Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 8
Espaces probabilisés

Table des matières

I Introduction générale

1) Expérience aléatoire

Certaines expériences entraînent des résultats aléatoires, c'est-à-dire qui dépendent du hasard. On les appelle **expériences aléatoires**, ou **épreuves aléatoires**.

Exemple

1) On jette un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on lit le numéro apparu sur la face supérieure.
2) On jette deux fois un dé cubique et on note les numéros obtenus.

2) Evénements

Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, certains faits liés à cette expérience peuvent se produire ou non. On les appelle **événements**.

Exemple

- Dans l'expérience 1) :
  les phrases A_1 : "le numéro obtenu est pair" et A_2 : "le numéro obtenu est supérieur ou égal à 4" représentent des événements.
- Dans l'expérience 2) :
  la phrase B : "la somme des numéros obtenus est 6" représente un événement.

3) Univers des résultats observables

Exemple (L'expérience 1 (un jet de dé))
On obtient un nombre $\omega \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- L'événement "le nombre obtenu est 1" est réalisé si et seulement si $\omega \in \{1\}$.
  Cet événement sera donc représenté par le sous-ensemble $\{1\}$.
- L'événement A_1 : "le nombre obtenu est pair" est réalisé ssi $\omega \in \{2, 4, 6\}$.
  Cet événement sera donc représenté par le sous-ensemble $\{2, 4, 6\}$.
- L'événement A_2 : "le numéro obtenu est supérieur ou égal à 4" est réalisé ssi $\omega \in \{4, 5, 6\}$. Cet événement sera donc représenté par le sous-ensemble $\{4, 5, 6\}$.
- L'événement A_3 : "le numéro obtenu est positif" est toujours réalisé.
  Cet événement sera donc représenté par l'ensemble entier $\{1, \cdots, 6\}$.
  On dit que c'est **un événement certain**.
- L'événement A_4 : "le numéro obtenu est 7" n'est jamais réalisé.
  Cet événement sera donc représenté par l'ensemble vide $\emptyset$.
  On dit que c'est **un événement impossible**.

Chaque événement lié à l'expérience 1 peut ainsi être représenté par une partie de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemple (L'expérience 2 (deux jets de dé))
On obtient un couple $(\omega_1, \omega_2) \in \{1, \cdots, 6\}^2$.

- L'événement B : "la somme des numéros obtenus est 6" est réalisé si et seulement si
$$\omega_1 + \omega_2 = 6 \text{ avec } 1 \leq \omega_1, \omega_2 \leq 6.$$
B est donc représenté par le sous-ensemble $\{(1,5),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,2),\ (5,1)\}$.

Chaque événement lié à l'expérience 2 peut ainsi être représenté par
une partie de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}^2$.

Plus généralement, à chaque expérience aléatoire, **on peut associer un ensemble $\boldsymbol{\Omega}$ tel que chaque événement puisse être représenté par une partie $\boldsymbol{A \subset \Omega}$.**
Cet ensemble Ω est appelé **l'univers des résultats possibles** ou encore **l'univers des résultats observables**.

4) Langage des événements

Dans ce paragraphe, les événements considérés concernent tous **la même expérience aléatoire**. Pour chaque réalisation de l'expérience, on note ω le résultat obtenu.

Convention
On identifiera abusivement un événement A (donné par une phrase), et la partie A de Ω qui le représente.

- A chaque événement A correspond son **événement contraire** "non A", défini par :
$$\text{"non } A\text{" est réalisé } \iff \omega \notin A \iff \omega \in \overline{A},$$
où $\boldsymbol{\overline{A}}$ **désigne le complémentaire de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{\Omega}$**, i.e.
$$\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega,\ \omega \notin A\}$$
Dessin

Remarque
* Pour tout événement A, on a $\overline{(\overline{A})} = A$.
* L'événement contraire de A se note parfois A^c.
* On a toujours $\overline{\Omega} = \emptyset$, et $\overline{\emptyset} = \Omega$.

Considérons deux événements A et B.

