Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 14
Séries de Fourier

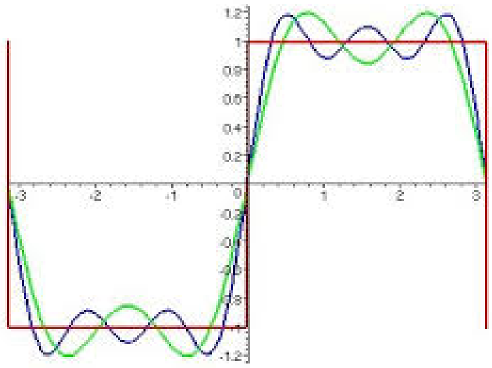


Table des matières

I Définitions générales

Dans tout ce chapitre, on considèrera des fonctions **à valeurs réelles**.

1) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, fonctions périodiques

Définition 1 (Fonction de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux).
Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

(i) *Soit $[a, b]$ un* **segment** *de $\mathbb{R}$ (avec $a \leq b$).*
On dit que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est **de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux** *si il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \{0, \cdots, p-1\}$, la restriction $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ possède un prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[x_i, x_{i+1}]$.*

(ii) *Soit I un intervalle* **quelconque** *de $\mathbb{R}$.*
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est **de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux** *si sa restriction à tout segment $[a, b] \subset I$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.*

Remarque
Dans la suite, on utilisera surtout les cas où $k = 0$ (fonctions continues par morceaux, déjà étudiées au chapitre 6), et $k = 1$ (fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux).

Remarque
- f de classe $\mathcal{C}^1 \implies f$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\implies f$ continue par morceaux, et les implications réciproques sont fausses.
- Toute fonction en escalier est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, puisqu'elle est "constante par morceaux".

ATTENTION !
Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux n'est pas nécessairement continue !

Méthode (En pratique)
- Une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux si et seulement si :
  - f est continue sur chaque ouvert $]x_i; x_{i+1}[$ de la subdivision ;
  - f admet des limites finies en x_i^+ et x_{i+1}^- pour tout i.
- Une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si et seulement si :
  - f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque ouvert $]x_i; x_{i+1}[$ de la subdivision ;
  - f admet des limites finies en x_i^+ et x_{i+1}^- ;
  - f' admet des limites finies en x_i^+ et x_{i+1}^-.

  (d'après le "théorème de la limite de la dérivée").

Dans la suite, on va s'intéresser à des fonctions périodiques (et au moins continues par morceaux).

Rappel (Fonction *T*-périodique)
Soit un réel $T > 0$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$. Dans ce cas, tout segment de la forme $[a; a+T]$ est appelé une période de f.

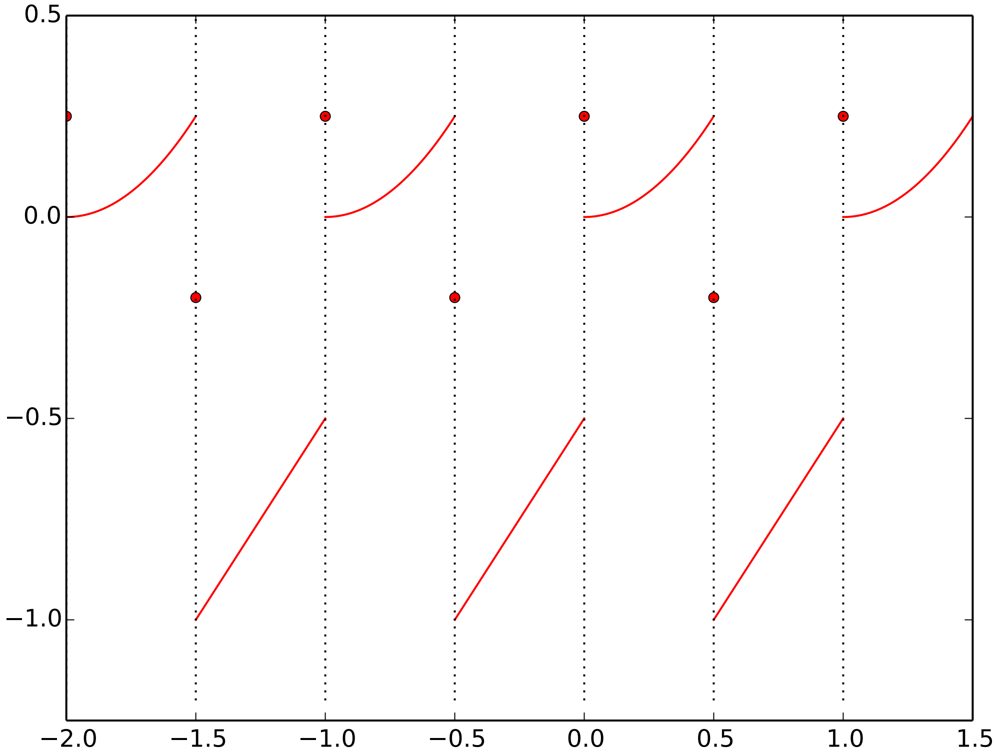
Lemme 2 (Caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^k$ par morceaux périodiques).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique et soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$f \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ par morceaux} \iff \text{la restriction } f|_{[a,a+T]} \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ par morceaux.}$$

