

Chapitre 11

Equations différentielles linéaires

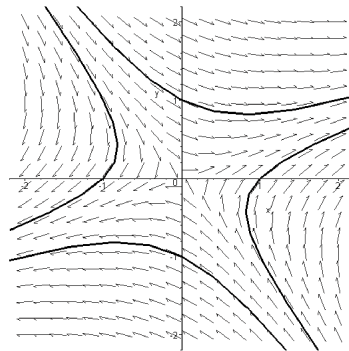


Table des matières

I Généralités sur les équations différentielles linéaires	1
1) Définition et terminologie	1
2) Structure de l'ensemble des solutions sur un intervalle	4
3) Principe de superposition	8
II Eq. différentielles linéaires d'ordre 1 (rappels)	9
1) La "forme résolue"	9
2) Le cas des formes "non résolues"	18
III Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	21
1) Définition et terminologie	21
2) Structure de l'ensemble des solutions d'un syst. homogène	24
3) Pratique de la résolution des systèmes homogènes	25
a) Cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur \mathbb{K}	25
b) Cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur \mathbb{C} mais pas sur \mathbb{R}	34
c) Cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable	38
4) Comportement asymptotique des solutions dans le cas où A est diagonalisable	43
5) Cas d'un système avec second membre (HP)	46
6) Lien entre équations et systèmes différentiels	47
<hr/>	
IV Equations différentielles linéaires d'ordre 2	54
1) Cas des coefficients constants (vu en TSI 1)	55
a) Résolution de (H) dans le cas complexe	55
b) Résolution de (H) dans le cas réel	60
c) Résolution de l'équation complète (E)	62
2) Cas général sous "forme résolue" : structure de l'ensemble des solutions	68
3) Cas général : techniques de résolution	73
a) Méthode d'abaissement d'ordre	73
b) Utilisation de séries entières	78
c) Changement de variable	79
4) Le cas des formes "non résolues"	82

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

I Généralités sur les équations différentielles linéaires

1) Définition et terminologie

Définition 1 (Équation différentielle linéaire d'ordre n).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une **équation différentielle linéaire d'ordre n** est une équation de la forme

$$(E) : a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t),$$

où :

- les $a_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues, appelées les coefficients de (E) ;
- $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, et est appelée le second membre de (E) ;
- l'inconnue est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ n -fois dérivable .

On appelle **équation homogène associée à (E)** l'équation différentielle linéaire

$$(H) : a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0.$$

Notation

En général, une équation différentielle linéaire se note de manière abrégée :

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

(on ne rappelle pas la dépendance de y en t).

ATTENTION !

La notation « $y(t)$ » pour l'inconnue n'est pas figée (même si traditionnellement t désigne « le temps »). On peut par exemple noter

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

où dans ce cas, l'inconnue y dépend (implicitement) de la variable x .

Remarque

Le cas $n = 1$ a été étudié en TSI 1 : ce sont les équations du premier ordre, de la forme :

$$a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t).$$

Exemple

- L'équation $ty'' + t^2y' - 6 \ln(t)y = \cos(t)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Ici, les coefficients sont $a_0(t) = -6 \ln(t)$, $a_1(t) = t^2$ et $a_2(t) = t$, le second membre est $b(t) = \cos(t)$, et ce sont des fonctions continues $I \rightarrow \mathbb{R}$, avec $I =]0, +\infty[$.

- L'équation $y'''(t) + y(t) = e^{it}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 3. Ici, les coefficients sont constants, et le second membre est à valeurs complexes :

$$a_0(t) = a_3(t) = 1, \quad a_1(t) = a_2(t) = 0, \quad b(t) = e^{it}.$$

- L'équation $y^{(3)} + y^2 = t$ est une équation différentielle **non** linéaire (d'ordre 3). La non-linéarité vient du y^2 (qui est un produit, et non pas une dérivée seconde!).
- L'équation $y \times y'' = t$ est une équation différentielle **non** linéaire (d'ordre 2). La non-linéarité vient du produit $y \times y''$.

Notation

Dans la suite de cette partie I, on notera

$$(E) : \sum_{k=0}^n a_k(t)y^{(k)} = b(t)$$

avec $a_k \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, et on notera :

$$(H) : \sum_{k=0}^n a_k(t)y^{(k)} = 0$$

(l'équation homogène associée).

2) Structure de l'ensemble des solutions sur un intervalle

Définition 2 (Solution sur un intervalle I).

*On appelle **solution de (E) sur I** toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ n -fois dérivable*

telle que : $\forall t \in I, \sum_{k=0}^n a_k(t)f^{(k)}(t) = b(t)$.

Notation

On notera $\mathcal{S}_I(E)$ l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle I , et $\mathcal{S}_I(H)$ l'ensemble des solutions de (H) sur l'intervalle I .

Proposition 3 (Structure de l'ensemble des solutions de (H)).

L'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ des solutions de (H) sur I est un \mathbb{K} -espace vectoriel .

ATTENTION !

Il s'agit bien là d'une équation différentielle linéaire **homogène**. S'il y a un second membre, ça ne marche pas !

Preuve : Montrons que $\mathcal{S}_I(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

- La fonction nulle $\tilde{0} : I \rightarrow \mathbb{K}$ est évidemment une solution de (H) sur I (puisque ses dérivées sont toutes nulles et le second membre est nul).
- Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux solutions de (H) sur I . Ce sont des fonctions n -fois dérivables qui vérifient

$$\forall t \in I, \quad \sum_{k=0}^n a_k(t) f^{(k)}(t) = 0, \quad \sum_{k=0}^n a_k(t) g^{(k)}(t) = 0.$$

Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda f + g$ est aussi n -fois dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad \sum_{k=0}^n a_k(t) (\lambda f + g)^{(k)}(t) = \lambda \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n a_k(t) f^{(k)}(t) \right)}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k(t) g^{(k)}(t)}_{=0} = 0,$$

ce qui montre que $\lambda f + g$ est solution de (H) sur I .

L'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ contient la fonction nulle, et est stable par somme et produit externe, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

□

Remarque

On verra plus loin que, dans certains cas, l'espace vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$ est de dimension finie et on pourra calculer sa dimension.

Proposition 4 (Structure de l'ensemble des solutions de (E)).

Si on connaît une solution particulière de (E) sur I, notée $y_p : I \rightarrow \mathbb{K}$, alors

$$\mathcal{S}_I(E) = \mathcal{S}_I(H) + y_p = \{y + y_p, y \text{ solution de } (H)\}.$$

Preuve : Soit $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction n -fois dérivable. Montrons l'équivalence :

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \iff y - y_p \text{ solution de } (H) \text{ sur } I.$$

Par hypothèse, on a $\sum_{k=0}^n a_k(t)y_p^{(k)} = b(t)$. Donc

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\iff \sum_{k=0}^n a_k(t)y^{(k)} = b(t) \\ &\iff \sum_{k=0}^n a_k(t)y^{(k)} = \sum_{k=0}^n a_k(t)y_p^{(k)} \\ &\iff \sum_{k=0}^n a_k(t)(y - y_p)^{(k)} = 0 \\ &\iff y - y_p \text{ solution de } (H) \end{aligned}$$

(toutes ces égalités ayant lieu pour $t \in I$). Ceci montre que les éléments $y \in \mathcal{S}_I(E)$ sont exactement les éléments de $\mathcal{S}_I(H)$ auxquels on rajoute la fonction y_p . \square

ATTENTION !

Ce résultat s'applique **s'il existe des solutions de (E) sur I**.

Dans certains cas, on aura $\mathcal{S}_I(E) = \emptyset$, i.e. (E) ne possède pas de solutions sur I.

Par contre, pour une éq. homogène, on a toujours $\mathcal{S}_I(H) \neq \emptyset$ (il y a la solution nulle).

3) Principe de superposition**Proposition 5 (Principe de superposition).**

On considère les deux équations différentielles :

$$(E_1) : \sum_{k=0}^n a_k(t)y^{(k)} = b_1(t), \quad (E_2) : \sum_{k=0}^n a_k(t)y^{(k)} = b_2(t).$$

Si $y_1 \in \mathcal{S}_I(E_1)$ et $y_2 \in \mathcal{S}_I(E_2)$, alors la somme $y_1 + y_2$ est une solution sur I de

$$(E_3) : \sum_{k=0}^n a_k(t)y^{(k)} = b_1(t) + b_2(t).$$

Preuve : Par hypothèse : $\forall t \in I, \sum_{k=0}^n a_k(t)y_1^{(k)}(t) = b_1(t)$ et $\sum_{k=0}^n a_k(t)y_2^{(k)}(t) = b_2(t)$, donc

$$\sum_{k=0}^n a_k(t)(y_1 + y_2)^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^n a_k(t)y_1^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^n a_k(t)y_2^{(k)}(t) = b_1(t) + b_2(t).$$

\square

II Eq. différentielles linéaires d'ordre 1 (rappels)

Ce sont les équations différentielles du type $(E) : a_1(t)y' + a_0(t)y = d(t)$, où a_0, a_1 et d sont des fonctions continues $I \rightarrow \mathbb{K}$, I étant un intervalle de \mathbb{R} .