- L'événement **"$\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$"** est réalisé $\iff \omega \in A$ et $\omega \in B \iff \omega \in A \cap B$.
  "A et B" se représente donc par l'intersection $A \cap B$.
  Dessin

- A et B sont dits **incompatibles** (ou **disjoints**) s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanémenent au cours de la même expérience aléatoire.
  Donc A et B sont incompatibles ssi $A \cap B = \emptyset$.
  Dessin

  Exemple
  * Un événement A et son contraire "non A" sont toujours incompatibles.
  * L'événement impossible $\emptyset$ est incompatible avec tout autre événement A.

- L'événement **"$\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{B}$"** est réalisé $\iff \omega \in A$ ou $\omega \in B \iff \omega \in A \cup B$.
  "A ou B" se représente donc par la réunion $A \cup B$.
  Dessin

- L'événement **"$\boldsymbol{A}$ privé de $\boldsymbol{B}$"** est réalisé $\iff \omega \in A$ et $\omega \notin B$.
  "A privé de B" se représente donc par l'ensemble $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
  Dessin

- On dit que **"$\boldsymbol{A}$ implique $\boldsymbol{B}$"** si $\omega \in A \implies \omega \in B$.
  Ensemblistement, cela revient à dire que $A \subset B$.
  Dessin

5) Notion intuitive de probabilité

Soit E une expérience aléatoire. Tous les événements liés à E n'ont pas "la même chance" d'être réalisés. Pour préciser cela, supposons que l'on **répète N fois** l'expérience E dans des conditions identiques.

Fixons un événement A, et notons r le nombre de fois où A a été réalisé.
On a $0 \leq r \leq N$. Le nombre $\boxed{f_N(A) = \dfrac{r}{N}}$ est appelé **fréquence d'apparition de A**, ou encore **fréquence empirique de A**. On a $f_N(A) \in [0; 1]$, et les propriétés :

- Si A et B sont deux événements **incompatibles** : notons r (resp. s) le nombre de fois où A (resp. B) a été réalisé au cours des N répétitions de l'expérience E. Alors, l'événément $A \cup B$ a été réalisé $r+s$ fois puisque A et B ne sont jamais réalisés simultanément. On a donc $f_N(A \cup B) = \dfrac{r+s}{N} = \dfrac{r}{N} + \dfrac{s}{N} = f_N(A) + f_N(B)$.
- Si on considère **l'événement certain** Ω, il a été réalisé N fois, donc $f_N(\Omega) = \dfrac{N}{N} = 1$.
- Quant à l'événement **"*non A*"**, il a été réalisé $N - r$ fois (chaque fois que A ne s'est pas réalisé), donc sa fréquence est $f_N(\overline{A}) = \dfrac{N-r}{N} = 1 - f_N(A)$.

Idée de "l'approche fréquentielle" :

Etant donné un événement A, on s'attend à ce que **sa fréquence $f_N(A) = \dfrac{r}{N}$ admette une limite finie lorsque $N \to +\infty$** (c'est-à-dire lorsqu'on a répété l'expérience un nombre de fois suffisamment grand).
On pourrait donc définir la probabilité de l'événement A par

$$" \ \mathbb{P}(A) = \lim_{N \to +\infty} f_N(A) \ ".$$

C'est donc un nombre compris entre 0 et 1, qui ne dépendrait que de A.

Exemple
Dans l'expérience du jet d'un dé, on s'attend à ce que la fréquence d'apparition de l'événement A : "obtenir un 2" tende vers $\dfrac{1}{6}$ lorsque le nombre de répétitions $N \to +\infty$.

Bien entendu, **cette approche n'est qu'intuitive**, pas mathématique. En vérité, on ne sait pas *a priori* si la suite des fréquences $f_N(A)$ admet une limite lorsque $N \to +\infty$. Il est donc nécessaire de **définir abstraitement la notion de probabilité**, en faisant en sorte qu'elle vérifie les mêmes propriétés que la fréquence empirique.

II Espace probabilisé fini

1) Définition d'une probabilité

Définition 1 (Evénements d'un univers fini).
Soit Ω un ensemble fini. Les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ (les $A \subset \Omega$) sont appelés **événements** *de l'univers Ω. Les singletons $\{\omega\}$ sont appelés* **événements élémentaires**.

Définition 2 (Probabilité sur un univers fini).
On appelle **probabilité sur Ω** *toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ vérifiant :*

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- *Pour tous événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$* **incompatibles**, *on a*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad \text{(propriété d'additivité)}$$

Vocabulaire

- On dit aussi "mesure de probabilité" $\mathbb{P}$.
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé **probabilité de l'événement A**.