Méthode
Il suffit donc de se restreindre à une période **fermée** pour montrer qu'une fonction périodique est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Preuve : L'implication $\boxed{\Rightarrow}$ est évidente.
Pour l'implication $\boxed{\Leftarrow}$: par hypothèse, la restriction $f|_{[a,a+T]}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Par périodicité, $f|_{]a-T,a[}(x) = f|_{]a,a+T[}(x+T)$, donc $f|_{]a-T,a[}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. En outre, le comportement de f en a^- est le même qu'en $(a+T)^-$,

donc on obtient que la restriction $f|_{]a-T,a+T]}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. Egalement, le comportement de f en $(a-T)^+$ est le même que celui en a^+, donc on obtient que $f|_{[a-T,a+T]}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux. En itérant, on obtient que la restriction de f à tout segment $[a-nT, a+nT]$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, ce qui assure que la restriction de f à tout segment de $\mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^k$ par morceaux, puisque tout segment de $\mathbb{R}$ est contenu dans un segment de la forme $[a-nT; a+nT]$. $\square$



Notation
Dans la suite, pour $T > 0$, on notera

- $\boldsymbol{\mathcal{C}_{M,T}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux et T-périodiques.
- $\boldsymbol{\mathcal{C}^1_{M,T}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et T-périodiques.
- $\boldsymbol{\mathcal{C}^0_{T}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et T-périodiques.

Nous admettrons le résultat suivant :

Proposition 3 (Structure d'espace vectoriel).
Soit un réel $T > 0$. Les ensembles $\mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1_{M,T}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^0_{T}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

2) Modes de Fourier T-périodiques

Proposition 4 (Modes de Fourier associés à une période $T > 0$).
Soit un réel $T > 0$. On note $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ la **pulsation** *associée à la période T.*
On appelle **modes de Fourier associés à la période T les fonctions**
$(t \mapsto \cos(n\omega t))_{n\in\mathbb{N}}$, $(t \mapsto \sin(k\omega t))_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Remarque

- Les $t \mapsto \cos(n\omega t)$ sont paires et les $t \mapsto \sin(k\omega t)$ sont impaires.
- Ces fonctions sont continues (évident) et T-périodiques car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos(n\omega(t+T)) = \cos(n\omega t + n\omega T) = \cos(n\omega t + 2n\pi) = \cos(n\omega t),$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \sin(k\omega(t+T)) = \sin(k\omega t + k\omega T) = \sin(k\omega t + 2k\pi) = \sin(k\omega t),$$

vu que $\omega T = 2\pi$ (par définition de la pulsation).

- T est la plus petite période commune à tous les éléments de cette famille de fonctions.

Exemple (Deux cas classiques)

- $\boxed{\text{Si } T = 2\pi}$, alors $\omega = 1$, et les modes de Fourier associés sont
$t \mapsto 1,\ t \mapsto \cos(t),\ t \mapsto \cos(2t), \cdots,\ t \mapsto \sin(t),\ t \mapsto \sin(2t),\ t \mapsto \sin(3t),\ \cdots$
- $\boxed{\text{Si } T = 1}$, alors $\omega = 2\pi$, et les modes de Fourier associés sont
$t \mapsto 1,\ t \mapsto \cos(2\pi t),\ t \mapsto \cos(4\pi t), \cdots,\ t \mapsto \sin(2\pi t),\ t \mapsto \sin(4\pi t),\ t \mapsto \sin(6\pi t),\ \cdots$

