$

   Sur $]0;\dfrac{\pi}{2}[$ la fonction cosinus ne s'annule pas (donc $\cos(y/2)\neq 0$ et $\cos(x/2)\neq 0$).

   Et sur $]0;\dfrac{3\pi}{2}[$ la fonction cosinus ne s'annule qu'en $\dfrac{\pi}{2}$. On a donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+\dfrac{y}{2}=\dfrac{\pi}{2} \\ y+\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3} \\ y=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

   f admet un unique point critique $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $f\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

2. Étude au bord
   (a) Bord (1) : sur ce bord x vaut 0 et y varie entre 0 et π. On a $f(0, y) = 2\sin(y)$:
   Le minimum de cette fonction vaut 0 et est atteint pour $y = 0$ ou $y = \pi$ et le maximum vaut 2 et est atteint pour $y = \dfrac{\pi}{2}$.
   (b) Bord (2) : sur ce bord x vaut π et y varie entre 0 et π. On a $f(\pi, y) = 0$.
   Le minimum et le maximum de cette fonction valent 0 et ils sont atteint pour tout les couples (π, y).
   (c) Bord (3) : sur ce bord x varie entre 0 et π, et y vaut 0. On a $f(x, 0) = 2\sin(x)$:
   Le minimum de cette fonction vaut 0 et est atteint pour $x = 0$ ou $x = \pi$ et le maximum vaut 2 et est atteint pour $x = \dfrac{\pi}{2}$.
   (d) Bord (4) : sur ce bord x varie entre 0 et π, et y vaut π. On a $f(x, \pi) = 0$.
   Le minimum et le maximum de cette fonction valent 0 et ils sont atteint pour tout les couples (x, π).

3. Conclusion
   Sur le bord de D, le candidat pour le maximum est 2 et celui pour le minimum est 0.
   A l'intérieur de D nous n'avons trouvé qu'un candidat possible pour le maximum et le minimum et il vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
   On sait que $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} > 2$ donc le maximum de f sur D est $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ et il est atteint en $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$.
   Le minimum de f est 0 et il est atteint en une infinité de points : tous les points du type (π, t) ou (t, π) avec $t \in [0; \pi]$ ainsi qu'en $(0, 0)$.

VI Applications géométriques

1) Courbes du plan définies implicitement

Dans cette partie, le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de son repère canonique $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

a) Définition paramétrique/implicite

Il y a essentiellement **deux façons de définir une "courbe"** $(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}^2$:

- **Définition paramétrique** : la courbe est définie comme **une image**.
  L'ensemble $(\mathcal{C})$ est alors le support d'un arc paramétré, c'est-à-dire que

$$(\mathcal{C}) = \overrightarrow{h}(I) = \{(x(t), y(t),\ t \in I\},$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\overrightarrow{h} : I \to \mathbb{R}^2$ est définie par $\overrightarrow{h}(t) = (x(t), y(t))$.
On dit aussi que $\boxed{t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ est une } \textbf{équation paramétrique} \text{ de } (\mathcal{C})}$.

Exemple
La cardioïde est définie par le paramétrage $\begin{cases} x(t) = \cos(t)(1+\cos(t)) \\ y(t) = \sin(t)(1+\cos(t)) \end{cases}$.

- **Définition implicite** : la courbe est définie comme **une image réciproque**.
  L'ensemble $(\mathcal{C})$ est alors formé des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient une équation de la forme $f(x, y) = \lambda$, où $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{C}) = f^{-1}(\{\lambda\}) = \{(x, y) \in D,\ f(x, y) = \lambda\}.$$

On dit alors que la courbe $(\mathcal{C})$ est une **ligne de niveau** de la fonction f, ou encore que $\boxed{f(x, y) = \lambda \text{ est une équation cartésienne de } (\mathcal{C})}$.

Remarque
Quitte à changer f en $f - \lambda$, on peut toujours considérer qu'une équation implicite de courbe est de la forme $f(x, y) = 0$.

Exemple
L'équation cartésienne $y - x^2 = 0$ définit une parabole de sommet $O = (0, 0)$.

Exemple (Le cercle unité)
Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1 est la courbe d'équation implicite :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

On peut obtenir à partir de cette équation plusieurs définitions paramétriques de $(\mathcal{C})$.