1) La "forme résolue"

Lorsque $t \mapsto a_1(t)$ ne s'annule pas sur I , une telle équation peut se mettre "sous forme résolue" en divisant par a_1 :

$$y' + a(t)y = b(t).$$

Théorème 6 (Résolution d'une éq. d'ordre 1 sous forme résolue).

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + a(t)y = b(t)$,

où $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et I est un intervalle de \mathbb{R} . On note $(H) : y' + a(t)y = 0$.

(i) Les solutions de (H) sur I sont les fonctions de la forme

$$y_h(t) = \alpha e^{-A(t)} \text{ avec } A \text{ une primitive de } a \text{ sur } I \text{ et } \alpha \in \mathbb{K}.$$

(ii) Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme

$$y(t) = f(t)e^{-A(t)} \text{ avec } A \text{ une primitive de } a \text{ sur } I \text{ et } f'(t) = b(t)e^{+A(t)} \text{ pour tout } t \in I \text{ ("méthode de variation de la constante").}$$

Preuve :

(i) Soit A une primitive de a sur I (elle existe car a est continue).

- On vérifie que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, la fonction $y_h : t \mapsto \alpha e^{-A(t)}$ est bien solution de (H) :

$$y_h'(t) + a(t)y_h(t) = -\alpha A'(t)e^{-A(t)} + \alpha a(t)e^{-A(t)} = 0,$$

car $A'(t) = a(t)$ pour tout $t \in I$.

- Réciproquement, vérifions que toute solution de (H) sur I est bien de cette forme. Pour toute solution y_h de (H) , le produit $y_h(t)e^{+A(t)}$ est constant sur l'intervalle I , car

$$\frac{d}{dt} (y_h(t)e^{+A(t)}) = \underbrace{(y_h'(t) + a(t)y_h(t))}_{=0} e^{+A(t)} = 0.$$

Il existe donc une constante $\alpha \in \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I, y_h(t)e^{+A(t)} = \alpha$, ce qui montre la formule voulue : $y_h(t) = \alpha e^{-A(t)}$.

(ii) Cela repose sur un changement d'inconnue.

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction dérivable. Puisque $e^{-A(t)}$ ne s'annule pas sur I , on peut poser :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \frac{y(t)}{e^{-A(t)}} = y(t)e^{A(t)},$$

et on a $y(t) = f(t)e^{-A(t)}$.

Cherchons alors des conditions sur f pour que y soit solution de (E) sur I .

La fonction f est dérivable sur I et $\forall t \in I, y(t) = f(t)e^{-A(t)}$, donc

$$y'(t) = f'(t)e^{-A(t)} - a(t)f(t)e^{-A(t)} = f'(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t),$$

soit

$$y'(t) + a(t)y(t) = f'(t)e^{-A(t)}$$

donc y est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad f'(t)e^{-A(t)} = b(t),$$

c'est-à-dire $f'(t) = b(t)e^{+A(t)}$. Les solutions de (E) sont donc les

$$y(t) = f(t)e^{-A(t)}, \text{ avec } f'(t) = b(t)e^{+A(t)}.$$

□

Remarque

- Le choix de la primitive A n'influe en rien sur la forme des solutions.
- La "méthode de variation de la constante" ne fournit pas seulement une solution particulière de (E) , elle fournit **directement toutes les solutions de (E)** .

Corollaire 7 (Structure des ensembles de solutions).

Avec les notations précédentes ($(H) : y' + a(t)y = 0$ et $(E) : y' + a(t)y = b(t)$) :

(i) *L'espace vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$ est de dimension 1.*

(ii) *L'ensemble $\mathcal{S}_I(E)$ est non vide.*

Preuve : Une fois la primitive A de a fixée, le théorème précédent montre que

$$\mathcal{S}_I(H) = \{t \mapsto \alpha e^{-A(t)}, \alpha \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(t \mapsto e^{-A(t)}),$$

donc la fonction non nulle $t \mapsto e^{-A(t)}$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_I(H)$.

Puisque la fonction $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ est continue sur I , elle possède elle aussi des primitives f sur I , donc (E) possède des solutions sur I . □

ATTENTION !

La méthode de variation de la constante n'est pas toujours la meilleure méthode pour résoudre l'équation avec second membre (E) . Parfois, il vaut mieux **d'abord vérifier si (E) possède une solution particulière y_p triviale** (une constante, un polynôme, une fonction puissance, ...), et dans ce cas on a (d'après la prop. 4) : $\mathcal{S}_I(E) = \mathcal{S}_I(H) + y_p$.

Exemple

Résoudre $(E) : ty' - y = t \cos(t) - \sin(t)$ sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.

Notons $(H) : ty' - y = 0$ l'équation homogène associée. Sur l'intervalle I , on a

$$(H) \iff y' - \frac{1}{t}y = 0, \quad (E) \iff y' - \frac{1}{t}y = \cos(t) - \frac{\sin(t)}{t}.$$

- **Première méthode** : avec la "méthode de variation de la constante" : une primitive de $a : t \mapsto -\frac{1}{t}$ sur I est $A : t \mapsto -\ln(t)$, donc on a

$$\mathcal{S}_I(H) = \{t \mapsto \alpha e^{\ln(t)}, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{t \mapsto \alpha t, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Les solutions de (E) sont donc sous la forme $y(t) = f(t) * t$, avec f dérivable telle que

$$\frac{d}{dt}(f(t) * t) - \frac{1}{t} * (f(t) * t) = \cos(t) - \frac{\sin(t)}{t} \iff f'(t) * t = \cos(t) - \frac{\sin(t)}{t},$$

c'est-à-dire

$$f'(t) = \frac{t \cos(t) - \sin(t)}{t^2}.$$

Si on remarque que $\frac{t \cos(t) - \sin(t)}{t^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)$, on peut alors conclure que les solutions de (E) sont les

$$y(t) = f(t) * t, \text{ avec } f(t) = \frac{\sin(t)}{t} + \alpha, \alpha \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire que

$$\mathcal{S}_I(E) = \{t \mapsto \alpha t + \sin(t), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

- **Seconde méthode** : bien plus astucieuse.

On trouve une solution évidente de $(H) : ty' - y = 0$: la fonction $t \mapsto t$.

Puisqu'on sait que **sur l'intervalle** $I =]0; +\infty[$, les équations (E) et (H) peuvent se mettre sous forme résolue, l'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ est une droite vectorielle (d'après le corollaire 7), qui contient la fonction $t \mapsto t$. On a donc directement

$$\mathcal{S}_I(H) = Vect(t \mapsto t) = \{t \mapsto \alpha t, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

On remarque également que $t \mapsto \sin(t)$ est une solution évidente de

$$(E) : ty' - y = t \cos(t) - \sin(t).$$

D'après la proposition 4, on a donc

$$\mathcal{S}_I(E) = \mathcal{S}_I(H) + \{t \mapsto \sin(t)\} = \{t \mapsto \alpha t + \sin(t), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Théorème 8 (Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations d'ordre 1).

Pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{K}$, l'équation $(E) : y' + a(t)y = b(t)$

(avec a, b continues sur l'intervalle I) possède une unique solution sur I qui vérifie la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Preuve : Fixons une primitive A de a . D'après le théorème 6, les solutions de (E) sur I sont les $y : t \mapsto f(t)e^{-A(t)}$, avec $f'(t) = b(t)e^{A(t)}$, donc

$$f(t) = \int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} ds + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Les solutions de (E) sont donc les

$$y : t \mapsto \left(\int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} ds + \alpha \right) e^{-A(t)}, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

En évaluant en $t = t_0$, on obtient $y(t_0) = \alpha e^{-A(t_0)}$, donc la condition initiale est vérifiée si et seulement si $\alpha = y_0 e^{A(t_0)}$, ce qui montre l'unicité voulue : la solution cherchée est

$$y(t) = \left(\int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)} ds + y_0 e^{A(t_0)} \right) e^{-A(t)}.$$

□

Vocabulaire

On appelle **problème de Cauchy linéaire d'ordre 1** le système

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t), & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

d'inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{K}$, avec $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, et $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

D'après le théorème précédent, ce problème possède donc une unique solution y .

2) Le cas des formes "non résolues"

ATTENTION !

Si $(E) : a_1(t)y' + a_0(t)y = d(t)$ ne peut pas se mettre "sous forme résolue" (parce que la fonction a_1 s'annule sur l'intervalle I) alors on peut ne pas avoir existence/unicité des solutions. Le théorème 8 (de Cauchy-Lipschitz) ne s'applique pas sur I .

Méthode

On résout d'abord (E) sur les intervalles où $t \mapsto a_1(t)$ ne s'annule pas (en mettant sous forme résolue) puis on cherche à "raccorder" les différentes solutions obtenues.

Exemple

Résoudre l'équation $(H) : ty' + 2y = 0$:

1. sur $I_1 =]0, +\infty[$ puis sur $I_2 =]-\infty, 0[$;
2. sur $I = \mathbb{R}$.