3) Coefficients de Fourier trigonométriques

Définition 5 (Coefficients de Fourier d'une fonction périodique).
Soient $T > 0$, $f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et soit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
On appelle **coefficients de Fourier de f** *les nombres réels*

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \\ b_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt \end{cases}.$$

ATTENTION !
L'expression des $(a_n(f))_{n\geq 1}$ **est différente de celle de $a_0(f)$!**

Méthode

- Le premier coefficient $\boldsymbol{a_0(f)}$ **est la valeur moyenne de** $\boldsymbol{f}$ **sur une période**.
- **On peut calculer les coefficients de Fourier en intégrant sur n'importe quel intervalle de largeur** $\boldsymbol{T}$ car les fonctions $t \mapsto f(t)\cos(n\omega t)$ et $t \mapsto f(t)\sin(n\omega t)$ sont T-périodiques (voir CH.6). On a ainsi :

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R})\,;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)dt \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R})\,;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)dt \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R}).$$

En pratique : on choisira l'intervalle d'intégration le mieux adapté à l'exemple étudié (pour une fonction paire/impaire, on choisira évidemment $[-T/2; T/2]$ au lieu de $[0;T]$, afin d'exploiter les symétries de f).

4) Série de Fourier

Définition 6 (Série de Fourier d'une fonction périodique).
Soit $T > 0$ et soit $f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle **série de Fourier de f au point x** *la série*

$$a_0(f) + \sum_{n\geq 1} \left(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\right),$$

où les $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, sont les coefficients de Fourier de f, et $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

La somme partielle d'ordre n (appelée **somme de Fourier d'ordre n de f***) est*

$$S_n(f)(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\cos(k\omega x) + b_k(f)\sin(k\omega x)\right).$$

Si la série de Fourier de f au point x converge, alors sa somme sera notée :

$$S(f)(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k(f)\cos(k\omega x) + b_k(f)\sin(k\omega x)\right).$$

ATTENTION !

Une série de Fourier est une **"série de fonctions"** : pour chaque point $x \in \mathbb{R}$, on a une série numérique dont le terme général dépend de x, comme pour une série entière.

Exemple (Fonction "partie décimale")
On considère la fonction $\boxed{f : x \mapsto x - E(x)}$, où $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ désigne la partie entière.

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $T > 0$ à préciser.
2. Représenter le graphe de f.
3. Calculer les coefficients de Fourier de f.
4. Déterminer la série de Fourier de f en tout point $x \in \mathbb{R}$.

1. La fonction partie entière E est en escalier, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Par somme avec la fonction continue $x \mapsto x$, on en déduit que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   De plus, f est T-périodique avec $T = 1$ car
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = x + 1 - E(x) - 1 = f(x).$$
   On a donc $f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $T = 1$.
2. Pour tout $x \in [0; 1[$, $E(x) = 0$ donc $f(x) = x$. En outre, $f(1) = 1 - E(1) = 0$. Par périodicité, on en déduit facilement le graphe de f :
3. Calculons les coefficients de Fourier de f. On a
   $$a_0(f) = \frac{1}{1}\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2},$$

   et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient en effectuant une IPP :
   $$a_n(f) = \frac{2}{1}\int_0^1 f(t)\cos(2\pi nt)dt = 2\int_0^1 t\cos(2\pi nt)dt = 0,$$
   $$b_n(f) = \frac{2}{1}\int_0^1 f(t)\sin(2\pi nt)dt = 2\int_0^1 t\sin(2\pi nt)dt = -\frac{1}{n\pi}.$$
   (ici, on a $\omega = 2\pi$).
4. D'après la question précédente, la série de Fourier de f au point $x \in \mathbb{R}$ est :
   $$a_0(f) + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)) = \frac{1}{2} - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\pi}\sin(2\pi nx).$$

5) Cas où certains coefficients de Fourier sont nuls

Proposition 7 (Coefficients de Fourier d'une fonction paire/impaire).
Soit $T > 0$ et soit $f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

(i) *Si f est* ***paire****, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = 0$, donc la série de Fourier de f au point x s'écrit $a_0(f) + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(n\omega x)$.*

(ii) *Si f est* ***impaire****, alors $a_0(f) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = 0$, donc la série de Fourier de f au point x s'écrit $\sum_{n\geq 1} b_n(f)\sin(n\omega x)$.*

Preuve : Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto f(t)\sin(n\omega t)$ est impaire (comme produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire). On en déduit d'après les propriétés de l'intégrale d'une fonction impaire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt = 0.$$

On raisonne de même si f est impaire (on a $t \mapsto f(t)\cos(n\omega t)$ impaire).

