Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 10
Séries entières

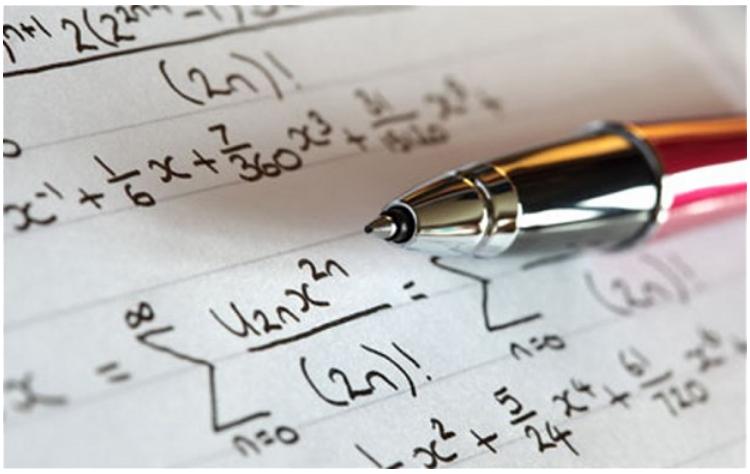

Table des matières

I Généralités **1**

1) Définition d'une série entière 1
2) Etude d'exemples 3
3) Rayon de convergence 10
4) Détermination pratique du rayon de convergence 18
   a) Tests de valeurs 18
   b) Par comparaison 19
   c) Par équivalence 20
   d) Utilisation du critère de d'Alembert 21

II Propriétés de la somme d'une série entière réelle **25**

1) Intervalle ouvert de convergence, domaine réel de cv. 25
2) Dérivation terme à terme 29
3) Intégration terme à terme 41

III Fonctions développables en série entière **43**

1) Généralités 43
2) Développements en série entière usuels 48
   a) Famille de la série géométrique 49
   b) Famille de l'exponentielle 52
   c) Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ 59
3) Méthodes supplémentaires de calculs de développement en série entière 64
4) Application des développements en série entière au calcul de la somme d'une série entière 68

IV Fonction exponentielle complexe **72**

I Généralités

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que l'ensemble des suites (a_n) indexées par $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1) Définition d'une série entière

Définition 1 (Série entière de la variable complexe).
Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est appelée **série entière de la variable z** .

Définition 2 (Domaine de cv., fonction somme d'une série entière).
Etant donnée une série entière $\sum a_n z^n$:

(i) *L'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum a_n z^n$ converge $\}$ est appelé le* **domaine de convergence de la série entière**.

(ii) *La* **fonction somme** *est la fonction $f : D \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$* .

Remarque

- Les sommes partielles d'une série entière sont des polynômes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{C}_n[z].$$

  Les séries entières sont donc des limites de suites de polynômes, mais ce ne sont pas des polynômes en général !

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \lim_{n \to +\infty} P_n(z).$$

- Les fonctions polynômes de $\mathbb{C}[z]$ sont des séries entières particulières (celles vérifiant $a_n = 0$ à partir d'un certain rang).
- $z = 0$ est toujours dans le domaine de convergence car la série $\sum_{n \geq 0} a_n 0^n$ converge (les sommes partielles sont constantes égales à a_0).

ATTENTION !
On adopte la **convention** suivante : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0 \quad ("0^0 = 1")$.
C'est la même convention que pour les polynômes : en effet, X^0 désigne le polynôme constant égal à 1 : la fonction associée $x \mapsto x^0$ vaut donc 1 pour tout réel x, même $x = 0$.

2) Etude d'exemples

Exemple (Une série géométrique)

Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} z^n$ ainsi que sa fonction somme.

Il s'agit de la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_n = (1/2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
C'est une série géométrique de raison $\frac{z}{2}$, donc elle converge si et seulement si $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, c'est-à-dire $|z| < 2$.
Le domaine de convergence est donc le disque **ouvert** de centre O et de rayon 2, noté $\mathcal{D}(O; 2)$.
De plus, la fonction somme vaut :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z}, \qquad \forall z \in \mathcal{D}(O; 2) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 2\}.$$

Exemple (Une série "à la Riemann")

Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$.

Cette série converge si et seulement si $|z| \leq 1$. En effet :

- Si $|z| \leq 1$, alors $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument (d'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs et parce que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge).

- Si $|z| > 1$, alors la suite polynomiale (n^2) est négligeable devant la suite géométrique $(|z|^n)$ lorsque $n \to +\infty$, d'où $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = +\infty$, ce qui montre que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ diverge grossièrement (son terme général ne tend pas vers 0, puisque le module ne tend pas vers 0).

Le domaine de convergence est donc le disque **fermé** de centre O et de rayon 1, noté $\overline{\mathcal{D}}(O;1)$.
Mais on ne sait pas *a priori* expliciter la fonction somme :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}, \qquad \forall z \in \overline{\mathcal{D}}(O;1) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}.$$

Exemple (Une série "lacunaire")
La série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{3} + \frac{z^6}{4} + \frac{z^8}{5} + \cdots$ est une série entière, car

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1} = \sum_{k\geq 0} a_k z^k, \text{ avec } a_{2n} = \frac{1}{n+1} \text{ et } a_{2n+1} = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

. . . .

Puisqu'une infinité de coefficients a_k sont nuls, on parle de "série lacunaire" (il lui "manque" une infinité de coefficients).

1. Montrer que le domaine de convergence D de cette série entière vérifie :

$$\mathcal{D}(O;1) \subset D \subset \overline{\mathcal{D}}(O;1).$$

2. Montrer que les deux inclusions précédentes sont strictes (i.e. D n'est ni le disque ouvert, ni le disque fermé).

1. - Si $|z| < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1}$ converge absolument, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\frac{z^{2n}}{n+1}\right| \leq |z^2|^n,$$

et la série géométrique $\sum |z^2|^n$ converge (puisque $0 \leq |z^2| < 1$). Ceci montre $\mathcal{D}(O;1) \subset D$.