1. **Résolution sur I_1 ou I_2** : Sur chacun des intervalles I_1 et I_2 , la fonction $t \mapsto t$ ne s'annule pas, donc on a

$$ty' + 2y = 0 \iff y' + \frac{2}{t}y = 0.$$

Les solutions sur I_1 sont donc les fonctions $t \mapsto \alpha e^{-2\ln(t)} = \frac{\alpha}{t^2}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sur I_2 , idem.

2. **Résolution sur \mathbb{R}** : si y est solution sur \mathbb{R} , alors il existe deux constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{t^2} & \text{si } t > 0 \\ \frac{\beta}{t^2} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

De plus, en évaluant en $t = 0$ l'équation (H) , on obtient $0 * y'(0) + 2y(0) = 0$, c'est-à-dire $y(0) = 0$. Mais y est nécessairement dérivable sur \mathbb{R} , donc continue en 0, ce qui impose que $\alpha = \beta = 0$ (sinon, y possèdera des limites infinies en 0). L'équation $ty' + 2y = 0$ admet donc une seule solution sur \mathbb{R} : la fonction nulle.

Remarque

- Dans cet exemple, on a donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\}$ (ce n'est pas une droite vectorielle, alors que $\mathcal{S}_{]0; +\infty[}(H)$ et $\mathcal{S}_{]-\infty; 0[}(H)$ sont des droites vectorielles).
- On a donc un exemple de problème de Cauchy qui ne possède pas de solutions :

$$\begin{cases} ty' + 2y = 0, & \forall t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

En effet, on ne peut pas ici imposer la valeur de y en 0, car l'équation (H) évaluée en $t = 0$ entraîne la condition $y(0) = 0$.

III Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Les systèmes différentiels linéaires constituent la généralisation des équations différentielles linéaires d'ordre 1. Ce sont, en effet, des équations différentielles **vectérielles** d'ordre 1, c'est-à-dire des systèmes d'équations différentielles à plusieurs inconnues.

1) Définition et terminologie

Définition 9 (Système différentiel linéaire à coefficients constants).

(i) **Un système différentiel linéaire à coefficients constants**

est un système d'équations différentielles de la forme

$$(E) : \begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + \cdots + a_{1,n}x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + \cdots + a_{2,n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + \cdots + a_{n,n}x_n(t) + b_n(t) \end{cases},$$

où $n \in \mathbb{N}^$, les $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont des coefficients dans \mathbb{K} et*

les $b_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues.

Les inconnues x_1, \dots, x_n sont des fonctions dérivables $I \rightarrow \mathbb{K}$.

(ii) *Un tel système peut s'écrire sous forme matricielle :*

$$(E) : X'(t) = AX(t) + b(t), \text{ avec :}$$

- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (la matrice du système) ;

- $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ défini par $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ (le second membre) ;

- $X : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ (l'inconnue vectorielle) .

(iii) *On appelle **système homogène associé à (E)** le système différentiel*

$$(H) : X'(t) = AX(t).$$

Remarque

- Dans le cas $n = 1$, on retrouve une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
- On rappelle que pour les fonctions vectorielles $I \rightarrow \mathbb{K}^n$, la dérivation se fait "composante par composante".
- En général, on note les systèmes différentiels linéaires sous forme abrégée :

$$X' = AX + b(t).$$

- On peut également considérer des systèmes différentiels linéaires à coefficients non constants, mais nous ne les étudierons pas ici (la théorie est bien plus complexe).

Exemple ($n = 2$)

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + t \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + e^t \end{cases}$$
 est un système différentiel linéaire à coefficients constants.

Sous forme matricielle, il s'écrit $X'(t) = AX(t) + b(t)$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

.....

2) Structure de l'ensemble des solutions d'un syst. homogène**Théorème 10 (Structure des solutions du système $X' = AX$).**

On considère un système différentiel homogène et à coefficients constants

(H) : $X' = AX$ (où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Alors :

.....

(i) *L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ des solutions $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ de (H) est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .*

.....

(ii) *Pour tout réel t_0 et tout vecteur $X_0 \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution de (H) qui vérifie la condition initiale $X(t_0) = X_0$.*

.....

Vocabulaire

On dit que le **problème de Cauchy vectoriel** $\begin{cases} X' = AX & \forall t \in I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ possède une unique solution X pour tout couple $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$.

Remarque

Ce théorème est admis, mais nous en donnerons dans la section suivante une preuve dans le cas simple où la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3) Pratique de la résolution des systèmes homogènes

Dans la suite, (H) désigne le système différentiel $X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur \mathbb{K}

Lorsque la matrice A est diagonalisable, on sait résoudre (H) :

Proposition 11 (Solutions de $X' = AX$ avec A diagonalisable).

On suppose que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on note $P \in GL_n(\mathbb{K})$

une matrice inversible telle que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Alors, les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \vec{C}_1 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} \vec{C}_n,$$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, et $\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n$ sont les colonnes de la matrice de passage P

Preuve : Soit $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ une fonction dérivable. On a

$$X' = AX \iff \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = PDP^{-1}X(t) \iff \forall t \in \mathbb{R}, P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t).$$

On pose alors $Y(t) = P^{-1}X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ est dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = \frac{d}{dt}(P^{-1}X(t)) = P^{-1}X'(t),$$

(puisque la matrice P ne dépend pas de t).

En notant y_1, \dots, y_n les composantes de Y , on obtient :

$$X' = AX \iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = DY(t) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}.$$

Ce dernier système est découplé, donc facile à résoudre :

$$Y' = DY \iff \begin{cases} y_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n(t) = \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{cases}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Les solutions de (H) sont donc les fonctions X de la forme

$$X(t) = PY(t) = P \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Décomposons alors sur la base canonique de \mathbb{K}^n , notée $\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_n$: les solutions se réécrivent

$$X(t) = P \left(\alpha_1 e^{\lambda_1 t} \vec{E}_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} \vec{E}_n \right) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} P \vec{E}_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} P \vec{E}_n.$$

Mais pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $P \vec{E}_j = \vec{C}_j$ (la j^e colonne de la matrice P), donc

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \vec{C}_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} \vec{C}_n.$$

□

Retour sur la preuve du théorème 10 dans le cas A diagonalisable :

Supposons A diagonalisable. On vient de montrer que les solutions de $(H) : X' = AX$ sur \mathbb{R} sont :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \text{Vect} \left(t \mapsto e^{\lambda_1 t} \vec{C}_1, \dots, t \mapsto e^{\lambda_n t} \vec{C}_n \right),$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ sont les valeurs propres complexes non nécessairement distinctes de A , et $(\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n)$ sont les colonnes d'une matrice de passage P qui diagonalise A .

(i) Ceci montre que l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$ est bien un \mathbb{K} -espace vectoriel : c'est le sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ engendré par la famille de fonctions (X_1, \dots, X_n) définie par $X_k : t \mapsto e^{\lambda_k t} \vec{C}_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Montrons maintenant que la famille (X_1, \dots, X_n) est libre :

si $\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)}$ (avec les $\alpha_k \in \mathbb{K}$), alors on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} \vec{C}_k = 0_{\mathbb{R}},$$

donc en évaluant en $t = 0$, cela entraîne

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{C}_k = 0_{\mathbb{R}},$$

ce qui implique $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ puisque la famille des colonnes de P est libre (c'est une matrice inversible).

Finalement, (X_1, \dots, X_n) est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H)$, qui est donc de dimension n .

(ii) Fixons $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$. Une solution de (H) est de la forme

$$X(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} \vec{C}_k,$$

avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, donc on a

$$X(t_0) = X_0 \iff \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t_0} \vec{C}_k = X_0 \iff P \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t_0} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t_0} \end{pmatrix} = X_0.$$

La matrice P étant inversible, on a

$$X(t_0) = X_0 \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t_0} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t_0} \end{pmatrix} = P^{-1} X_0.$$

Puisque $e^{\lambda_k t_0} \neq 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$, ceci montre qu'un seul n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ convient, d'où l'existence et l'unicité de la solution cherchée. \square

Remarque

La forme des solutions de (H) n'est pas à connaître par cœur. Il faut, dans chaque exercice, reproduire le raisonnement utilisé dans la démonstration de la prop 11.

Méthode

Soit un système $X'(t) = AX(t)$ avec A diagonalisable sur \mathbb{K} .

- On diagonalise la matrice A , en déterminant P inversible telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D .
- On effectue un changement de fonction inconnue en posant $X(t) = PY(t)$ (Y est la nouvelle inconnue). On a alors $X'(t) = PY'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc

$$X'(t) = AX(t) \iff PY'(t) = PDP^{-1}PY(t) \iff PY'(t) = PDY(t) \iff Y'(t) = DY(t).$$

Il faut détailler cette équivalence à chaque fois.

- On résout le système découplé $Y' = DY$ (qui est formé de n équations différentielles de la forme $y' = \lambda y$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ est une constante).
- On détermine les solutions X en calculant le produit PY .

Remarque

Pour résoudre un tel système, le calcul de P^{-1} n'est donc pas nécessaire.

Exemple

Résoudre le système différentiel (H) : $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$.