□

Proposition 8 (Coeff. de Fourier dans le cas d'une symétrie de glissement).
Soit $T > 0$ et soit $f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x)$ ("symétrie de glissement").

Alors les coefficients de Fourier d'indices pairs de f sont nuls, c'est-à-dire

$$a_0(f) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_{2k}(f) = b_{2k}(f) = 0.$$

La série de Fourier de f au point x s'écrit donc

$$\sum_{k\geq 0} \left(a_{2k+1}(f)\cos((2k+1)\omega x) + b_{2k+1}(f)\sin((2k+1)\omega x)\right).$$

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt + \int_{T/2}^T f(t)\cos(n\omega t)dt\right).$$

En effectuant le changement de variable $u = t - \frac{T}{2}$ dans la seconde intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{T/2}^{T} f(t)\cos(n\omega t)dt &= \int_0^{T/2} f\left(u+\frac{T}{2}\right)\cos\left(n\omega\left(u+\frac{T}{2}\right)\right)du \\ &= \int_0^{T/2} -f(u)\cos\left(n\omega u + n\pi\right)du \qquad , \\ &= -\int_0^{T/2} (-1)^n f(u)\cos(n\omega u)du\end{aligned}$$

et donc en rassemblant les deux intégrales :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{T/2}(1-(-1)^n)f(t)\cos(n\omega t)dt.$$

D'où $a_n(f) = 0$ si n est pair.

De même on montre que $a_0(f) = 0$ et $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{T/2}(1-(-1)^n)f(t)\sin(n\omega t)dt = 0$ si n est pair.

□

Exemple (Signal en créneaux)
Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, et telle que $g(t) = 1$ pour $t \in]0; \pi[$ et $g(\pi) = 0$.

1. Réprésenter le graphe de g.
2. Déterminer la série de Fourier de g.

1. Graphe : puisque g est impaire, on a $g(0) = 0$ et $g(t) = -1$ pour $t \in]-\pi; 0[$, donc g est connue sur $]-\pi, \pi]$. Par 2π-périodicité, on déduit le graphe complet de f en translatant le motif.

2. Puisque g est impaire, on a $a_n(g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par parité de $t \mapsto g(t)\sin(nt)$:
   $$b_n(g) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt,$$
   c'est-à-dire
   $$b_n(g) = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos(nt)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n),$$
   d'où $b_n(g) = 0$ si n est pair et $b_n(g) = \frac{4}{n\pi}$ si n est impair. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de g au point x est donc
   $$\sum_{k\geq 0} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)x).$$

   Remarque
   Le fait que les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ soient nuls pour n pair s'explique par la présence d'une symétrie de glissement, évidente sur le graphe de f.

II Formule de Parseval

1) Enoncé

Théorème 9 (Formule de Parseval).
Soit $T > 0$ et soit $f \in \mathcal{C}_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ les coefficients de Fourier de f.

Alors les séries $\sum\limits_{n\geq 1} a_n(f)^2$ et $\sum\limits_{n\geq 1} b_n(f)^2$ convergent, et on a

$$a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt.$$

Preuve : Admis, c'est un théorème difficile. Mais on donnera quand même une interprétation géométrique de ce théorème dans la dernière section. □

2) Application au calcul de sommes

Exemple (Fonction "partie décimale")
Reprenons la fonction $f : x \mapsto x - E(x)$ (où E désigne la partie entière).

En appliquant la formule de Parseval, calculer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

On a vu que $f \in \mathcal{C}_{M,1}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, et les coefficients de Fourier valent :

$$a_0(f) = \frac{1}{2},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n(f) = 0, \quad b_n(f) = -\frac{1}{n\pi}.$$

D'après la formule de Parseval, on a

$$\frac{1}{1}\int_0^1 f(t)^2 dt = a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right),$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = 2\pi^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

III Convergence des séries de Fourier

Dans certains cas, la série de Fourier d'une fonction périodique f converge, et on peut calculer sa somme $S(f)(x)$.