- Si $|z| > 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1}$ diverge grossièrement, puisque le terme général ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (le module tend vers $+\infty$ par croissances comparées). Ceci montre $D \subset \overline{\mathcal{D}}(O;1)$.

On a donc la double inclusion $\mathcal{D}(O;1) \subset D \subset \overline{\mathcal{D}}(O;1)$.

2. Pour montrer que les deux inclusions sont strictes, il suffit de montrer que sur le cercle de centre O et de rayon 1 (i.e. les points d'affixe z tels que $|z| = 1$), il existe des points où la série converge et d'autres où elle diverge. Prenons des exemples :
   - Si $z = \pm 1$, alors $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (c'est une série de Riemann, d'exposant $\alpha = 1$).
   - Si $z = \pm i$, alors $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge : pour le voir, on travaille directement sur les sommes partielles
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1},$$
   et on montre que les sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes :
     * $S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \leq 0$, donc (S_{2n}) est décroissante ;
     * $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=2n+2}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} \geq 0$, donc (S_{2n+1}) est croissante ;
     * $S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} = -\frac{1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc convergentes, vers une limite commune, et donc la suite (S_n) converge.

On voit donc que sur le cercle de centre O et de rayon 1, il peut y avoir convergence ou divergence selon le point choisi, ce qui prouve que $\mathcal{D}(O;1) \subsetneq D \subsetneq \overline{\mathcal{D}}(O;1)$.

Remarque
On peut en fait montrer que la série entière précédente converge en tout point z tel que $|z| = 1$ et $z \notin \{\pm 1\}$, mais c'est bien plus difficile.

3) Rayon de convergence

On va ici mettre en évidence une propriété géométrique importante des séries entières : l'existence d'un "rayon de convergence" et d'un "disque ouvert de convergence".

Lemme 3 (Lemme d'Abel).
Soit $r > 0$ tel que la suite complexe $\boldsymbol{(a_n r^n)}$ **est bornée**. *Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

$$|z| < r \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument.}$$

Preuve : Il suffit d'écrire

$$a_n z^n = (a_n r^n) \times \left(\frac{z}{r}\right)^n.$$

Par hypothèse, il existe une constante $M > 0$ telle que $|a_n r^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n z^n| \leq M \left|\frac{z}{r}\right|^n,$$

et on conclut par le critère de comparaison des séries à termes positifs, puisque la série $\sum M \left|\frac{z}{r}\right|^n$ converge (étant donné que $\left|\frac{z}{r}\right| = \frac{|z|}{r} < 1$). $\square$

Lemme 4 (Intervalle de bornitude).
L'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n)$ *est bornée*$\}$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *ayant pour plus petit élément* 0 .

Preuve :

- Déjà, 0 est un minorant de I par définition de I. Et $0 \in I$, puisque la suite $(a_n 0^n) = (a_0, 0, 0, 0, \cdots)$ est bornée. Donc 0 est bien le minimum de l'ensemble I.
- Ensuite, si on fixe $r \in I$, et un réel $\tilde{r}$ tel que $0 \leq \tilde{r} \leq r$, alors $\tilde{r} \in I$, puisque $|a_n \tilde{r}^n| = |a_n| \times \tilde{r}^n \leq |a_n| \times r^n = |a_n r^n|$, et $(a_n r^n)$ est bornée. L'ensemble I est donc bien un intervalle.

□

Remarque
Trois cas de figure se présentent donc :

- L'intervalle I est majoré et fermé, et donc $I = [0, R]$ avec $R = \sup(I) \in I$.
- L'intervalle I est majoré et ouvert, et donc $I = [0, R[$, avec $R = \sup(I) \notin I$.
- L'intervalle I n'est pas majoré, et donc $I = [0, +\infty[$.

Ces deux lemmes nous permettent alors de définir le "rayon de convergence" :

Définition 5 (Rayon de convergence d'une série entière).
On considère une série entière $\sum a_n z^n$. *On pose :*

$$R = \sup(I) = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+,\ \textit{la suite } (a_n r^n) \textit{ est bornée}\right\}$$

(avec la convention $R = +\infty$ *si l'intervalle de bornitude* I *n'est pas majoré)* .
Cet élément $R \in [0, +\infty]$ *est appelé* **le rayon de convergence** *de* $\sum a_n z^n$.

ATTENTION !
Le rayon de convergence d'une série entière peut valoir $+\infty$!

Proposition 6 (Propriété fondamentale du rayon de convergence).
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0; +\infty]$.

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} |z| < R \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \\ |z| > R \implies \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement} \end{cases}.$$

De plus, R est le seul élément de $[0; +\infty]$ vérifiant cette propriété .

ATTENTION !
Si $|z| = R$, alors on ne peut pas conclure quant à la convergence de la série $\sum a_n z^n$. Cela va dépendre des coefficients (a_n), il faut donc faire du cas par cas.

Remarque
Deux cas extrêmes :

- Si $R = +\infty$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, puisque la condition "$|z| > R$" est impossible.
- Si $R = 0$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ (et converge pour $z = 0$ bien sûr), puisque la condition "$|z| < R$" est impossible.

Preuve : Fixons $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| < R$, alors fixons un réel r tel que $|z| < r < R$. Puisque l'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ est un intervalle de borne sup R (d'après le lemme 4 et la définition 5), on en déduit que la suite $(a_n r^n)$ est bornée (attention, pas nécessairement la suite $(a_n R^n)$, puisque R n'appartient pas nécessairement à I). Vu que $|z| < r$, on conclut par le lemme d'Abel que $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors la suite $(a_n |z|^n)$ est non bornée (puisque $|z| > \sup(I)$), donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée non plus, ce qui implique qu'elle ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$. La série $\sum a_n z^n$ est donc grossièrement divergente.