- On sait que $\begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) \\ y(\theta) = \sin(\theta) \end{cases}$ (avec $\theta \in]-\pi, \pi]$) est un système d'équations paramétriques de $(\mathcal{C})$.
- En posant $t = y/x$, on obtient à l'aide de l'équation cartésienne que l'équation $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$ est une paramétrisation du demi-cercle $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases}$

b) Cas particulier du graphe de fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Le graphe Γ d'une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ est un exemple particulier de courbe plane. Pour ce genre de courbe, il est très simple d'obtenir une représentation implicite ou paramétrique.

- **Représentation implicite** :
  On a (par définition d'un graphe) :
  $$\Gamma = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R},\ y = g(x)\} = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R},\ f(x,y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$
  en posant $f(x,y) = y - g(x)$.

- **Représentation paramétrique** :
  On a également $\Gamma = \{(t, g(t)),\ t \in I\}$, donc un paramétrage de Γ est donné par les équations $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = g(t) \end{cases}, t \in I$.

c) Tangente et normale d'une courbe plane implicite

Définition 34 (Point régulier d'une courbe définie implicitement).
Soit $(\mathcal{C})$ *la courbe définie implicitement par l'équation* $\boxed{f(x,y)=0}$, *avec* $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *une application* **de classe** $\boldsymbol{\mathcal{C}^1}$ *sur un ouvert* Ω *et soit* $M_0\in(\mathcal{C})$.
On dit que *M_0 est un point régulier de $(\mathcal{C})$ si $\nabla f(M_0)\neq\overrightarrow{0}$* .

Remarque
Si M_0 est un point **non régulier** de la courbe $(\mathcal{C})$ (on dit "singulier"), alors M_0 est un point critique de la fonction f.

Exemple
Tous les points du cercle $x^2+y^2=1$ sont réguliers.
En effet,

Définition 35 (Tangente en un point régulier).
Soit $(\mathcal{C})$ *la courbe définie implicitement par l'équation* $\boxed{f(x,y)=0}$, *avec* $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un ouvert* Ω *et soit* $M_0=(x_0;y_0)\in(\mathcal{C})$.
On suppose que M_0 *est* **régulier**. *On appelle* *tangente à $(\mathcal{C})$ en M_0 la droite $\mathcal{T}_{M_0}$ orthogonale au gradient $\nabla f(M_0)$ et passant par M_0* .

Remarque
- Ceci a un sens car $\nabla f(M_0)\neq\overrightarrow{0}$.
- Formellement, on a donc $\mathcal{T}_{M_0}=M_0+Vect\left(\nabla f(M_0)\right)^{\perp}$.

<u>**Dessin**</u> :

Remarque (Normale à la courbe)
La normale à $(\mathcal{C})$ au point M_0 (régulier) est donc la droite passant par M_0 et dirigée par le gradient $\nabla f(M_0)$. C'est la perpendiculaire à $\mathcal{T}_{M_0}$ passant par M_0.

Proposition 36 (Equation cartésienne de la tangente).
Soit $(\mathcal{C})$ *la courbe définie implicitement par l'équation* $\boxed{f(x,y)=0}$, *avec* $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un ouvert* Ω *et soit* $M_0=(x_0;y_0)$ *un point* **régulier** *de* $(\mathcal{C})$.
Une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}_{M_0}$ *dans le repère canonique de* $\mathbb{R}^2$ *est*

$$(x-x_0)\times\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\times\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \quad .$$

....

Preuve : Soit $M=(x;y)\in\mathbb{R}^2$. Par définition de la tangente $\mathcal{T}_{M_0}$, on a

$$M\in\mathcal{T}_{M_0}\iff\langle\overrightarrow{M_0M},\nabla f(M_0)\rangle=0.$$

□

Remarque importante :

Les points **réguliers** des courbes **implicites** correspondent aux **points réguliers** des courbes **paramétrées**, et les deux notions de "tangente" coïncident.

En effet, si une courbe $\mathcal{C}$ est à la fois définie par une équation paramétrique $t\mapsto(u(t),v(t))$ et une équation implicite $f(x,y)=0$, alors pour tout point $M=(u(t),v(t))\in\mathcal{C}$, on a

$$f(u(t),v(t))=0,$$

donc en dérivant :

$$\langle\nabla f(M(t)),M'(t)\rangle=0,$$

ce qui montre que $\nabla f(M(t))$ est orthogonal au vecteur vitesse $M'(t)$.