1) Théorème de Dirichlet

Théorème 10 (Théorème de Dirichlet).
Soit $T > 0$ et soit $\boldsymbol{f \in \mathcal{C}^1_{M,T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f au point x converge et

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f\right).$$

Preuve : Admis, c'est un théorème difficile. □

ATTENTION !
Ici, l'hypothèse sur f est plus exigeante que dans la formule de Parseval : il faut que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et pas simplement continue par morceaux.

Remarque

- Reformulation : en tout point $x \in \mathbb{R}$, la suite des sommes de Fourier

$$S_n(f)(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(k\omega x) + b_k(f)\sin(k\omega x))$$

converge vers **la moyenne des limites à gauche et à droite de f en x** lorsque $n \to +\infty$.

- En notant $S(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x))$, cela se réécrit :

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}(f(x+h) + f(x-h)).$$

- On appelle **fonction régularisée de f** la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}(f(x+h)+f(x-h))$.
- On comprend très bien qu'en général, on n'a pas $S(f)(x) = f(x)$. En effet, si on modifie la valeur de f seulement au point x, les coefficients de Fourier ne changent pas (puisque ce sont des intégrales), et donc la série $S(f)(x)$ non plus.
  Il serait donc absurde que $S(f)(x)$ ne dépende que d'une valeur ponctuelle de f.

Remarque (Cas où f est continue sur $\mathbb{R}$)

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux **et continue sur** $\mathbb{R}$, alors on aura

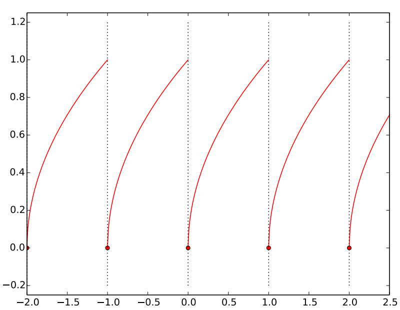
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2}\left(\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) = f(x),$$

et donc d'après le théorème de Dirichlet, on aura $\forall x \in \mathbb{R},\ S(f)(x) = f(x)$.
Dans ce cas, f est **développable en série de Fourier**, c'est-à-dire qu'en tout point $x \in \mathbb{R}$, f est égale à sa série de Fourier.

ATTENTION !

L'hypothèse $\mathcal{C}^1$ par morceaux est indispensable !

Le théorème de Dirichlet ne s'applique pas dans le cas où le graphe de f présente une tangente verticale (si par exemple la dérivée f' tend vers $+\infty$ en un point).



2) Application au calcul de sommes

Exemple (Fonction "partie décimale")
En appliquant le théorème de Dirichlet à la fonction $f : x \mapsto x - E(x)$, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et calculer sa somme.
On a vu auparavant que la série de Fourier de f au point $x \in \mathbb{R}$ est

$$\frac{1}{2} - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\pi} \sin(2\pi n x).$$

Pour montrer que cette série converge et calculer sa somme, appliquons le théorème de Dirichlet : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux car :

- elle est 1-périodique, donc il suffit d'étudier la restriction de f à la période fermée $[0; 1]$, notée $\tilde{f} = f|_{[0;1]}$;
- on a
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases},$$
donc $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1[$ et admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ au segment $[0; 1]$, puisque $\tilde{f} : x \mapsto x$ et $\tilde{f}' : x \mapsto 1$ admettent une limite finie en 1^-.

D'après le théorème de Dirichlet, on a donc la convergence de la série de Fourier de f en x, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2\pi n x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f \right)$$

En évaluant en $x = \frac{1}{4}$, on obtient :

$$\sin(2\pi n x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases},$$

donc

$$\frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi} = \frac{1}{2} \left(\lim_{(1/4)^-} f + \lim_{(1/4)^+} f \right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

(car f est continue au point $1/4$). Finalement, on trouve

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

IV Interprétations géométriques

On fixe une période $T > 0$, et on pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
On travaille ici avec des fonctions **continues** sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques.