- Unicité : soit R_1 et R_2 deux éléments de $[0;+\infty]$ vérifiant la propriété fondamentale :

$$\forall i \in \{1;2\}, \qquad \begin{cases} |z| < R_i \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \\ |z| > R_i \implies \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement} \end{cases}$$

Si $R_1 \neq R_2$, par exemple $R_1 < R_2$, alors il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_1 < |z| < R_2$, et donc d'après la propriété vérifiée par R_1 et R_2, on aurait la série $\sum a_n z^n$ qui converge (puisque $|z| < R_2$) et qui diverge (puisque $|z| > R_1$). C'est absurde, donc $R_1 = R_2$.

$\square$

Exemple
La série géométrique $\sum z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, puisqu'elle converge absolument pour $|z| < 1$ et diverge grossièrement pour $|z| > 1$.

Définition 7 (Disque ouvert de convergence, cercle d'incertitude).
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\boldsymbol{R} \in]\mathbf{0}, +\boldsymbol{\infty}[$ (non nul et fini). On appelle :

- **disque ouvert de convergence** *le disque ouvert de centre O et de rayon R, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{D}(O,R) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$.*
- **cercle d'incertitude** *le cercle de centre O et de rayon R, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{C}(O,R) := \{z \in \mathbb{C},\ |z| = R\}$.*

Remarque
Si on reformule en ces termes la propriété fondamentale du rayon de convergence, cela donne :

- la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument en tout point du disque ouvert de convergence $\mathcal{D}(O,R)$,
- diverge grossièrement en dehors du disque fermé $\overline{\mathcal{D}}(O,R)$.
- sur le cercle d'incertitude, il n'y a pas nécessairement convergence, tout peut se produire (voir les exemples).

Dessin :

ATTENTION !
Le **disque ouvert de convergence** est inclus dans **le domaine de convergence**, mais pas nécessairement égal : ne pas les confondre !
En notant D le domaine de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et R son rayon de convergence, on a donc

$$\mathcal{D}(O,R) \subset D \subset \overline{\mathcal{D}}(O,R),$$

et les deux inclusions peuvent être strictes (voir l'exemple p.6).

4) Détermination pratique du rayon de convergence

On donne ici plusieurs techniques pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière.

a) Tests de valeurs

Méthode (Détermination de R par des tests de valeurs)
Cette méthode est basée sur l'utilisation de la propriété fondamentale du rayon (prop. 6) : pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{cases} |z_0| < R \implies \sum |a_n||z_0|^n \text{ converge } \implies \sum a_n z_0^n \text{ converge} \\ |z_0| > R \implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge grossièrement } \implies \sum a_n z_0^n \text{ diverge} \end{cases},$$

donc on en déduit facilement :

- $\sum a_n z_0^n$ diverge $\implies R \leq |z_0|$;
- $\sum |a_n||z_0|^n$ diverge $\implies R \leq |z_0|$;
- $\sum a_n z_0^n$ converge $\implies R \geq |z_0|$;
- $\sum |a_n||z_0|^n$ converge $\implies R \geq |z_0|$;
- $\sum a_n z_0^n$ diverge non grossièrement $\implies R = |z_0|$.

ATTENTION !
A chaque fois, on obtient des inégalités **larges** sur R, jamais strictes !

Exemple
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$.

Cette série diverge en $z_0 = 1$ mais pas grossièrement (en effet, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge mais son terme général $\frac{1}{n}$ tend quand même vers 0), donc son rayon de convergence est $R = 1$.

b) Par comparaison

Proposition 8 (Comparaison des rayons de convergence).
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs $R_a, R_b \in [0; +\infty]$. Si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geq R_b$.

Preuve : Par hypothèse, il existe un entier naturel n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $\forall r \geq 0$, $|a_n r^n| \leq |b_n r^n|$. On a donc, pour tout $r \geq 0$, $(b_n r^n)$ bornée $\implies$ $(a_n r^n)$ bornée, et donc $I_b := \{r \geq 0,\ (b_n r^n)\text{est bornée}\} \subset I_a := \{r \geq 0,\ (a_n r^n)\text{est bornée}\}$.
Ceci entraîne que $\sup(I_b) \leq \sup(I_a)$, i.e. $R_b \leq R_a$.

□

c) Par équivalence

Proposition 9 (Séries entières à coefficients de module équivalents).
Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs $R_a, R_b \in [0; +\infty]$. Si $|a_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Preuve : Par hypothèse, il existe un entier naturel n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{2}|b_n| \leq |a_n| \leq \frac{3}{2}|b_n|$. On en déduit facilement que pour tout $r \geq 0$:

$$(a_n r^n) \text{ est bornée } \iff (b_n r^n) \text{ est bornée .}$$

Les intervalles de bornitude I_a et I_b sont donc égaux, ce qui entraîne l'égalité de leurs bornes supérieures :

$$R_b = \sup(I_b) = \sup(I_a) = R_a.$$

□

d) Utilisation du critère de d'Alembert

Rappelons ce résultat, déjà démontré au chapitre 1 ("séries numériques") :

Proposition 10 (Critère de d'Alembert).
Si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors :
....

- $\ell < 1 \implies$ *la série $\sum u_n$ converge.*
....
- $\ell > 1 \implies$ *la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
....
- $\ell = 1$ *est un cas indéterminé.*
....

Remarque
On peut avoir $\ell = +\infty$ dans le cas $\ell > 1$.

ATTENTION !
Dans le cas où $\ell = 1$, on ne peut pas dire *a priori* si la série $\sum u_n$ converge ou diverge.

Méthode (Détermination de R avec le critère de d'Alembert)
Pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ à l'aide du critère de d'Alembert, on n'applique pas le critère de d'Alembert à la suite $a_n z^n$ (elle n'est pas strictement positive !), mais plutôt à la suite $u_n = |a_n z^n|$ (si $a_n \neq 0$).
Une rédaction très détaillée est attendue aux concours.