Définition 3 (Espace probabilisé fini).
Un **espace probabilisé fini** *est un ensemble fini Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.*

2) Propriétés d'une probabilité

Proposition 4 (Propriétés élémentaire d'une mesure de probabilité).
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et soit A, B deux événements. On a :

(i) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(ii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(iii) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(iv) *Si $B \subset A$, alors $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$* .

(v) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Preuve :

(i) A et $\overline{A}$ sont incompatibles, et on a $A \cup \overline{A} = \Omega$, donc par additivité :

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

(ii) $\emptyset = \overline{\Omega}$, donc d'après (i) :

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0.$$

(iii) Les événements $A \setminus B$ et $A \cap B$ sont incompatibles, et $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$, donc par additivité :

$$\mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).$$

(iv) Si $B \subset A$, alors $A \cap B = B$, donc d'après le point (iii) :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \underbrace{\mathbb{P}(A \setminus B)}_{\geq 0} \leq \mathbb{P}(A).$$

(v) On peut décomposer :

$$A \cup B = B \cup (A \setminus B)$$

et ces deux événements sont incompatibles. Donc, par additivité :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \setminus B),$$

et d'après le point (iii) :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + (\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

□

Proposition 5 (Probabilité d'une réunion disjointe).
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \cdots, A_n$ des événements ....
deux à deux incompatibles *(i.e. $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$). On a :* ....

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

....

Preuve : Récurrence sur n, en utilisant $A_1 \cup \cdots \cup A_n = (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n$. □

Remarque
Il existe une formule (très compliquée) pour calculer la probabilité d'une réunion non disjointe d'événements.

Corollaire 6 (Probabilité en fonction des événements élémentaires).
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$.
Pour tout événement $A \subset \Omega$, on a $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \text{ tq } \omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$.

Preuve : L'événement A est la réunion (finie) des événements élémentaires qui le composent :

$$A = \bigcup_{i \text{ tq } \omega_i \in A} \{\omega_i\}.$$

Les événements élémentaires étant deux à deux incompatibles, on obtient par la proposition précédente :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \text{ tq } \omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

□

Remarque
En d'autres termes, on peut calculer la probabilité d'un ensemble en le décomposant en une réunion d'evénements élémentaires.

3) Détermination d'une probabilité sur un univers fini

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers fini Ω est **entièrement déterminée** par la connaissance des probabilités des événements élémentaires. On dispose du théorème fondamental suivant (admis) :

Théorème 7 (Détermination d'une probabilité sur un univers fini).
Soit $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ un ensemble fini, et soient des nombres réels $p_1, \cdots, p_n$.
Alors, les assertions suivantes sont ***équivalentes*** :

(i) *Il existe une probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0; 1]$ telle que*
$\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

(ii) *On a $\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$* .

Dans ce cas, $\mathbb{P}$ est unique, et on a $\forall A \subset \Omega,\ \mathbb{P}(A) = \sum_{i \text{ tq } \omega_i \in A} p_i$.

4) Equiprobabilité

Définition 8 (Equiprobabilité sur un univers fini).
Soit $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ un ensemble fini.
L'équiprobabilité *sur Ω est la probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ définie par :*

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \qquad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\# \Omega}.$$

Remarque
L'équiprobabilité sur Ω est donc l'unique mesure de probabilité telle que tous les événements élémentaires ont la même probabilité. On parle aussi de **probabilité uniforme**.

Proposition 9 (Probabilité d'un événement en cas d'équiprobabilité).
Soit Ω un espace probabilisé fini, **muni de l'équiprobabilité** *$\mathbb{P}$. Alors :*

$$\forall A \subset \Omega, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\text{"nombre de cas favorables à } A\text{"}}{\text{"nombre de cas possibles"}}.$$

Preuve : En notant $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$, on a

$$A = \bigcup_{i \text{ tq } \omega_i \in A} \{\omega_i\},$$

donc par additivité de la probabilité $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \text{ tq } \omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i \text{ tq } \omega_i \in A} \frac{1}{n}.$$

Cette somme comporte $\# A$ termes, tous égaux à $\frac{1}{n}$. On a donc

$$\mathbb{P}(A) = \# A \times \frac{1}{n} = \frac{\# A}{\# \Omega}.$$

□

Exemple (n lancers d'un dé)
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers d'un dé cubique bien équilibré.

1. Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité des deux événements suivants :
   A : "on n'obtient aucun "6" lors des n lancers."
   B : "on obtient une seule fois "6" lors des n lancers".

1) Modélisation de l'expérience :

- On introduit l'univers
$$\Omega = \{1, \cdots, 6\}^n = \{ \text{ listes } (x_1, \cdots, x_n), \text{ avec les } x_i \in \{1, \cdots, 6\}\}$$
C'est un ensemble fini de cardinal $\#\,\Omega = 6^n$.

  Cet univers permet de représenter les résultats successifs des n lancers : chaque événement élémentaire est formé d'une suite $\omega = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$. Par exemple, l'événement élémentaire $\{(1, 1, \cdots, 1)\}$ correspond au cas où l'on a obtenu que des "1" lors des n lancers.
- Choix d'une mesure de probabilité sur Ω : ici, on munit Ω de l'équiprobabilité (pour rendre compte du fait que les dés sont équilibrés).

On a donc défini un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

2) Calcul des probabilités :

- L'événement A correspond aux listes $(x_1, \cdots, x_n)$ avec $x_1, \cdots, x_n \in \{1, \cdots, 5\}$, donc $\#A = 5^n$ et
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{5^n}{6^n} = (5/6)^n.$$
- On a la réunion disjointe $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$, où chaque B_i est l'événement "obtenir "6" seulement au i^e lancer". Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ fixé, l'ensemble B_i est formé des listes $(x_1, \cdots, x_n)$ telles que $x_i = 6$ et $x_j \in \{1, \cdots, 5\}$ pour $j \neq i$. On a donc $\#B_i = 5^{n-1} \times 1 = 5^{n-1}$, donc $\mathbb{P}(B_i) = \frac{5^{n-1}}{6^n}$. Il s'ensuit :
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{5^{n-1}}{6^n} = \frac{n5^{n-1}}{6^n}.$$

III Généralisation : espace probabilisé fini ou dénombrable

1) Dénombrabilité d'un ensemble

Définition 10 (Ensemble dénombrable).
Un ensemble Ω est dit **dénombrable** *s'il existe une bijection $\mathbb{N} \to \Omega$* .

Remarque
Concrètement, Ω est dénombrable si on peut énumérer ses éléments comme une suite :

$$\Omega = \{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Un ensemble dénombrable est donc **infini**, mais la réciproque est fausse. Il existe en effet des ensembles infinis "trop gros" pour que l'on puisse "compter leurs éléments".

Exemple (Quelques ensembles dénombrables)

- $\mathbb{N}$ est dénombrable.
  En effet, $Id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection !

- $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.
  En effet $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ définie par $\varphi(n) = n + 1$ est une bijection.

- $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
  En effet $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$\varphi(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si n est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si n est impair} \end{cases}$$

  est une bijection.

La bijection réciproque est $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, elle est définie par :

$$\psi(k) = \begin{cases} 2k-1 & \text{si } k > 0 \\ -2k & \text{si } k \leq 0 \end{cases}$$

- $\mathbb{Q}$ est dénombrable (difficile).

Exemple (Quelques ensembles non dénombrables)

- L'ensemble des suites binaires :

$$X = \{0;1\}^{\mathbb{N}} = \{ \text{ suites } (x_1, x_2, \cdots), \ \ \text{avec } x_i \in \{0;1\}\}$$

  n'est pas dénombrable.
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, et les intervalles de $\mathbb{R}$ (non vides et non réduits à un point) ne sont pas dénombrables.

Mais tout cela est difficile à montrer.

Les deux propositions suivantes sont admises :

Proposition 11 (Parties d'un ensemble dénombrable).
Soit Ω un ensemble dénombrable, et $A \subset \Omega$. Alors A est fini ou dénombrable.

Remarque
Cette proposition (pas évidente !) signifie qu'il n'y a "pas d'infini plus petit que $\mathbb{N}$". Elle repose sur le fait suivant : toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Proposition 12 (Suites de parties finies ou dénombrables).
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties finies ou dénombrables d'un ensemble Ω, alors la partie $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est une partie finie ou dénombrable de Ω.