Exemple (Encore le cercle)
Déterminer la tangente et la normale en tout point $M_0 = (x_0; y_0)$ du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Exemple (Une autre courbe)
On considère la courbe (Γ) d'équation cartésienne : $\sin(x)e^y - x^2\cos(y) = 0$.

On souhaite connaitre l'équation cartésienne de la tangente au point $M_0 = (0, 0)$.

On note $f(x, y) = \sin(x)e^y - x^2\cos(y)$ la fonction associée à la courbe.

Pour trouver l'équation de la tangente en M_0 il nous faut tout d'abord calculer $\nabla f(M_0)$ et donc en premier lieu les dérivées partielles de f.

On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x)e^y - 2x\cos(y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(x)e^y + x^2\sin(y)$.

Donc $\nabla f(M_0) = (1, 0) \neq \overrightarrow{0}$, et ainsi M_0 est bien un point régulier de Γ.

La tangente à Γ en M_0 a donc pour équation

$$1 \times (x - 0) + 0 \times (y - 0) = 0 \iff x = 0$$

c'est une tangente verticale.

d) Gradient et lignes de niveau

Proposition 37 (Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau).
Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $M_0 \in \Omega$.
Si $\nabla f(M_0) \neq 0$ alors $\nabla f(M_0)$ est orthogonal aux "lignes de niveau" de f,
(i.e. les courbes d'équation $f(x, y) = \lambda$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$), et
$\nabla f(M_0)$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

Cette propriété (que l'on admettra) est en lien avec l'étude des lignes équipotentielles et des lignes de champ en physique.

<u>**Dessin**</u> :

2) Surfaces définies implicitement

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son repère canonique $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) Définition, plan tangent

Définition 38 (Surface définie implicitement).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
La surface définie implicitement par f est l'ensemble

$$(\mathcal{S}) = \{(x, y, z) \in \Omega,\ f(x, y, z) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

On dit que $f(x, y, z) = 0$ est une **équation cartésienne** *(ou* **implicite***) de $(\mathcal{S})$.*

Remarque
On aurait pu prendre $f(x, y, z) = \lambda$ (constante réelle) dans la définition.

Exemple
- La sphère de centre $A = (a, b, c)$ et de rayon $r \geq 0$ est la surface d'équation cartésienne $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$.
- Le plan affine de $\mathbb{R}^3$ passant par $A = (1, 2, 3)$ et de normale $\vec{n} = (1, 1, 1)$ est la surface d'équation cartésienne $x + y + z - 6 = 0$.
- Le graphe d'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une surface, d'éq. cartésienne $z = g(x, y)$.

Définition 39 (Point régulier d'une surface définie implicitement).
Soit $(\mathcal{S})$ *la surface définie implicitement par l'équation* $\boxed{f(x,y,z)=0}$, *avec* $f:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un ouvert* $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *et soit* $M_0\in(\mathcal{S})$.
On dit que M_0 *est un point régulier de* $(\mathcal{S})$ *si* $\nabla f(M_0)\neq\overrightarrow{0}$.

Exemple
Tous les points de la sphère de centre $O=(0,0,0)$ et de rayon 1, d'équation $x^2+y^2+z^2=1$, sont réguliers.
En effet,

Définition 40 (Plan tangent en un point régulier).
Soit $(\mathcal{S})$ *la surface définie implicitement par l'équation* $\boxed{f(x,y,z)=0}$, *avec* $f:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un ouvert* Ω *et soit* $M_0=(x_0;y_0;z_0)\in(\mathcal{S})$.
On suppose que M_0 *est* **régulier**. *On appelle* *plan tangent à* $(\mathcal{S})$ *en* M_0 *le plan* $\mathcal{P}_{M_0}$ *orthogonal au gradient* $\nabla f(M_0)$ *et passant par* M_0 .

Remarque
Formellement, on a donc $\mathcal{P}_{M_0}=M_0+Vect\,(\nabla f(M_0))^{\perp}$.

__Dessin__ :

Proposition 41 (Equation cartésienne du plan tangent).
Soit $(\mathcal{S})$ la surface définie implicitement par l'équation $\boxed{f(x,y,z)=0}$, *avec* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un ouvert* Ω *et soit* $M_0 = (x_0; y_0; z_0)$ *un point* **régulier** *de* $(\mathcal{S})$.
Une équation cartésienne du plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ *dans le repère canonique de* $\mathbb{R}^3$ *est*

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Preuve :

$\square$

Exemple (Encore la sphère)
En tout point $M_0 = (x_0; y_0; z_0)$ de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$, le plan tangent a pour équation cartésienne : $x_0x + y_0y + z_0z = 1$.