Notation
Dans la suite, on va adopter la notation suivante pour les modes de Fourier associés à la période T :

$$c_0 : x \mapsto 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n : x \mapsto \cos(n\omega x), \quad s_n : x \mapsto \sin(n\omega x).$$

Proposition 11 (Structure préhilbertienne de $\mathcal{C}^0_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$).
Sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (fonctions réelles continues et T-périodiques) ,
l'application $E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)g(t)dt$.
est un ***produit scalaire****.*
La norme associée à ce produit scalaire est $\forall f \in E,\ \|f\| = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f^2(t)dt}$.

Proposition 12 (Les modes de Fourier sont orthogonaux).
Dans l'espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, la famille $(c_0, c_1, s_1, \cdots, c_n, s_n, \cdots)$ est ***orthogonale****, et on a $\|c_0\| = 1$, ainsi que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|c_n\| = \|s_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Preuve : Voir l'exercice 7 du TD12. □

Remarque
Ceci montre en particulier que la famille des modes de Fourier est **libre** (on rappelle que toute famille orthogonale **formée de vecteurs non nuls** est libre).

ATTENTION !
Cette famille n'est **pas orthonormée**.

On en déduit (en normalisant chaque vecteur) le corollaire suivant :

Corollaire 13 (Famille orthonormée de modes de Fourier).
Dans l'espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, la famille
$(c_0, \sqrt{2}c_1, \sqrt{2}s_1, \cdots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_n, \cdots)$ est ***orthonormée*** .

On utilise cette famille orthonormée pour montrer le résultat suivant :

Proposition 14 (Interprétation géométrique des sommes de Fourier).
Soit $f \in E = \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit $n \in \mathbb{N}$.
Dans l'espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, la somme partielle de Fourier $S_n(f)$
est le projeté orthogonal de f sur le sous-espace vectoriel de dimension finie

$$F_n = Vect(c_0, c_1, s_1, \cdots, c_n, s_n).$$

Remarque
On a $\dim(F_n) = 2n + 1$.

Preuve : Puisque la famille $(c_0, \sqrt{2}c_1, \cdots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_1, \cdots, \sqrt{2}s_n)$ est orthonormée (donc libre) et formée de vecteurs de F_n, on en déduit que c'est une base orthonormée de F_n (et donc $\dim(F_n) = 2n + 1$).
On dispose donc d'une expression directe de la projection orthogonale sur le sous-espace F_n (voir le chapitre 12) : pour tout $f \in \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$p_{F_n}(f) = \langle f; c_0 \rangle c_0 + \sum_{k=1}^{n} \langle f; \sqrt{2}c_k \rangle \sqrt{2}c_k + \sum_{k=1}^{n} \langle f; \sqrt{2}s_k \rangle \sqrt{2}s_k.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
p_{F_n}(f)(x) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sqrt{2}c_k(t)\mathrm{d}t \right) \sqrt{2}c_k(x) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sqrt{2}s_k(t)\mathrm{d}t \right) \sqrt{2}s_k(x) \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{2}{T}\int_0^T f(t)c_k(t)\mathrm{d}t \right) c_k(x) + \left(\frac{2}{T}\int_0^T f(t)c_k(t)\mathrm{d}t \right) s_k(x) \right) \\
&= a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)c_k(x) + b_k(f)s_k(x)) = S_n(f)(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque (Interprétation géométrique de la formule de Parseval si f est continue)
Si $f \in \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$, la formule de Parseval se réécrit alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|^2 = \|f\|^2.}$

En effet : pour n fixé, dans le sous-espace F_n muni de sa base orthonormée

$$(c_0, \sqrt{2}c_1, \cdots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_1, \cdots, \sqrt{2}s_n),$$

le vecteur

$$S_n(f) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)c_k + b_k(f)s_k)$$

a pour coordonnées $\left(a_0(f), \frac{a_1(f)}{\sqrt{2}}, \cdots, \frac{a_n(f)}{\sqrt{2}}, \frac{b_1(f)}{\sqrt{2}}, \cdots, \frac{b_n(f)}{\sqrt{2}}\right)$, donc le carré de sa norme vaut

$$\|S_n(f)\|^2 = a_0(f)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k(f)}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k(f)}{\sqrt{2}}\right)^2 = a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)^2 + b_k(f)^2\right),$$

donc

$$a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k(f)^2 + b_k(f)^2\right) = \lim_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|^2,$$

ainsi que

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt = \langle f; f\rangle = \|f\|^2.$$