2) Espace probabilisé fini ou dénombrable

Dans ce cours de probabilités, on ne travaillera pas seulement avec des univers Ω finis, **on envisagera aussi des univers infinis dénombrables**. Ce genre d'univers est nécessaire pour décrire certaines expériences aléatoires, et les notions d'événements, de probabilité se généralisent assez facilement.

Exemple (Lancers consécutifs avec condition d'arrêt)
On lance une pièce non truquée jusqu'à obtenir *Pile*.
Cette expérience aléatoire peut être modélisée par l'univers

$$\Omega = \{\text{suites finies } (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n-1 \text{ fois}}, 1),\ n \in \mathbb{N}^*\},$$

qui est clairement en bijection avec $\mathbb{N}^*$.
On choisira donc plutôt $\Omega = \mathbb{N}^*$, où chaque entier $n \geq 1$ représente alors le numéro du dernier lancer.

Par exemple :

- l'événement "(tirer 9 fois *Face* puis *Pile*)" est représenté par l'ensemble $A = \{10\}$. C'est un événement élémentaire.
- l'événement "(tirer *Face* un nombre pair de fois)" est représenté par l'ensemble $B = \{1, 3, 5, 7, \cdots, \} = \{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$.

En revanche, certaines autres expériences aléatoires nécessitent l'introduction d'univers infinis non dénombrables. Dans ce cas, la notion d'événements est plus subtile et la construction de mesures de probabilités plus délicate, c'est pourquoi les espaces probabilisés non dénombrables ne sont pas au programme.

Dans un univers dénombrable, on utilisera le même langage des événements que dans un univers fini :

Définition 13 (Evénements d'un univers fini ou dénombrable).
Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable. Les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ (i.e. les $A \subset \Omega$) sont appelés **événements**. *Les singletons $\{\omega\}$ sont appelés* **événements élémentaires**.

Généralisons donc la notion de probabilité :

Définition 14 (Probabilité sur un univers fini ou dénombrable).
Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable. On appelle **probabilité sur Ω** *toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ vérifiant :*

- *(i)* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- *(ii)* *Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **deux à deux incompatibles** *:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(avec convergence de la série) .

On dit alors que $(\Omega, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé** .

On retrouve les mêmes propriétés que pour les probabilités sur un univers fini. On admet la proposition suivante :

Proposition 15 (Propriétés élémentaires d'une probabilité).
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé (fini ou dénombrable). On a :

- *(i)* $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- *(ii)* *Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.*
- *(iii)* *Pour toute famille (finie ou dénombrable) $(A_i)_{i\in I}$ d'événements* **deux à deux incompatibles**, *on a*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

- *(iv)* $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- *(v)* $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- *(vi)* *Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*
- *(vii)* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Remarque
Dans l'énoncé précédent, la somme $\sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$ est soit une somme finie (si I est fini), soit une série convergente (si I est dénombrable).

3) Système complet d'événements

Définition 16 (Système complet d'événements).
Soit Ω un univers fini ou dénombrable. Un **système complet d'événements** *(en abrégé "SCE") est une famille d'événements $(B_i)_{i\in I}$ (finie ou dénombrable) qui* **partitionne Ω**, *c'est-à-dire telle que :*

(i) les B_i sont deux à deux incompatibles (i.e. $i \neq j \implies B_i \cap B_j = \emptyset$) .

(ii) $\bigcup_{i\in I} B_i = \Omega$.

Exemple (Les événements élémentaires forment un système complet)
Si $\Omega = \{\omega_i,\ i \in I\}$, alors les singletons $(\{\omega_i\})_{i\in I}$ forment un système complet d'événements (tout ensemble Ω est réunion de ses singletons, et ceux-ci sont deux à deux disjoints).

ATTENTION !
Si $(B_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(B_i) = 1$ mais **la réciproque est fausse** !