- **Réécriture matricielle** : Ce système s'écrit $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- **Réduction de la matrice A** : avec les techniques classiques de réduction (voir CH. 4), on obtient $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- **Résolution du système différentiel (H).**

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = PY(t)$. On a alors :

$$X'(t) = AX(t) \iff PY'(t) = PDP^{-1}PY(t) \iff PY'(t) = PDY(t) \iff Y'(t) = DY(t).$$

En notant (u, v) les composantes de la fonction Y , on a

$$Y' = DY \iff \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = 4v(t) \end{cases} \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u(t) = \alpha e^t \\ v(t) = \beta e^{4t} \end{cases} .$$

On retrouve alors X en multipliant Y par P :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^t - 2\beta e^{4t} \\ \alpha e^t + \beta e^{4t} \end{pmatrix} .$$

Finalement, les solutions du système sont

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^t - 2\beta e^{4t} \\ y(t) = \alpha e^t + \beta e^{4t} \end{cases}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 .$$

On peut écrire ceci de manière algébrique :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} \right)$$

(on retrouve bien un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2).

b) Cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur \mathbb{C} mais pas sur \mathbb{R}

Méthode

Pour résoudre un système différentiel $(H) : X' = AX$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur \mathbb{C} mais pas sur \mathbb{R} :

- On diagonalise la matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en choisissant :
 - des vecteurs propres dans \mathbb{R}^n dans chaque sous-espace propre E_{λ} avec $\lambda \in \mathbb{R}$;
 - des vecteurs propres dans \mathbb{C}^n deux à deux conjugués (qui correspondent aux couples $(E_{\lambda}, E_{\bar{\lambda}})$ si $\lambda \notin \mathbb{R}$).

En effet, le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(XI_n - A)$ est dans $\mathbb{R}[X]$, donc ses racines (les valeurs propres) non réelles sont deux à deux conjuguées.

- On détermine une base de solutions à valeurs complexes de (H) avec la méthode expliquée précédemment.
- À partir de cette base de solutions, on déduit une base de solutions de (H) à **valeurs réelles** en conservant les solutions à composantes réelles et en prenant les parties réelle et imaginaire des solutions à composantes non réelles.

Exemple

Soit le système différentiel (H) :
$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}.$$

1. Montrer que la matrice A du système est diagonalisable sur \mathbb{C} mais pas sur \mathbb{R} , et la diagonaliser.
2. Déterminer les solutions à valeurs complexes de (H) .
3. En déduire les solutions à valeurs réelles de (H) .

1. Le système s'écrit sous forme matricielle $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Avec les techniques de réduction du CH. 4, on montre que A est diagonalisable dans \mathbb{C} mais pas dans \mathbb{R} .

Attention à bien choisir des vecteurs propres conjugués !

On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$.

2. **Solutions complexes de (H)** : à l'aide de la technique présentée dans la partie précédente, on obtient les solutions complexes de (H) :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{(1+i)t} + \beta e^{(1-i)t} \\ y(t) = -\alpha i e^{(1+i)t} + \beta i e^{(1-i)t} \end{cases}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Cet ensemble, noté $\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2}(H)$, est bien un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 2 :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2}(H) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(t \mapsto X_1(t), t \mapsto X_2(t)),$$

avec

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ -ie^{(1+i)t} \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \overline{X_1(t)}.$$

3. Solutions réelles de (H) :

L'espace des solutions complexes est engendré par la famille de fonctions $(X_1, \overline{X_1})$, donc aussi par la famille $(\operatorname{Re}(X_1), \operatorname{Im}(X_1))$ puisque

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2}(H) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(\operatorname{Re}(X_1) + i\operatorname{Im}(X_1), \operatorname{Re}(X_1) - i\operatorname{Im}(X_1)) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(\operatorname{Re}(X_1), \operatorname{Im}(X_1)).$$

On obtient donc une base de l'ensemble des solutions réelles :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2}(H) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(\operatorname{Re}(X_1), \operatorname{Im}(X_1)).$$

Puisque $X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) + i \sin(t) \\ \sin(t) - i \cos(t) \end{pmatrix}$, on en déduit finalement que

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2}(H) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left(t \mapsto e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \mapsto e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \right).$$

et donc les solutions réelles du système (H) sont :

$$\begin{cases} x(t) = ae^t \cos t + be^t \sin t \\ y(t) = ae^t \sin t - be^t \cos t \end{cases}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

c) Cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable

Méthode

Lorsque la matrice A n'est pas diagonalisable (ni dans \mathbb{R} , ni dans \mathbb{C}), on peut s'en sortir en trigonalisant A (ce qui est toujours possible, au moins sur \mathbb{C}) et en appliquant le même changement de fonction inconnue que dans le cas diagonalisable $X(t) = PY(t)$. Aucune technique de trigonalisation n'étant au programme, il faudra se laisser guider par l'énoncé du problème.

Exemple On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que $\chi_A(X) = (X - 1)(X - 2)^2$.

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable, et déterminer une famille (u_1, u_2) de vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

2. On complète la famille libre (u_1, u_2) en posant $u_3 = (0, 0, 1)$.
Trigonaliser A à l'aide de la base $\mathcal{B} = (u_1; u_2; u_3)$.

3. Résoudre le système différentiel (H) :
$$\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = x + 3y - z \\ z' = x + 2y \end{cases}.$$

1. Les sous-espaces propres de A sont

$$E_1 = \text{Vect}(1, 0, 1), \quad E_2 = \text{Vect}(0, 1, 1),$$

donc $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 1 + 1 = 2 < \dim(\mathbb{R}^3)$, ce qui montre que A n'est pas diagonalisable. La famille $(u_1; u_2) = ((1, 0, 1); (0, 1, 1))$ convient.

2. **Trigonalisation de A :**

Notons f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A et écrivons sa matrice T dans la base \mathcal{B} .

On a $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_3) = (-1, -1, 0) = -u_1 - u_2 + 2u_3$, donc

$$T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Résolution du système (H) :

Le système (H) s'écrit sous forme matricielle $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = PY(t)$. On a alors :

$$X'(t) = AX(t) \iff PY'(t) = PTP^{-1}PY(t) \iff PY'(t) = PTY(t) \iff Y'(t) = TY(t).$$

$$\text{En notant } Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \text{ on obtient le système : } \begin{cases} u'(t) = u(t) - w(t) \\ v'(t) = 2v(t) - w(t) \\ w'(t) = 2w(t) \end{cases}.$$

Ce dernier système se résout assez facilement (en commençant par la dernière équation, et en traitant les deux autres avec la méthode de variation de la constante) :

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^t - \gamma e^{2t} \\ (\beta - \gamma t)e^{2t} \\ \gamma e^{2t} \end{pmatrix}.$$

On obtient alors les solutions du système en calculant $X(t) = PY(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^t - \gamma e^{2t} \\ y(t) = (\beta - \gamma t)e^{2t} \\ z(t) = \alpha e^t + (\beta - \gamma t)e^{2t} \end{cases}, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Algébriquement, ceci se réécrit

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ -te^{2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix} \right).$$

4) Comportement asymptotique des solutions dans le cas où A est diagonalisable

Théorème 12 (Comportement des solutions de $X' = AX$ quand $t \rightarrow +\infty$).

Soit le système différentiel $(H) : X' = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, de valeurs propres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (pas nécessairement distinctes).

Les solutions de (H) sont notées $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$.

(i) Si $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$, alors pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_j(t) = 0$ (pour n'importe quelle solution X).

On dit dans ce cas que le système est **asymptotiquement stable**.

(ii) Si $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0$, alors pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la composante x_j est bornée sur \mathbb{R}^+ (pour n'importe quelle solution X).

On dit dans ce cas que le système est **stable**.

(iii) Si $\exists k_0 \in \{1, \dots, n\}$, $\operatorname{Re}(\lambda_{k_0}) > 0$, alors il existe au moins une solution $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ telle que $\exists j_0 \in \{1, \dots, n\}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_{j_0}(t)| = +\infty$.

On dit dans ce cas que le système est **instable**.

Preuve : Puisque A est diagonalisable, il existe une base $(\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_n)$ de \mathbb{K}^n formée de vecteurs propres de A . Les solutions de (H) sont (d'après la prop. 11) les fonctions de la forme :

$$X(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} \vec{C}_k, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, notons $C_{k,j}$ la j^e composante du vecteur propre \vec{C}_k . On a alors

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad x_j(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} C_{k,j} \in \mathbb{K}.$$

(i) Supposons que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$. Alors, pour tout $t > 0$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$|x_j(t)| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| |C_{k,j}| e^{\lambda_k t} = \sum_{k=1}^n |\alpha_k| |C_{k,j}| e^{\operatorname{Re}(\lambda_k) t}.$$

Puisqu'on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\operatorname{Re}(\lambda_k) t} = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on en déduit (par somme de limites) que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_j(t)| = 0$, quels que soient les scalaires $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$.

- (ii) Si $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0$, alors on a $e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t} \leq 1$ pour tout $t > 0$ et tout $k \in \{1, \dots, n\}$, donc la majoration précédemment effectuée donne :

$$\forall t > 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad |x_j(t)| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| |C_{k,j}|,$$

ce qui montre que toutes les solutions ont leurs composantes bornées sur \mathbb{R}^+ .