- On fixe $z \in \mathbb{C}^*$ et on pose $u_n =$ le module du terme général de la série.
  On vérifie que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
- On calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (si elle existe). Plusieurs cas possibles :
  * si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente et donc $R = +\infty$;
  * si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente et donc $R = 0$;
  * si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ dépend de $|z|$, alors, en cherchant les valeurs de z pour lesquelles $\ell < 1$, on trouve des conditions sur z pour savoir si la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ou grossièrement divergente et on en déduit donc le rayon de convergence (toujours d'après la propriété fondamentale du rayon de convergence).

Exemple
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

Fixons $z \in \mathbb{C}^*$ et posons $u_n = \left|\frac{z^n}{n!}\right|$. On a $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc la série $\sum u_n$ converge d'après le critère de d'Alembert.
Ainsi, la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ (mais aussi pour $z = 0$), donc son rayon de convergence est $R = +\infty$.

Exemple
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{3^n+1}$.

Fixons $z \in \mathbb{C}^*$ et posons $u_n = \left|\frac{z^{2n}}{3^n+1}\right|$. On a $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^n+1}{3^{n+1}+1}|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|z|^2}{3}.$$

On utilise le critère de d'Alembert. Deux cas se présentent :
— si $\frac{|z|^2}{3} < 1$ (c'est-à-dire $|z| < \sqrt{3}$), alors $\sum u_n$ converge ;
— si $\frac{|z|^2}{3} > 1$ (c'est-à-dire $|z| > \sqrt{3}$), alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Ainsi, la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{3^n+1}$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < \sqrt{3}$ et diverge grossièrement pour tout z tel que $|z| > \sqrt{3}$, donc son rayon de convergence est $R = \sqrt{3}$.

Si aucune de ces méthodes ne fonctionne, on peut toujours revenir à la définition du rayon de convergence : on cherche les $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée, on obtient un intervalle I, et on a $R = \sup(I)$.

II Propriétés de la somme d'une série entière réelle

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ (avec $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$), et on étudie la **restriction** de sa fonction somme à **l'axe des réels** : on a donc une fonction

$$f : x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

définie sur une partie $D_f \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Intervalle ouvert de convergence, domaine réel de cv.

Définition 11 (Intervalle ouvert de convergence).
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$.
L'intervalle $]-R, R[$ est appelé **intervalle ouvert de convergence***.*

Remarque

- L'intervalle ouvert de convergence est l'intersection du disque ouvert de convergence avec l'axe réel.
- Cet intervalle est vide si $R = 0$, et c'est $\mathbb{R}$ tout entier si $R = +\infty$.

Définition 12 (Domaine réel de convergence).
Soit une série entière $\sum a_n z^n$. On appelle **domaine réel de convergence** *de cette série entière l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sum a_n x^n$ converge.*

Remarque
Le domaine réel de convergence est donc exactement **l'ensemble de définition D_f** de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

ATTENTION !
Il ne faut pas confondre **intervalle ouvert de convergence** et **domaine réel de convergence** : on a

$$]-R; R[\subset D_f \subset [-R; R],$$

car la série converge absolument pour tout $|x| < R$ et diverge grossièrement pour $|x| > R$, et les inclusions peuvent être strictes.
Ca dépend s'il y a convergence de la série pour $x = R$ et $x = -R$.

Remarque
Lorsque $R \in]0, +\infty[$, il y a donc quatre cas possibles :

$$D_f =]-R; R[, \text{ ou } D_f = [-R; R[, \text{ ou } D_f =]-R; R], \text{ ou } D_f = [-R; R].$$

Exemple
On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$. Déterminer son intervalle ouvert de convergence et son domaine réel de convergence. Sont-ils égaux ?
En $x = 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge mais non grossièrement, donc son rayon de convergence est $R = 1$. L'intervalle ouvert de convergence est donc $]-1;1[$.

Reste à étudier la convergence aux bords de cet intervalle ouvert :

- En $x = 1$, c'est déjà fait, la série diverge.
- En $x = -1$, c'est plus difficile, on a affaire à la série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, et elle ne converge pas absolument.
  On considère $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, on montre que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite, ce qui montre que (S_n) converge, et donc la série converge.

Finalement, le domaine réel de convergence est $D_f = [-1;1[$, alors que l'intervalle ouvert de convergence n'est que $]-1;1[$. Il n'y a donc pas égalité.

2) Dérivation terme à terme

Définition 13 (Série entière dérivée).
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, de coefficients $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

On appelle **série dérivée de** $\sum a_n z^n$ *la série entière* $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.

Remarque

- Le nom "série dérivée" vient du fait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{d}{dx}(a_n x^n) = \begin{cases} n a_n x^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

- La série dérivée s'écrit aussi $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$ (par changement d'indice).

ATTENTION !
Eviter d'écrire $\sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1}$ car le premier terme $0 * a_0 * z^{-1}$ pose problème pour $z = 0$ (en effet 0^{-1} n'est pas défini). Mais toutefois, on pourrait convenir que $n a_n z^{n-1} = 0$ si $n = 0$ et $z = 0$.

Proposition 14 (Rayon de convergence d'une série dérivée).
Pour toute suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ ont

le même rayon de convergence .

Preuve : La multiplication par $z \in \mathbb{C}^*$ ne modifie pas la nature de la série $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ (puisque z ne dépend pas de n), donc il suffit de montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence. On les note respectivement R_1 et R_2.

- Vu que $|a_n| \leq |n a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $R_1 \geq R_2$ (d'après la prop. 8).

- Supposons que $R_1 > R_2$, et fixons un réel r tels que $0 \leq R_2 < r < R_1$.
  Par définition de R_1, la suite $(a_n r^n)$ est bornée. On en déduit que pour tout réel $\rho \in]R_2, r[$, la suite $(na_n\rho^n)$ est bornée, puisque :

$$|na_n\rho^n| = |a_n r^n| \times n\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \leq M \times n\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Mais ceci est contradictoire, car $\rho > R_2 = \sup\{t \geq 0,\ (na_n t^n) \text{ est bornée}\}$.
  Donc $R_2 = R_1$.