4) Détermination d'une probabilité sur un univers fini ou dénombrable

Comme sur un univers fini, une probabilité sur un univers dénombrable est entièrement déterminée par ses valeurs sur les événements élémentaires. Nous admettrons le résultat suivant :

Théorème 17 (Déterm. d'une proba. sur un univ. fini ou dénombrable).
Soit $\Omega = \{\omega_i,\ i \in I\}$ un univers fini ou dénombrable, et $(p_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Alors, les assertions suivantes sont **équivalentes** *:*

(i) Il existe une probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ telle que $\forall i \in I,\ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

(ii) On a $\forall i \in I,\ p_i \geq 0$ et $\sum_{i\in I} p_i = 1$.

Dans ce cas, $\mathbb{P}$ est unique, et on a $\forall A \subset \Omega,\ \mathbb{P}(A) = \sum_{i \text{ tq } \omega_i \in A} p_i$.

Remarque
$\sum_{i\in I} p_i$ est une somme finie (si I est fini), ou une série convergente (si I est dénombrable).

Corollaire 18 (Equiprobabilité impossible sur un univers dénombrable).
Si Ω est un univers **dénombrable**, *alors il n'existe pas d'équiprobabilité sur Ω*
(i.e. : impossible que les événements élémentaires aient tous la même probabilité) .

Preuve : Ω étant dénombrable, notons $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses éléments. S'il existait une mesure d'équiprobabilité $\mathbb{P}$ sur Ω, alors il existerait un réel $\lambda \in [0;1]$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \lambda.$$

Par additivité, on aurait alors

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda,$$

ce qui est impossible, car si $\lambda > 0$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda$ diverge (son terme général est constant), alors que si $\lambda = 0$, elle est nulle (donc sa somme ne peut pas valoir 1). $\square$

Exemple (Lancers successifs avec condition d'arrêt)
On lance une pièce non truquée jusqu'à obtenir *Pile*.
Cette expérience aléatoire peut être modélisée par l'univers dénombrable $\Omega = \mathbb{N}^*$, où chaque entier $n \geq 1$ représente l'événement "obtenir *Pile* au bout de n lancers".
On cherche alors à **munir Ω d'une probabilité** (qui ne peut pas être l'équiprobabilité d'après le corollaire précédent).

1. Construire une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω en attribuant une probabilité à chaque événement élémentaire $\{n\}$.
2. Dans cet espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, calculer la probabilité de l'événement A : "obtenir *Pile* au bout d'un nombre pair de lancers".

1. Idée : poser $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}$ ("une chance sur deux d'obtenir *Pile* au 1er lancer), puis $\mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdots$, et en fait $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Cela définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$ car :

   - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^n} \geq 0$,
   - $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$

2. On a ensuite : $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{2k\}$ (et cette réunion est disjointe), donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\{2,4,6,\cdots\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{2k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1/2^2}{1-1/2^2} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Exemple (Ne jamais obtenir *Pile*)
Toujours dans la même expérience (jets d'une pièce jusqu'à obtenir *Pile*), on s'intéresse maintenant à l'événement : ***X* : "ne jamais obtenir pile"**.

- Si on conserve le même univers pour décrire l'expérience ($\Omega = \mathbb{N}^*$), alors $X = \emptyset$, donc évidemment $\mathbb{P}(X) = 0$.
- Un moyen de prendre en compte l'événement X est de **modifier $\boldsymbol{\Omega}$** : on rajoute un événement élémentaire : $\tilde{\Omega} = \mathbb{N}$, et alors $X = \{0\}$ (tandis que les singletons $\{n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ représentent l'obtention de *Pile* au n^e lancer).
  Mais si on veut conserver la même mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\tilde{\Omega}$, on a alors :
  $$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(\tilde{\Omega} \setminus \mathbb{N}^*) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 1 = 0,$$
  donc ça ne change rien : l'événement X a une probabilité nulle (ce qui est intuitif), même s'il n'est pas à proprement parler "impossible".

L'exemple précédent justifie le vocabulaire suivant :

Définition 19 (Evénement négligeable, presque sûr).
Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ *un événement* A *est dit :*

(i) **négligeable** *si* $\mathbb{P}(A) = 0$.

(ii) **presque sûr** *si* $\mathbb{P}(A) = 1$

Remarque

- L'événement impossible $\emptyset$ est bien entendu négligeable, mais ce n'est pas toujours le seul.
- L'événement certain Ω est bien entendu presque sûr, mais ce n'est pas toujours le seul.
- A est négligeable ssi $\overline{A}$ est presque sûr.
- Ainsi, dans l'expérience précédente, on est "presque sûr" d'obtenir un *Pile* dans la succession de lancers.