- (iii) Si $\exists k_0 \in \{1, \dots, n\}$, $\operatorname{Re}(\lambda_{k_0}) > 0$, alors on considère la solution

$$X(t) = e^{\lambda_{k_0} t} \overrightarrow{C_{k_0}} = e^{\lambda_{k_0} t} \begin{pmatrix} C_{k_0,1} \\ \vdots \\ C_{k_0,n} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{C_{k_0}}$ n'est pas nul (c'est un vecteur propre), donc au moins une des composantes x_j de cette solution vérifie :

$$|x_j(t)| = \underbrace{|C_{k_0,j}|}_{>0} e^{\operatorname{Re}(\lambda_{k_0})t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty.$$

□

5) Cas d'un système avec second membre (HP)

Considérons maintenant un système différentiel linéaire à coefficients constants et avec second membre $(E) : X' = AX + b(t)$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$.

On note $(H) : X' = AX$ son système homogène associé. On admet le résultat suivant :

Proposition 13 (Structure des solutions de $X' = AX + b(t)$ (HP)).

- (i) L'ensemble $\mathcal{S}_I(E)$ des solutions de (E) sur I est non vide, et on a $\mathcal{S}_I(E) = \mathcal{S}_I(H) + X_p$, pour toute solution $X_p : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ de (E) .
- (ii) Pour tout $t_0 \in I$ et tout vecteur $X_0 \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution $X : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ de (E) telle que $X(t_0) = X_0$.

Problème : comment trouver **une solution particulière de (E)** ? On peut :

- soit **chercher une solution de (E) sous une forme simple** (un polynôme par exemple), indépendamment de la résolution de (H) ;
- soit essayer d'appliquer la méthode de résolution de (H) (diagonalisation ou trigonalisation de A) **directement sur (E)** , pour tenter de découpler les équations.

Se référer aux exercices pour des exemples.

6) Lien entre équations et systèmes différentiels

Proposition 14 (Equivalence entre équation et système différentiels).

On considère une équation différentielle linéaire d'ordre n homogène et

à coefficients constants : $(H_1) : a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$,

où $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, $a_n \neq 0$. Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction n -fois dérivable.

Alors, y est solution de (H_1) si et seulement si la fonction vectorielle

$X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ est solution du système diff.

$$(H_2) : X' = AX \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Remarque (A RETENIR)

En d'autres termes, on a une bijection entre les deux ensembles de solutions :

- les solutions de l'équation (H_1) sont exactement les premières composantes des solutions vectorielles du système différentiel (H_2) .
- les solutions du système (H_2) sont exactement les fonctions vectorielles de la forme

$$X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \text{ où } y \text{ est une solution de l'équation } (H_1).$$

Preuve : Avec les notations de l'énoncé, la fonction X est dérivable et :

$$X' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$$

Montrons l'équivalence voulue :

- Si y est solution de (H_1) , alors $y^{(n)} = -\frac{a_0}{a_n}y - \frac{a_1}{a_n}y' - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}y^{(n-1)}$, donc

$$X' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ -\frac{a_0}{a_n}y - \frac{a_1}{a_n}y' - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}y^{(n-1)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = AX,$$

où A est la matrice donnée par l'énoncé.

- Réciproquement, si $X' = AX$, avec A la matrice donnée par l'énoncé, alors

$$\begin{cases} y' = y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = y^{(n-1)} \\ y^{(n)} = -\frac{a_0}{a_n}y - \frac{a_1}{a_n}y' - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}y^{(n-1)} \end{cases},$$

donc $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

□

On déduit de ce résultat une méthode de résolution pour les équations à coefficients constants :

Méthode

On considère une équation différentielle linéaire d'ordre n , homogène et à coefficients constants :

$$(H) : a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

où $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$.

- On détermine le système différentiel équivalent à (H) .

Pour cela, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ et on détermine $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle

que :

$$y \text{ solution de } (H) \iff X'(t) = AX(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- On résout le système $X' = AX$, en posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, où P est une matrice de passage qui diagonalise (ou trigonalise) A .
- On ne conserve que la première composante de X , c'est la solution de (H) .

Astuce : dans le calcul de $X(t) = PY(t)$, il suffit de calculer le produit de la première ligne de P par $Y(t)$ car seule la première composante de X nous intéresse.

Exemple

On considère l'équation différentielle $(H) : y^{(3)}(t) - 2y''(t) - y'(t) + 2y(t) = 0$.

1. Déterminer le système différentiel équivalent à (H) .
2. Le résoudre et en déduire les solutions de (H) .

1. **Système différentiel équivalent à (H) :**

On pose donc $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

L'équation (H) est équivalente à $X'(t) = AX(t)$.

2. **Résolution :** On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

On pose maintenant $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ tel que $X(t) = PY(t)$.

On a alors $X'(t) = AX(t) \iff PY'(t) = PDP^{-1}PY(t) \iff Y'(t) =$
 $DY(t) \iff \begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ v'(t) = v(t) \\ w'(t) = 2w(t) \end{cases}.$

Donc $Y(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} \\ K_2 e^t \\ K_3 e^{2t} \end{pmatrix}.$

Pour finir, il nous faut le premier élément de $X(t)$, c'est-à-dire le résultat obtenu en multipliant la première ligne de P par la colonne $Y(t)$.

On obtient $y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^t + K_3 e^{2t}$ avec $(K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3$.

Finalement on a

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(H) = \text{Vect}(t \mapsto e^{-t}; t \mapsto e^t; t \mapsto e^{2t}).$$

L'ensemble des solutions de (H) sur \mathbb{R} est donc un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3.

IV Equations différentielles linéaires d'ordre 2

On considère dans cette partie des équations différentielles linéaire d'ordre 2 :

$$(E) : a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = d(t),$$

avec $a_0, a_1, a_2, d : I \rightarrow \mathbb{K}$ **continues** sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

L'équation homogène associée à (E) sera notée :

$$(H) : a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0.$$

Remarque (Très importante)

- Si la fonction a_2 ne s'annule pas sur I , l'équation (E) peut se réécrire :

$$(E) \iff y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t),$$

avec $a(t) = \frac{a_1(t)}{a_2(t)}$, $b(t) = \frac{a_0(t)}{a_2(t)}$ et $c(t) = \frac{d(t)}{a_2(t)}$ (a, b, c sont aussi continues sur I).

On parle alors **d'équation « sous forme résolue »**. Pour ce genre d'équation, on dispose de résultats théoriques, que nous allons exposer ici.

- Si la fonction a_2 s'annule sur I , il faut commencer par résoudre l'équation (E) sur les intervalles où a_2 ne s'annule pas puis tenter de « recoller » les solutions. Un exemple sera traité à la fin, afin de montrer que les résultats valables pour les équations sous forme résolue **ne sont plus vrais lorsque le coefficient a_2 (devant y'') s'annule** (ce problème avait déjà été mis en évidence pour les équations d'ordre 1).

1) Cas des coefficients constants (vu en TSI 1)

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme

$$(E) : ay'' + by' + cy = d(t),$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ (constantes réelles ou complexes), $a \neq 0$, et $d \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

L'équation homogène associée est $(H) : ay'' + by' + cy = 0$.

a) Résolution de (H) dans le cas complexe

Proposition 15 (Solutions complexes de (H)).

Soit l'équation différentielle $(H) : ay'' + by' + cy = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$.

On considère l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (*), d'inconnue $r \in \mathbb{C}$, et de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.

- Si $\Delta \neq 0$, alors, en notant r_1 et r_2 les deux solutions complexes distinctes de (*), les solutions de (H) (définies de \mathbb{R} dans \mathbb{C}) sont les fonctions :

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad (A, B) \in \mathbb{C}^2.$$

- Si $\Delta = 0$, alors, en notant $r_0 = \frac{-b}{2a}$ l'unique solution complexe de (*), les solutions de (H) (définies de \mathbb{R} dans \mathbb{C}) sont les fonctions :

$$y(t) = (A + Bt)e^{r_0 t}, \quad (A, B) \in \mathbb{C}^2.$$

Preuve : On se ramène à un système différentiel, comme expliqué dans la partie III. Les solutions de (H) sont les premières composantes des solutions $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ du système différentiel linéaire

$$(\tilde{H}) : X'(t) = MX(t), \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

On résout (\tilde{H}) en réduisant la matrice M , dont le polynôme caractéristique est

$$\chi_M(\lambda) = \frac{1}{a}(a\lambda^2 + b\lambda + c).$$

Les valeurs propres de M sont donc les solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \neq 0$, alors M possède deux valeurs propres complexes distinctes (non nécessairement conjuguées, attention!), notées r_1, r_2 . La matrice M est alors diagonalisable : il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} := D$.