Exemple (Une autre surface)
Soit $(\mathcal{S})$ la surface d'équation cartésienne $x^2+2y^2-z^2+xz-1=0$.

1. Déterminer les valeurs du réel α pour lesquelles le point de coordonnées $(\alpha, 1, 1)$ appartient à $(\mathcal{S})$.
2. Montrer que ces points sont réguliers et écrire une équation du plan tangent à $(\mathcal{S})$ en ces points.

b) Position d'une surface d'équation $z = g(x, y)$ par rapport à son plan tangent

On considère la surface $(\mathcal{S})$ d'équation $\boxed{z = g(x, y)}$, où $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.
Dans ce cas particulier on a $(\mathcal{S}) : f(x, y, z) = 0$, avec $f(x, y, z) = g(x, y) - z$ et donc

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), -1\right) \neq \vec{0} \text{ pour tout } (x, y, z).$$

Ainsi tous les points de $(\mathcal{S})$ sont réguliers et au point $M_0 = (a, b, g(a, b))$, le plan tangent a pour équation :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) \times (x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \times (y - b) + (-1) \times (z - g(a, b)) = 0$$

$$\iff z = g(a, b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Inutile d'apprendre cela par coeur il est préférable de savoir le retrouver rapidement.

Méthode pour étudier la position de la surface par rapport à son plan tangent :
on étudie le signe de

$$\Delta(x,y) = g(x,y) - \left(g(a,b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)(y-b)\right).$$

pour (x,y) voisin de (a,b).

La quantité $\Delta(x,y)$ est la différence d'altitude entre le point $M = (x,y,g(x,y))$ (situé sur la surface) et son projeté sur le plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ parallèlement à l'axe (Oz), où $M_0 = (a,b,g(a,b))$.

On a alors :

- Si $\Delta(x,y) \geq 0$ pour (x,y) voisin de (a,b), alors la surface $(\mathcal{S})$ est "au-dessus" du plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$.
- Si $\Delta(x,y) \leq 0$ pour (x,y) voisin de (a,b), alors la surface $(\mathcal{S})$ est "en-dessous" du plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$.
- Si $\Delta(x,y)$ change de signe dans tout voisinage de (a,b), alors la surface $(\mathcal{S})$ traverse le plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$.

Dessin :

Exemple
On s'intéresse à la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = x\left(\ln^2(x) + y^2\right)$.
On souhaite déterminer la position de la surface $(\mathcal{S})$ d'équation $z = g(x,y)$ par rapport au plan tangent en $M_0 = (1,0,0)$.
Le plan tangent à $(\mathcal{S})$ en M_0 est $z = 0$.
On a donc $\Delta(x,y) = g(x,y) - 0 = x\left(\ln^2(x) + y^2\right) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[\times\mathbb{R}$, donc la surface $\mathcal{S}$ est au-dessus de $\mathcal{P}_{M_0}$.

Exemple
On considère toujours la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$.
On souhaite déterminer la position de la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = g(x,y)$ par rapport au plan tangent en $M_0 = (1,0,-1)$.

1. Équation du plan tangent
   On pose toujours $f(x,y,z) = g(x,y) - z = 3xy - x^3 - y^3 - z$.
   On a ici $\nabla f(M_0) = (-3,3,-1)$ et l'équation du plan tangent à S en M_0 est :

$$(-3)\times(x-1) + 3\times(y-0) + (-1)\times(z+1) = 0 \iff z = 2 - 3x + 3y$$

2. Position relative du plan par rapport à S
   Pour trouver la position de la surface par rapport au plan tangent il faut donc étudier le signe de $\Delta(x,y) = g(x,y) - (2 - 3x + 3y) = 3xy - x^3 - y^3 - 2 + 3x - 3y$ au voisinage de $(1,0)$.

   En effectuant le changement de variables $\left\{ \begin{array}{c} x = 1 + u \\ y = v \end{array} \right.$, cela revient à étudier le signe de
   $$h(u,v) = \Delta(1+u,v) = 3uv - 3u^2 - u^3 - v^3$$
   au voisinage de $(u,v) = (0,0)$.
   Puisque $h(0,v) = -v^3$, on en déduit que $h(u,v)$ change de signe au voisinage de $(0,0)$, et donc que la surface $\mathcal{S}$ traverse le plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$.