$\square$

Remarque
Par récurrence immédiate, on obtient que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^k a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Une question est alors naturelle : si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, la série dérivée représente-t-elle la dérivée de f ? La réponse est oui :

Théorème 15 (Dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de cv.).
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R \neq 0$.
Alors, la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable sur $]-R; R[$ et
sa dérivée est la fonction obtenue en dérivant la série terme à terme :

$$\forall x \in\ ]-R; R[, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n).$$

Remarque
Puisque $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, on a donc $f'(x) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$.

Preuve : Pour tout $x \in]-R; R[$, notons $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ (cette série est bien absolument convergente d'après la proposition 14).
Soit $x_0 \in\ ]-R; R[$. Montrons que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = g(x_0)$, ce qui

revient à montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g(x_0)$.
Pour $x \neq x_0$ dans $]-R;R[$, on a

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x^n - x_0^n) = \frac{1}{x-x_0}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x^n - x_0^n)$$

(le premier terme étant nul), donc en factorisant avec l'identité de Bernoulli (cf. TSI 1), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x^n - x_0^n = (x-x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}).$$

Ainsi :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}}_{n \text{ termes}}).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} nx_0^{n-1}$, mais aucun théorème au programme nous permet d'affirmer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x_0^{n-1}$$

(on ne peut pas a priori dire que "la limite d'une somme de fonctions est la somme des limites des fonctions" lorsque la somme est infinie). On va donc le montrer à la

main, en majorant $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)\right|$ par une quantité qui tend vers 0 lorsque $x \to x_0$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}) - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \cdots + x_0^{n-1}) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x^k - x_0^k) x_0^{n-1-k}.
\end{aligned}$$

On peut faire démarrer cette dernière somme à $n = 2$ puisque pour $n = 1$,
$a_n \sum\limits_{k=0}^{n-1} (x^k - x_0^k)x_0^{n-1-k} = a_1(x^0 - x_0^0)x_0^{n-1} = 0$.

De plus, pour $n \geq 2$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (x^k - x_0^k)x_0^{n-1-k}$ peut démarrer à $k = 1$ puisque le terme pour $k = 0$ est nul. On a donc :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sum_{k=1}^{n-1} (x^k - x_0^k) x_0^{n-1-k}.$$

En factorisant encore avec l'identité de Bernoulli :

$$x^k - x_0^k = (x-x_0)\sum_{j=0}^{k-1} x^j x_0^{k-1-j},$$

ce qui nous permet de majorer en valeur absolue :

$$|x^k - x_0^k| \leq |x - x_0| \sum_{j=0}^{k-1} |x|^j |x_0|^{k-1-j}.$$

Puisque $|x| < R$ et $|x_0| < R$, on en déduit

$$|x^k - x_0^k| \leq |x - x_0| \sum_{j=0}^{k-1} R^j R^{k-1-j} = |x - x_0| \sum_{j=0}^{k-1} R^{k-1} = |x - x_0| k R^{k-1},$$

et donc (sous réserve de convergence des séries) :

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \sum_{k=1}^{n-1} |x^k - x_0^k| |x_0|^{n-1-k} \\ &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \sum_{k=1}^{n-1} |x - x_0| k R^{k-1} R^{n-1-k} \\ &= |x - x_0| \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| R^{n-2} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} k \right)}_{=n(n-1)/2}. \end{aligned}$$

D'où la majoration

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| \leq \frac{1}{2} |x - x_0| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) |a_n| R^{n-2}.$$

Le problème est que la série entière $\sum n(n-1)|a_n|x^{n-2}$, qui a le même rayon de convergence que $\sum |a_n| x^n$ (d'après la prop. 14 qu'on peut appliquer deux fois), ne converge pas pour $x = R$ en général, donc la majoration obtenue n'a pas de sens.
Pour rattraper le coup, il suffit en fait de supposer que $x, x_0 \in [-r, r]$ avec $0 < r < R$ (ce qui ne change rien puisque x_0 est fixé dans $]-R; R[$ et que l'on va faire tendre $x \to x_0$). Les calculs précédents donnent alors la majoration plus fine :

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| \leq \frac{1}{2} |x - x_0| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) |a_n| r^{n-2},$$

qui cette fois a du sens puisque la série $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n| r^{n-2}$ converge. En notant $S(r)$ la somme de cette série, on a finalement :

$$\forall x, x_0 \in [-r; r], \qquad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| \leq \frac{S(r)}{2} |x - x_0|,$$

et donc $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, ce qui démontre le théorème de dérivation terme à terme. $\square$

ATTENTION !
La fonction somme f n'est **pas nécessairement dérivable aux bords** de l'intervalle de convergence (en $x = \pm R$), même quand elle y est définie !

Exemple

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$ pour tout $x \in]-1;1[$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}\right) = x \times \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = x \times \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

En appliquant de manière itérée le théorème 15, on obtient la version généralisée suivante :

Corollaire 16 (Dérivation itérée terme à terme).
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors

(i) *la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$* ;

(ii) *pour tout $x \in]-R;R[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^k}{dx^k}(a_n x^n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

Remarque

La formule est simple à conjecturer car

$$\frac{d^k}{dx^k}(a_n x^n) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

Preuve : On prouve par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est k-fois dérivable sur $]-R;R[$ et que $\forall x \in]-R;R[,\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$.

- C'est vrai pour $k=0$ trivialement car f est définie sur $]-R;R[$ et
$$\forall x \in]-R;R[, \quad f^{(0)}(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que f est k-fois dérivable sur $]-R;R[$ et que
$$\forall x \in]-R;R[, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$
On applique alors le théorème 15 ("dérivation terme à terme") à la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$, qui montre que $f^{(k)}$ est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence $]-R;R[$ et
$$f^{(k+1)}(x) = g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{(n-1)!} a_{n+k} x^{n-1},$$
c'est-à-dire
$$f^{(k+1)}(x) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-(k+1))!} a_n x^{n-(k+1)}.$$

$\square$

Corollaire 17 (Expression des coefficients d'une série entière).
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R \neq 0$.