En notant \vec{C}_1, \vec{C}_2 les colonnes de P , on obtient alors les solutions de (\tilde{H}) :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2}(\tilde{H}) = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left(t \mapsto e^{r_1 t} \vec{C}_1, t \mapsto e^{r_2 t} \vec{C}_2 \right).$$

On en déduit (en prenant les premières composantes des solutions de (\tilde{H})) que les solutions de l'équation (H) sont :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}}(H) = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \left(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t} \right).$$

- Si $\Delta = 0$, alors M possède une unique valeur propre double, notée $r_0 \in \mathbb{C}$. Si M était diagonalisable, alors il existerait $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que

$$M = P \begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix} P^{-1} = r_0 P I_2 P^{-1} = r_0 P P^{-1} = r_0 I_2,$$

ce qui est faux. Donc M n'est pas diagonalisable, elle est seulement trigonalisable et donc semblable à $T = \begin{pmatrix} r_0 & 1 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$ (voir chapitre de trigonalisation).

En notant $P \in GL_2(\mathbb{C})$ une matrice telle que $P^{-1}MP = T$, on peut donc déterminer les solutions de (\tilde{H}) : ce sont les fonctions de la forme $X(t) = PY(t)$, où $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est solution du système $Y' = TY$. Or,

$$Y' = TY \iff \begin{cases} u' = r_0 u + v \\ v' = r_0 v \end{cases} \iff \begin{cases} v(t) = \beta e^{r_0 t}, & \beta \in \mathbb{C} \\ u' = r_0 u + \beta e^{r_0 t} \end{cases}.$$

A β fixé, les solutions de l'équation $u' = r_0 u + \beta e^{r_0 t}$ s'obtiennent avec la méthode de variation de la constante :

$$u(t) = (\beta t + \alpha) e^{r_0 t}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Donc :

$$Y' = TY \iff \begin{cases} u(t) = (\alpha + \beta t)e^{rot} \\ v(t) = \beta e^{rot} \end{cases}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,$$

c'est-à-dire

$$Y' = TY \iff Y(t) = e^{rot} \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

On en déduit :

$$X' = MX \iff X(t) = e^{rot} P \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

En prenant la première composante de ce produit matriciel, on conclut que

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}}(H) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(t \mapsto e^{rot}, t \mapsto te^{rot}).$$

□

b) Résolution de (H) dans le cas réel

Si l'équation de départ est à coefficients réels, on peut trouver les solutions **à valeurs réelles** de (H) à partir de celles à valeurs complexes.

Proposition 16 (Solutions réelles de (H)).

Soit l'équation différentielle $(H) : ay'' + by' + cy = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$.

On considère l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (*), d'inconnue $r \in \mathbb{C}$, et de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta > 0$, alors, en notant r_1 et r_2 les deux solutions réelles distinctes de (*), les solutions de (H) **à valeurs réelles** sont les fonctions :

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si $\Delta = 0$, alors, en notant $r_0 = \frac{-b}{2a}$ l'unique solution réelle de (*), les solutions de (H) **à valeurs réelles** sont les fonctions :

$$y(t) = (A + Bt)e^{r_0 t}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si $\Delta < 0$, alors, en notant $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les deux solutions complexes conjuguées de (*), les solutions de (H) **à valeurs réelles** sont les fonctions :

$$y(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Preuve : Bien entendu, les deux premiers cas ont déjà été traités dans la preuve

précédente (on diagonalise/trigonalise sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Il reste donc le cas où $\Delta < 0$. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ a dans ce cas deux valeurs propres complexes non réelles et conjuguées (car son polynôme caractéristique $\chi_M(\lambda) = \frac{1}{a}(a\lambda^2 + b\lambda + c)$ est à coefficients réels) :

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \bar{\lambda} = \alpha - i\beta.$$

Cette matrice est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et on peut construire une base de \mathbb{C}^2 composée de vecteurs propres de M de la forme (U, \bar{U}) .

Les solutions à valeurs complexes du système différentiel $(\tilde{H}) : X' = MX$ sont donc :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2}(\tilde{H}) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(t \mapsto e^{(\alpha+i\beta)t} U, t \mapsto e^{(\alpha-i\beta)t} \bar{U}).$$

En notant $U = U_1 + iU_2$ avec U_1 et $U_2 \in \mathbb{R}^2$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{(\alpha+i\beta)t} U = e^{\alpha t} (\cos(\beta t)U_1 - \sin(\beta t)U_2) + ie^{\alpha t} (\sin(\beta t)U_1 + \cos(\beta t)U_2).$$

On en déduit les solutions de (\tilde{H}) à valeurs réelles :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2}(\tilde{H}) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(t \mapsto e^{\alpha t} (\cos(\beta t)U_1 - \sin(\beta t)U_2), t \mapsto e^{\alpha t} (\sin(\beta t)U_1 + \cos(\beta t)U_2)).$$

En sélectionnant la première composante de ces solutions, on obtient les solutions de (H) à valeurs réelles :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}(H) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\beta t), t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t)).$$

□

c) Résolution de l'équation complète (E)

On considère maintenant $(E) : ay'' + by' + cy = d(t)$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$.

- Si le second membre $t \mapsto d(t)$ est une fonction continue quelconque $I \rightarrow \mathbb{K}$, alors la résolution de (E) peut être difficile, voire impossible.
- Si le second membre a la forme particulière suivante : $d(t) = P(t)e^{mt}$, avec P un polynôme à coefficients réels ou complexes, et $m \in \mathbb{C}$, alors on peut trouver une solution particulière de (E) et donc résoudre complètement (E) .

Proposition 17 (Second membre de la forme "polynôme-exponentielle").

Soit l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = P(t)e^{mt}$,

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$, $P \in \mathbb{K}[t]$ (une fonction polynomiale) et $m \in \mathbb{C}$.

Alors, (E) possède une solution de la forme $y_p(t) = Q(t)e^{mt}$,

où Q est un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} tel que $\deg(Q) \geq \deg(P)$.

Exemple

L'équation différentielle $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = (t^2 + t - \sqrt{3})e^{4t}$ possède au moins une solution de la forme $y_p(t) = Q(t)e^{4t}$, où Q est un polynôme à coefficients réels.

Preuve : Notons $d = \deg(P) \in \mathbb{N}$. Considérons une fonction $y : t \mapsto Q(t)e^{mt}$, où Q est un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} . Cette fonction y est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = ((am^2 + bm + c)Q(t) + (2am + b)Q'(t) + aQ''(t))e^{mt},$$

donc y est solution de (E) si et seulement si

$$(am^2 + bm + c)Q + (2am + b)Q' + aQ'' = P.$$

Montrons alors qu'il existe toujours un polynôme P vérifiant cette relation, en étudiant l'application linéaire $\varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ définie par

$$\varphi(Q) = (am^2 + bm + c)Q + (2am + b)Q' + aQ''.$$

On a

$$\varphi(1) = (am^2 + bm + c), \quad \varphi(X) = (am^2 + bm + c)X + (2am + b),$$

$$\forall k \geq 2, \quad \varphi(X^k) = (am^2 + bm + c)X^k + k(2am + b)X^{k-1} + ak(k-1)X^{k-2}.$$

On remarque alors que le degré des images $\varphi(X^k)$ dépend de la nullité des coefficients $am^2 + bm + c$ et $2am + b$.

- Si $am^2 + bm + c \neq 0$, alors φ conserve le degré, donc la famille $(\varphi(1), \varphi(X), \dots, \varphi(X^d))$ est libre (car de degrés échelonnés $0, 1, \dots, d$), elle forme donc une base de $\mathbb{R}_d[X]$. Ainsi, la restriction $\varphi_1 : \mathbb{R}_d[X] \rightarrow \mathbb{R}_d[X]$ est un isomorphisme (puisqu'elle envoie une base sur une base). Le polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$ admet donc un antécédent Q de degré d par φ .

- Si $am^2 + bm + c = 0$ et $2am + b \neq 0$, alors φ abaisse le degré d'un cran, donc

$$\varphi(1) = 0, \quad \forall k \geq 1, \quad \deg(\varphi(X^k)) = k - 1.$$

La famille $(\varphi(X), \dots, \varphi(X^d), \varphi(X^{d+1}))$ est une famille libre (car de degrés échelonnés $0, 1, \dots, d$), elle forme donc une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

La restriction $\varphi_2 : \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^{d+1}) \rightarrow \mathbb{R}_d[X]$ est donc un isomorphisme. Le polynôme P admet donc un antécédent Q de degré $d + 1$ par φ .

- Si $am^2 + bm + c = 2am + b = 0$, alors

$$\varphi(1) = \varphi(X) = 0, \quad \forall k \geq 2, \quad \deg(\varphi(X^k)) = k - 2,$$

donc on obtient de même que la restriction $\varphi_3 : \text{Vect}(X^2, \dots, X^{d+2}) \rightarrow \mathbb{R}_d[X]$ est un isomorphisme, ce qui prouve que P admet un antécédent Q de degré $d + 2$ par φ .

Dans chaque cas, il existe donc bien un polynôme Q tel que $P = \varphi(Q)$. \square

Remarque

La preuve montre qu'en fait, il existe une solution de (E) de la forme $t \mapsto Q(t)e^{mt}$ avec

- $\deg(Q) = \deg(P)$ lorsque m n'est pas racine de l'équation caractéristique.
- $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ lorsque m est racine simple de l'équation caractéristique.
- $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ lorsque m est racine double de l'équation caractéristique.

Exemple

1. Déterminer les solutions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de l'équation $(E_1) : y'' + y = e^{it}$.
2. En déduire les solutions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation $(E_2) : y'' + y = \cos(t)$.

1. Notons $(H) : y'' + y = 0$ l'équation homogène associée à (E_1) . L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$, dont les solutions sont $r_1 = i$ et $r_2 = -i$. Les solutions de (H) sont donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}}(H) = \{t \mapsto Ae^{it} + Be^{-it}, (A, B) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Cherchons ensuite une solution particulière de (E_1) sous la forme $y(t) = Q(t)e^{it}$. On a

$$y''(t) + y(t) = (Q''(t) + 2iQ'(t) - Q(t) + Q(t))e^{it} = (Q''(t) + 2iQ'(t))e^{it},$$

donc une telle fonction y est solution de (E_1) ssi $Q'' + 2iQ' = 1$.

Q est nécessairement de degré 1 : $Q(X) = aX + b$, avec $2ia = 1$, soit $a = -\frac{i}{2}$ (et b quelconque). Donc la fonction $y_p : t \mapsto -\frac{it}{2}e^{it}$ est une solution de (E_1) , ce qui permet de déterminer toutes les solutions de (E_1) :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}}(E_1) = \left\{ t \mapsto Ae^{it} + Be^{-it} - \frac{it}{2}e^{it}, (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

2. Déterminons d'abord les solutions à valeurs réelles de l'équation homogène $(H) : y'' + y = 0$. Puisque

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}}(H) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(t \mapsto e^{it}, t \mapsto e^{-it}),$$

on en déduit que

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}(H) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(t \mapsto \cos(t), t \mapsto \sin(t)).$$

Déterminons ensuite une solution particulière de $(E_2) : y'' + y = \cos(t)$.

Pour cela, on utilise que $\cos(t) = \text{Re}(e^{it})$ et on connaît une solution (à valeurs complexes) de $z'' + z = e^{it}$, la fonction $z : t \mapsto -\frac{it}{2}e^{it}$. Sa partie réelle $y = \text{Re}(z)$ vérifie :

$$y'' + y = \text{Re}(z'' + z) = \text{Re}(e^{it}) = \cos(t).$$

Ainsi, la fonction $y \mapsto \text{Re}\left(-\frac{it}{2}e^{it}\right) = \frac{t}{2}\sin(t)$ est une solution de (E_2) , et on conclut :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}(E_2) = \left\{ t \mapsto A \cos t + B \sin t + \frac{t}{2} \sin t, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Remarque

On aurait pu aussi procéder de la façon suivante :

- on décompose le second membre de (E_2) : $\cos(t) = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}$;
- on détermine une solution particulière des équations $y'' + y = \frac{1}{2}e^{it}$ et $y'' + y = \frac{1}{2}e^{-it}$ (comme on l'a fait pour (E_1)) ;
- on en déduit par le "principe de superposition" une solution particulière de (E_2) .

mais c'est long . . .

2) Cas général sous "forme résolue" : structure de l'ensemble des solutions

On va maintenant travailler avec des équations à **coefficients non constants**, mises sous forme résolue.

Notation

Dans cette partie, on note $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ et $(H) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ l'équation homogène associée. Les fonctions a , b et c appartiennent à $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, où I est un intervalle de \mathbb{R} (non vide et non réduit à un point).

Théorème 18 (Structure algébrique de l'ensemble des solutions).

- (i) *L'ensemble $\mathcal{S}_I(H)$ des solutions de (H) sur I est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 2 .*
- (ii) *L'ensemble $\mathcal{S}_I(E)$ des solutions de (E) sur I est non vide, et on a $\mathcal{S}_I(E) = \mathcal{S}_I(H) + y_p$, où y_p est n'importe quelle solution de (E) sur I .*

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **sous forme résolue**, il suffit donc :

- de trouver **deux solutions linéairement indépendantes** de (H) (c'est-à-dire deux fonctions nulles et non proportionnelles qui vérifient (H)) : elles forment une base de $\mathcal{S}_I(H)$;
- de trouver une solution particulière de (E) .

Hélas, en pratique **ça n'est pas toujours aussi simple !**

Le problème est que l'on ne dispose pas de formule directe pour les solutions de (H) (à la différence du cas où les coefficients sont constants). **Il faut donc développer des techniques de recherche de solutions de (H) et de (E) .**

Exemple

Résolution de l'équation (E) : $t^2 y'' - 2ty' + 2y = 2$ sur $I =]0, +\infty[$.

Sur l'intervalle I , l'équation (E) peut se mettre sous forme résolue (en divisant par t^2 , car $t \mapsto t^2$ ne s'annule pas sur I) :

$$(E) \iff y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = \frac{2}{t^2}$$

donc le théorème précédent s'applique. Pour la résolution :

- on remarque que l'équation homogène (H) : $t^2 y'' - 2ty' + 2y = 0$ admet des solutions polynomiales indépendantes : $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^2$. D'où $\mathcal{S}_I(H) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(t \mapsto t, t \mapsto t^2)$.

- on trouve facilement une solution de (E) constante sur I : $y \equiv 1$.

Les solutions de (E) sur I sont donc les fonctions

$$y(t) = \lambda t^2 + \mu t + 1, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

ATTENTION !

Il ne faut pas oublier de **vérifier que le coefficient devant y'' dans l'équation (E) ne s'annule pas sur l'intervalle I** pour pouvoir appliquer le théorème de structure algébrique.

Il n'est toutefois pas indispensable de faire les calculs sur la forme résolue de l'équation différentielle si celle-ci est plus compliquée que la forme de départ.

Comme pour les équations linéaires d'ordre 1, on dispose aussi d'un résultat d'unicité si on se donne des conditions initiales :

Théorème 19 (Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires d'ordre 2).

Pour tout $t_0 \in I$ et tout $(y_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution

y de (E) sur I qui vérifie les conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = v_0$.

ATTENTION !

Les conditions initiales sur y et y' ne peuvent s'imposer **qu'au même point t_0** . Cela correspond à une condition initiale **vectorielle** sur $Y(t) = (y(t), y'(t))$. On parle de "problème de Cauchy du second ordre".

Exemple

Résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} (E) : t^2 y''(t) - 2ty'(t) + 2y(t) = 2 & \forall t > 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases} .$$

Les solutions de (E) sur $I =]0; +\infty[$ (intervalle sur lequel l'équation peut se mettre sous forme résolue) sont les $y : t \mapsto \lambda t^2 + \mu t + 1$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (voir l'exemple précédent)

Si on impose les conditions initiales $y(1) = 0$ et $y'(1) = 1$, alors on a :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 1 = 0 \\ 2\lambda + \mu = 1 \end{cases} ,$$

c'est-à-dire $(\lambda; \mu) = (2; -3)$.

Il y a donc une unique solution de (E) qui vérifie la condition initiale donnée : la fonction

$$y : t \mapsto 2t^2 - 3t + 1.$$

ATTENTION !

Dans l'exemple précédent, **on n'aurait pas pu imposer de conditions initiales en $t_0 = 0$** , puisque ce point n'appartient pas à un intervalle I sur lequel on peut mettre l'équation (E) sous forme résolue :

$$(E) \iff y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = \frac{2}{t^2}.$$

D'ailleurs, on le voit bien en examinant les solutions : les fonctions $t \mapsto \lambda t^2 + \mu t + 1$ sont solutions de l'équation (E) sur \mathbb{R} tout entier mais on a nécessairement $y(0) = 1$ pour toutes valeurs de λ et μ .

3) Cas général : techniques de résolution

Notation

On revient au cas général :

$$(E) : a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = d(t),$$

où $a_2, a_1, a_0, d \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, I étant un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

On note $(H) : a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ l'équation homogène associée à (E) .

Dans cette partie, on va donner des techniques de recherche de solutions de (E) ou de (H) .

a) Méthode d'abaissement d'ordre

Si on connaît une solution de (H) , notée $h(t)$, qui ne s'annule pas sur I , alors on peut chercher les solutions de (E) sous la forme :

$$y(t) = h(t)f(t), \text{ avec } f \text{ deux fois dérivable sur } I.$$

En effet, étant donnée une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivable, on peut poser $f(t) = \frac{y(t)}{h(t)}$ pour tout $t \in I$. La fonction f est deux fois dérivable sur I et :

$$y(t) = h(t)f(t),$$

$$y'(t) = h'(t)f(t) + h(t)f'(t),$$

$$y''(t) = h''(t)f(t) + 2h'(t)f'(t) + h(t)f''(t),$$

et donc

$$\begin{aligned} a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) &= a_2(t)h(t)f''(t) + (a_1(t)h(t) + 2a_2(t)h'(t))f'(t) \\ &\quad + \underbrace{(a_2(t)h''(t) + a_1(t)h'(t) + a_0(t)h(t))}_{=0 \text{ car } h \in \mathcal{S}_I(H)}f(t). \end{aligned}$$

Donc

$$y \text{ est solution de } (E) \iff f' \text{ est solution de } (F) : \tilde{a}(t)z' + \tilde{b}(t)z = d(t),$$

avec $\tilde{a} = a_2h$ et $\tilde{b} = a_1h + 2a_2h'$. On obtient donc une équation différentielle linéaire du premier ordre (que l'on sait en général résoudre).