On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{C}^\infty(]-R;R[, \mathbb{K})$ la fonction somme.

. . . .

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

. . . .

Preuve : On reprend l'expression des dérivées k^e obtenue au corollaire précédent (valable pour $-R < x < R$) et on évalue en $x = 0$:
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n 0^{n-k} = \frac{k!}{(k-k)!} a_k = k! a_k.$$

$\square$

3) Intégration terme à terme

Proposition 18 (Intégration terme à terme d'une série entière).
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière, de rayon de convergence* $R \neq 0$. *Alors :*

$$\forall x \in]-R;R[, \quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right).$$

Remarque
On a donc pour tout $x \in]-R;R[$, $\displaystyle\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

ATTENTION !
Ca ne marche pas pour $x = \pm R$ en général ! (on ne peut pas intégrer jusqu'au bord de l'intervalle de convergence).

Preuve : Posons $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Puisque f est la série dérivée de F, ces deux séries entières ont le même rayon de convergence R et donc f et F sont définies sur $]-R;R[$.
D'après le théorème 15, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est donc dérivable sur

$]-R;R[$, et $F'(x) = f(x)$. En outre $F(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} 0^{n+1} = 0$, donc F est la primitive de f nulle en 0, c'est-à-dire que

$$\forall x \in]-R;R[, \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

ATTENTION !
Les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence (puisque l'une est la série dérivée de l'autre) mais elles peuvent **se comporter différemment aux bords** de l'intervalle de convergence.
Par exemple, considérons la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ (de rayon de convergence $R = 1$) :
Elle diverge pour $x = 1$ (c'est la série harmonique), mais sa "série primitive" $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge pour $x = 1$ (série de Riemann d'exposant > 1).

III Fonctions développables en série entière

1) Généralités

Définition 19 (Fonction développable en série entière).
Une fonction f est dite **développable en série entière au voisinage de 0**
s'il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0 et une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
telle que $\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Remarque

- Le fait que le développement soit au voisinage de 0 sera sous-entendu par la suite, on parlera donc simplement de « fonction développable en série entière ».
- « f est développable en série entière » signifie donc que f peut s'écrire comme la somme d'une série entière sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.
- On abrège souvent « développable en série entière »par « DSE ».

Exemple
Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ est développable en série entière.
On a $f(x) = \dfrac{1}{1-(-2x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-2x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n x^n$ pour tout x réel tel que $|-2x| < 1$, c'est-à-dire $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Donc f est bien DSE.

On peut résumer les résultats de la section II :

Proposition 20 (Propriétés d'une fonction développable en série entière).
Soit f une fonction DSE sur un intervalle ouvert I contenant 0. Alors,

(i) *f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle I ;*

(ii) *Le développement en série entière de f est unique :*
il s'agit de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,\ \forall x \in I$.

Remarque (Similitude avec la formule de Taylor-Young)
Il suffit de tronquer le développement en série entière ("DSE") de f pour obtenir son développement limité ("DL") en 0 à l'ordre voulu.

ATTENTION !
Ne pas confondre DL en 0 et DSE ! Pour une fonction $\mathcal{C}^\infty$:

- Un DL_n en 0 est une formule **locale** : elle signifie juste que le reste de Taylor-Young est de la forme $x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, elle ne donne aucun renseignement global (comme des majorations, etc...).
- Un DSE est une formule **globale**, c'est-à-dire que c'est une égalité valable sur un intervalle tout entier.

ATTENTION !
L'implication « f est DSE $\implies$ f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 » est vraie **mais pas la réciproque !**
Voir les exercices pour un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 mais pas DSE.

Proposition 21 (Cas d'une fonction paire ou impaire).
Soit f une fonction DSE sur un intervalle ouvert symétrique contenant 0 .... :

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[,\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

(i) *Si f est paire, alors $\forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1} = 0$, donc $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}x^{2k}$* .

(ii) *Si f est impaire, alors $\forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k} = 0$, donc $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}$* .

Preuve : Traitons le cas où f est paire (l'autre cas est similaire) : en remplaçant x par $-x$, on a

$$\forall x \in]-\alpha;\alpha[,\quad f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n x^n.$$

Mais $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in]-\alpha;\alpha[$ par hypothèse, donc

$$\forall x \in]-\alpha;\alpha[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par unicité d'un développement en série entière, on en déduit que les coefficients sont égaux :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^n a_n = a_n,$$

et cette dernière égalité implique $a_n = 0$ si n est impair. $\square$

Exemple
Déterminer le DSE de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n},$$

pour tout $x \in]-1;1[$ (dans ce cas, $-x^2 \in]-1;0] \subset]-1;1[$).
On constate bien que ce DSE ne comporte que des monômes pairs : normal, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est paire.

2) Développements en série entière usuels

On peut légitimement se demander si les fonctions « usuelles » (exp, cos, sin, ...) sont développables en série entière. En général, la réponse est « oui », mais le développement en série entière n'est pas nécessairement valable sur tout l'ensemble de définition de la fonction (par exemple, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais son développement en série entière n'est valable que sur $]-1;1[$).

a) Famille de la série géométrique

Proposition 22 (DSE issus de la série géométrique).
Pour tout $x \in]-1;1[$, on a :

(i) $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$

(ii) $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$

(iii) $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$

(iv) $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \cdots$

(v) $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots$

(vi) $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots$

Toutes ces séries entières ont pour rayon de convergence $R = 1$.

Preuve :

(i) Pour tout $x \in]-1;1[$, on a

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x},$$

donc en faisant tendre $N \to +\infty$, la série géométrique de raison x converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \lim_{N\to+\infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x.}$$

(ii) En remplaçant x par $-x$ dans le DSE (i), on obtient le DSE de $\dfrac{1}{1+x}$.

(*iii*) $x \mapsto \ln(1+x)$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui s'annule en 0, donc il suffit d'intégrer terme à terme le DSE (*ii*).

(*iv*) De même, $x \mapsto -\ln(1-x)$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ qui s'annule en 0, donc il suffit d'intégrer terme à terme le DSE (*i*).

(*v*) Utiliser le DSE de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ avec $u = x^2$.

(*vi*) $x \mapsto \arctan(x)$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui s'annule en 0, donc il suffit d'intégrer terme à terme le DSE (*v*).

$\square$

Méthode
Cette démonstration illustre des méthodes classiques utilisées pour calculer le développement en série entière d'une fonction donnée :

- Intégrer ou dériver terme à terme un développement en série entière usuel.
- Changer de variable dans un développement en série entière usuel.

b) Famille de l'exponentielle

Proposition 23 (DSE issus de la fonction exponentielle).
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(i)\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$(ii)\ e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

$$(iii)\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

$$(iv)\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

Toutes ces séries entières ont pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Pour démontrer ce résultat, rappelons la formule suivante (démontrée en TSI 1) :

Théorème 24 (Formule de Taylor avec reste intégral).
Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ (où I est un intervalle réel), alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Preuve : Simple récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. □

Preuve : **(de la prop 23)**

(i) En posant $f(x) = e^x$, on a $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$. S'il existe, le développement en série entière de f est donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Montrons que cette série converge bien vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: d'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f entre les points $a = 0$ et $b = x$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt.$$

Majorons cette quantité en valeur absolue :

- si $x \geq 0$, alors la fonction $t \mapsto (x-t)^n e^t$ est positive sur $[0;x]$, donc

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt \leq \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-t)^n dt = \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}.$$

- si $x < 0$, alors la fonction $t \mapsto (t-x)^n e^t$ est positive sur $[x;0]$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{n!}\int_x^0 \left|(x-t)^n e^t\right| dt = \frac{1}{n!}\int_x^0 (t-x)^n e^t dt.$$

Vu que $e^t \leq e^0 = 1$ pour $t \in [x;0]$, on en déduit la majoration :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{n!}\int_x^0 (t-x)^n dt = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En regroupant les deux cas, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \max(e^x, 1) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par croissances comparées, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, ce qui montre que $\lim_{n \to +\infty} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = 0$, d'où la conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

(ii) On procède comme pour l'exponentielle réelle : en posant $f(x) = e^{ix}$, on a $f^{(k)}(x) = i^k e^{ix}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, donc d'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k x^k}{k!} = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n i^{n+1} e^{it} dt.$$

Puisque $|(x-t)^n i^{n+1} e^{it}| = |x-t|^n$ pour tout réels t, x, on obtient la majoration :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{n!} \left| \int_0^x |x-t|^n dt \right|,$$

et en distinguant les cas $x < 0$ et $x \geq 0$, on obtient finalement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

ce qui permet de conclure comme dans la proposition précédente.

(iii) et (iv) On prend les parties réelle et imaginaire du développement en série entière de e^{ix} précédemment obtenu : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$i^n = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k i & \text{si } n = 2k+1 \end{cases},$$

donc

$$\cos(x) = \Re(e^{ix}) = \Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\Re\left(\frac{i^n}{n!} x^n\right)}_{=0 \text{ si } n \text{ impair}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k};$$

$$\sin(x) = \Im(e^{ix}) = \Im\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\Im\left(\frac{i^n}{n!} x^n\right)}_{=0 \text{ si } n \text{ pair}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

$\square$

Méthode
Cette démonstration illustre encore une des méthodes existantes pour montrer qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 est développable en série entière. On peut procéder ainsi :

- Calculer sa série de Taylor $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ (en calculant les dérivées $k^{\text{ième}}$ de f par récurrence). Rappelons que c'est le seul développement en série entière possible.
- Montrer que pour x fixé dans un certain intervalle, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$.

  Pour cela, à x fixé, on majore l'écart $\displaystyle\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right|$ par $\varepsilon_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  On peut, par exemple, utiliser la **formule de Taylor avec reste intégral**.

ATTENTION !
La subtilité réside dans la seconde étape : on montre que la série de Taylor de f converge bien **vers f**. Il ne suffit pas de montrer qu'elle converge « tout court » : en effet, il y a des **contre-exemples** où la série de Taylor **converge vers autre chose que f** (voir dans les exercices la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée en 0 par $f(0) = 0$).

c) Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$

Proposition 25 (DSE de $(1+x)^\alpha$).
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in]-1;1[$, on a

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \\ &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots\end{aligned}$$

Remarque
Le coefficient de ce DSE s'écrit aussi $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec la convention habituelle $a_0 = \displaystyle\prod_{k=0}^{-1}(\alpha-k) = 1$ (un produit vide vaut 1).

Preuve : Ici, l'utilisation de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral est délicate.
On va plutôt utiliser la théorie des équations différentielles : la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;+\infty[$ et vérifie :

$$\forall x \in]-1;+\infty[, \qquad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x}f(x),$$

ainsi que la condition initiale $f(0) = 1$. C'est donc l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' - \frac{\alpha}{1+x}y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ (voir le cours de première année).
Montrons maintenant que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution du même problème de Cauchy (où l'on a posé $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

- Montrons d'abord que $g \in \mathcal{C}^\infty(]-1;1[,\mathbb{R})$:
  * si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, alors $a_n = 0$ dès que $n \geq \alpha + 1$, donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge pour tout réel x (c'est en fait une somme finie). Son rayon de convergence est donc $R = +\infty$.
  * si $\alpha \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{N}^*$, alors $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}|\alpha-k|}{\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}|\alpha-k|}|x| = \frac{|\alpha-n|}{n+1}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

  Donc, d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente si $|x| < 1$ et grossièrement divergente si $|x| > 1$, ce qui montre que son rayon de convergence est $R = 1$.

Dans tous les cas, la fonction somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au moins sur l'intervalle $]-1;1[$.