Méthode (Mise en pratique de la méthode d'abaissement d'ordre)

Si on connaît $h \in \mathcal{S}_I(H)$ telle que $\forall t \in I, h(t) \neq 0$:

- on cherche les solutions de (E) sous la forme $y(t) = h(t)f(t)$. En injectant cette forme dans (E) , on obtient une équation différentielle en f' et f'' uniquement ;
- on détermine $f' = \left(\frac{y}{h}\right)'$ en résolvant une équation du premier ordre ;
- en primitivant, on obtient $f = \frac{y}{h}$;
- en remultipliant par h (qu'on connaît), on obtient enfin y .

Remarque

- C'est le même principe que la méthode de variation de la constante, vue pour les équations du premier ordre.
- Évidemment, ne pas retenir les coefficients de la nouvelle équation, mais seulement la mise en pratique de la méthode.

Exemple

Résolution sur $I =]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(E) : t^2 y'' - 2y = 3t^2$.

- La fonction $h : t \mapsto t^2$ est solution de l'équation homogène $(H) : t^2 y'' - 2y = 0$ sur

\mathbb{R} .

Vu que h ne s'annule pas sur $I =]0, +\infty[$, on peut chercher les solutions de (E) sous la forme

$$y(t) = t^2 f(t),$$

en posant $f(t) = \frac{y(t)}{t^2}$ pour tout $t > 0$.

- Pour toute fonction $y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, on a donc

$$(E) : t^2 y'' - 2y = 3t^2 \iff f'' + \frac{4}{t} f' = \frac{3}{t^2} \iff f' \text{ est solution de } (\tilde{E}) : z' + \frac{4}{t} z = \frac{3}{t^2}.$$

- L'équation (\tilde{E}) se résout facilement avec la méthode de variation de la constante (équation linéaire du premier ordre sous forme résolue) : les solutions sur I sont

$$z(t) = \frac{\alpha}{t^4} + \frac{1}{t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- On en déduit que

$$y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I \iff f'(t) = \frac{\alpha}{t^4} + \frac{1}{t} \iff f(t) = -\frac{\alpha}{3t^3} + \beta + \ln(t),$$

c'est-à-dire

$$y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I \iff y(t) = \frac{-\alpha}{3t} + \beta t^2 + t^2 \ln(t).$$

Finalement, les solutions de (E) sur $I =]0; +\infty[$ sont les fonctions :

$$y(t) = \frac{\alpha}{t} + \beta t^2 + t^2 \ln(t), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On retrouve bien la structure algébrique annoncée par le théorème 18 :

$$\mathcal{S}_I(E) = \underbrace{\text{Vect} \left(t \mapsto \frac{1}{t}, t \mapsto t^2 \right)}_{\text{plan vectoriel } \mathcal{S}_I(H)} + \underbrace{(t \mapsto t^2 \ln(t))}_{\text{solution particulière}}$$

(normal, on a une équation différentielle linéaire d'ordre 2 qui peut se mettre sous forme résolue).

b) Utilisation de séries entières

On peut également chercher si l'équation différentielle étudiée admet des solutions **développables en série entière** (cela englobe notamment les polynômes, les exponentielles, etc.).

Méthode (Recherche de solutions développables en séries entières)

On procède par "analyse-synthèse" :

- étant donnée une fonction développable en série entière $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n$ dans un intervalle $] -R; R[$, on détermine une condition nécessaire et suffisante sur la suite (α_n) pour que y soit solution de (E) : $a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = d(t)$.
On obtient en général une relation de récurrence sur la suite (α_n) ;
- on essaie d'expliciter le terme général de la suite (α_n) en fonction de n , à partir de la relation de récurrence précédemment obtenue.
Cette étape donne les **éventuelles** solutions DSE ;
- on vérifie ensuite que la ou les séries entières obtenues ont bien un rayon de convergence R non nul, et donc qu'elles définissent bien des fonctions.
Cette étape montre **l'existence** de solutions DSE sur $] -R; R[$;
- si possible, on essaie de "reconnaître" les solutions obtenues à partir de leur DSE, c'est-à-dire de les exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

On renvoie aux exercices des TD 10 et 11 pour des exemples.

Remarque

Cette technique fonctionne bien lorsque les coefficients $t \mapsto a_2(t)$, $t \mapsto a_1(t)$, $t \mapsto a_0(t)$ de l'équation différentielle (E) sont des polynômes en t , et lorsque le second membre $d(t)$ est lui-même développable en série entière.

c) Changement de variable**Méthode (Mise en pratique du changement de variable)**

Soit (E) une équation différentielle d'inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{K}$, dont la variable est notée t . On pose $t = \psi(x)$, x est la « nouvelle variable », et $z = y \circ \psi$ est la « nouvelle fonction inconnue » :

$$y(t) = y(\psi(x)) = z(x).$$

On calcule alors les dérivées de z en fonction de celles de y , et on montre que (E) est équivalente à une équation différentielle d'inconnue z (en général plus simple), sur un intervalle à préciser.

Attention, parfois le changement de variable est donné « dans l'autre sens », c'est-à-dire on pose $x = \theta(t)$!

Exemple

Résolution sur $I =]-1; 1[$ de l'équation différentielle $(H) : (1 - t^2)y'' - ty' + y = 0$ en utilisant le changement de variable $t = \cos x$.

Pour $y :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, posons $z = y \circ \cos$, qui est deux fois dérivable sur $]0; \pi[$ (et on a $y = z \circ \arccos$).

On a $z(x) = y(\cos x)$ et $z''(x) = -(\cos x) \times y'(\cos x) + (\sin^2 x) \times y''(\cos x)$, donc

$$y \text{ solution de } (H) \iff z''(x) + z(x) = 0 \iff z(x) = A \cos x + B \sin x, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Les solutions de (H) sur $] - 1; 1[$ sont donc

$$y(t) = At + B \sin(\arccos(t)) = At + B\sqrt{1-t^2}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

4) Le cas des formes "non résolues"

Méthode

On considère $(E) : a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = d(t)$.

Si $t \mapsto a_2(t)$ s'annule en un point $\alpha \in I$ (et pas ailleurs) :

- On résout d'abord sur les intervalles $] - \infty, \alpha[\cap I$ et $] \alpha, +\infty[\cap I$ (où le théorème 18 s'applique, car $t \mapsto a_2(t)$ ne s'annule pas sur ces intervalles, donc (E) peut s'écrire sous forme résolue).
- Ensuite, on voit si on peut "raccorder" les solutions obtenues, pour obtenir des solutions sur tout I .

ATTENTION !

Il faut vérifier pour cela que les éventuels raccords sont **autant de fois dérivables en α que l'équation l'exige** (donc deux fois dérivables pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2). La simple continuité en suffit pas !

Exemple

Résolution **sur \mathbb{R}** de l'équation différentielle $(E) : t^2y'' - 2y = 3t^2$.

On a déjà résolu cette équation sur \mathbb{R}_+^* avec la méthode d'abaissement d'ordre (voir p.71).

Si y est une solution sur \mathbb{R} de (E) , alors, puisqu'on connaît déjà les solutions sur \mathbb{R}_+^*

(pour \mathbb{R}_* , la résolution est la même), elle est nécessairement de la forme :

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{t} + \beta t^2 + t^2 \ln |t| & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\gamma}{t} + \delta t^2 + t^2 \ln |t| & \text{si } t < 0 \end{cases}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4.$$

Pour que cette fonction soit une solution sur \mathbb{R} , il faut vérifier qu'elle est continue et deux fois dérivable en 0.

Afin que y soit continue en 0, il faut $\alpha = \gamma = 0$ (sinon, il y a une limite infinie en 0).

En outre :

$$\forall t \neq 0, \quad \frac{y(t) - y(0)}{t} = \begin{cases} \beta t + t \ln |t| & \text{si } t > 0 \\ \delta t + t \ln |t| & \text{si } t < 0 \end{cases},$$

$$\text{donc } y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{t} = 0.$$

On a donc :

$$y'(t) = \begin{cases} 2\beta t + 2t \ln(t) + t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 2\delta t + 2t \ln(-t) + t & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

Enfin,

$$\forall t \neq 0, \quad \frac{y'(t) - y'(0)}{t} = \begin{cases} 2\beta + 2 \ln |t| + 1 & \text{si } t > 0 \\ 2\delta + 2 \ln |t| + 1 & \text{si } t < 0 \end{cases},$$

donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'(t) - y'(0)}{t}$ est infinie, ce qui contredit l'existence de $y''(0)$.

En conclusion, l'équation (E) **ne possède aucune solution sur** \mathbb{R} , on a $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(E) = \emptyset$.

Voilà donc un exemple où les théorèmes 18 et 19 ne s'appliquent pas !