- Ensuite, par le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, on a

$$\forall x \in]-1;1[, \quad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},$$

donc, en développant :

$$(1+x)g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n.$$

En faisant un changement d'indice dans la première somme, on obtient

$$\begin{aligned}
(1+x)g'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}((n+1)a_{n+1} + n a_n)x^n \\
&= \alpha + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(\alpha-k) + \frac{n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\right)x^n \\
&= \alpha + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}\left((\alpha-n)+n\right)x^n \\
&= \alpha(1 + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n) = \alpha g(x)
\end{aligned}$$

Enfin, $g(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0 = 1$ (produit vide), donc g vérifie le même problème de Cauchy que f sur l'intervalle $]-1;1[$. Vu qu'il y a unicité de la solution, les fonctions f et g coïncident sur $]-1;1[$, ce qui montre l'égalité voulue.

$\square$

Méthode
Cette démonstration donne encore une nouvelle méthode pour montrer qu'une fonction donnée est développable en série entière : l'écrire comme solution d'une équation différentielle.

3) Méthodes supplémentaires de calculs de développement en série entière

Exemple (Développement en série entière d'une fraction rationnelle)
Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x-2}$ est développable en série entière et déterminer son développement.
L'idée est de décomposer la fraction rationnelle en éléments simples : on détermine a, b réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}.$$

En identifiant les numérateurs, cela équivaut à $(a+b)x + (2a-b) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-b=1 \end{cases}$. En résolvant ce système, on obtient $(a,b) = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}, \quad f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right).$$

On remarque alors que les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ sont développables en série entière. En effet, on peut se ramener à un développement en série entière de référence :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n;$$

$$\forall x \in]-2;2[, \quad \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n,$$

(ce deuxième développement en série entière converge car $|x| < 2 \implies \left|-\frac{x}{2}\right| = \frac{|x|}{2} < 1$).
En prenant **l'intersection** des domaines de validité de ces deux développements en série entière, on a donc

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \frac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

en posant $a_n = \frac{1}{3}\left(-1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette écriture montre que f est développable en série entière.

Exemple (Développement en série entière d'un polynôme trigonométrique)
Montrer que la fonction $g : x \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$ est développable en série entière et déterminer son développement.
Ici, la technique est de linéariser l'expression : à l'aide des formules d'Euler (voir cours de TSI 1), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = -\frac{1}{8}(e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix})^2 = \frac{1}{4}(\cos(x) - \cos(3x))$$

(après développement et simplifications).

On utilise alors le développement en série entière de la fonction cos : $\forall u \in \mathbb{R},\ \cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$ avec $u = x$ puis $u = 3x$. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n}}{(2n)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n},$$

en posant $b_n = \dfrac{(-1)^n}{4 \times (2n)!}(1 - 3^{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci se réécrit : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ avec $a_{2n} = b_n$ et $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que g est développable en série entière.

4) Application des développements en série entière au calcul de la somme d'une série entière

À partir de la liste des développements en série entière usuels, **qu'il faut connaître par cœur**, on peut souvent calculer explicitement des sommes de séries entières.

Méthode
Pour calculer une somme de série entière, on peut :

- transformer la somme à calculer à l'aide d'un changement d'indice ou une factorisation, et se ramener à un développement en série entière connu ;
- dériver ou intégrer terme à terme la somme à calculer, et reconnaître ainsi un développement en série entière usuel.

Exemple
Calculer la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ (qui converge pour tout $x \in \mathbb{R}$).

En effectuant un changement d'indice, on a $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$.

Ensuite, en multipliant par x, on obtient $xS(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, et on reconnaît là le développement en série entière (incomplet) de e^x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x = e^x - 1 - x,$$

ce qui donne $S(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x}$ pour $x \neq 0$. En outre, on a $S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{0^n}{(n+1)!} = 0$.

Exemple
Calculer la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$ (qui converge pour $x \in]-1;1[$).

On sait déjà (voir précédemment l'exemple qui suit le théorème de dérivation terme à terme) que

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Essayons d'exprimer S en fonction de cette somme. Tout d'abord, en factorisant par x, on a

$$\forall x \in]-1;1[, \quad S(x) = x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}\right) = x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}(nx^n)\right) = x\,\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n\right),$$

d'après le théorème de dérivation terme à terme. On en déduit que

$$\forall x \in]-1;1[, \quad S(x) = x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = x\left(\frac{1+x}{(1-x)^3}\right) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

IV Fonction exponentielle complexe

Dans le cours de TSI 1, on a défini **dans cet ordre** :

— **la fonction logarithme népérien** comme la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en $x=1$ (*via* le théorème fondamental de l'analyse qui dit que toute fonction continue possède des primitives). On a alors facilement la propriété algébrique fondamentale du logarithme :

$$\forall (x,x') \in]0,+\infty[^2, \qquad \ln(xx') = \ln(x) + \ln(x').$$

— **la fonction exponentielle réelle** $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, comme la réciproque de la bijection $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Cela permet de montrer que $\exp' = \exp$, que $\exp(0) = 1$ et que

$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2, \qquad e^{x+x'} = e^x \times e^{x'}.$$

— **la fonction exponentielle imaginaire** $x \mapsto e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Grâce aux formules de trigonométrie $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, on montre que

$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2, \qquad e^{i(x+x')} = e^{ix} \times e^{ix'}.$$

— **la fonction exponentielle complexe** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en **posant**, pour tout nombre complexe $z = x + iy$

$$e^z = e^x \times e^{iy} = e^x \times (\cos y + i \sin y).$$

Avec cette définition, la propriété algébrique fondamentale de l'exponentielle se prolonge directement à $\mathbb{C}$:

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \qquad e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}.$$

Enfin, il se trouve que le développement en série entière de la fonction exponentielle réelle se prolonge également à $\mathbb{C}$.

Théorème 26 (DSE de l'exponentielle complexe).
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, *on a* $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Preuve : Admis, car nécessite des outils HP. $\square$