IV Probabilités conditionnelles

On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ (fini ou dénombrable).

1) Introduction et définition

On considère deux événements A et B.
On se demande **comment la connaissance de la réalisation de** B **influence la probabilité que l'événement** A **soit réalisé**.

On peut procéder ainsi :
on **répète *N* fois** l'expérience aléatoire étudiée et on note à chaque fois à l'aide d'un 0 ou d'un 1 si l'événement A a été réalisé ou non. Idem pour B. On peut présenter les résultats sous forme d'un tableau simple :

A	B
0	1
1	1
1	0
1	1
0	0
1	0
$\vdots$	$\vdots$

On définit alors la **fréquence conditionnelle** de la réussite de l'événement A sachant la réussite de l'événement B lors des N répétitions par :

$$f_N(A|B) = \frac{\text{nombre de lignes avec } 1,1}{\text{nombre de 1 dans la colonne } B},$$

c'est-à-dire $f_N(A|B) = \dfrac{f_N(A \cap B)}{f_N(B)}$.

Faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient intuitivement $\lim\limits_{N \to +\infty} f_N(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

D'où l'idée de définition :

Définition 20 (Probabilité conditionnelle).
Soient A et B deux événements.

Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on définit la **probabilité de A sachant B** *par* $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

On la note aussi $\mathbb{P}(A|B)$.

Remarque
Concrètement, $\mathbb{P}_B(A)$ est la probabilité que A se produise sachant que B s'est produit.

Exemple (Deux lancers consécutifs d'une pièce)
On lance deux fois consécutivement une pièce équilibrée.

1. Quelle est la probabilité que les deux lancers donnent *Face* sachant que le premier est *Face* ?
2. Et sachant qu'au moins l'un des deux est *Face* ?

On pose $\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$, muni de l'équiprobabilité.
On considère les événements :

- A : "les deux lancers donnent *Face*". On a $A = \{(F,F)\}$.
- B : "le premier lancer donne *Face*". On a $B = \{(F,F),(F,P)\}$.
- C : "au moins un des deux lancers donne *Face*". On a $C = \{(F,F),(F,P),(P,F)\}$.

1. On obtient :
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$
2. On obtient :
$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Ces résultats sont intuitifs.

2) Propriétés d'une probabilité conditionnelle

Proposition 21 (Toute probabilité conditionnelle est une probabilité).
Si on a $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors l'application $\mathbb{P}_B : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ ....
définie par $A \mapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur Ω .
....

Preuve :

- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $(A \cap B) \subset B$, donc $0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ puis $0 \leq \mathbb{P}_B(A) \leq 1$, ce qui prouve que $\mathbb{P}_B$ est bien à valeurs dans $[0,1]$.
- On a $\mathbb{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$, vu que $B \subset \Omega$, ce qui implique $\Omega \cap B = B$.

- Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Alors $(A_n \cap B)_{n\in\mathbb{N}}$ est également une suite d'événements deux à deux incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A_n \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_B(A_n).$$

$\square$

Remarque
Pour une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B$, tout événement A tel que $B \subset A$ est de probabilité 1, puisque dans ce cas, $A \cap B = B$, donc $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.
C'est normal, la réalisation de B rend dans ce cas l'événement A certain.
Et tout événement A incompatible avec B est bien sûr de probabilité 0 pour $\mathbb{P}_B$.

3) Formule des probabilités composées

Proposition 22 (Formules des probabilités composées).
Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ *(avec* $n \geq 2$*) t.q.* $\mathbb{P}(\boldsymbol{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}) \neq \mathbf{0}$. *Alors :*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n).$$

Preuve :

- Déjà, notons que toutes les probabilités conditionnelles intervenant dans cette formule sont bien définies car on a

$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \subset (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i)$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, et donc

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i) \geq \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0,$$

ce qui assure que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

- Montrons la formule par récurrence sur n :
  * Elle est évidente pour $n = 2$ d'après la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)},$$

(si $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$) donc

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2).$$

  * Soit $n \geq 2$. Supposons la formule vraie pour n événements $A_1, \cdots, A_n$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ et montrons-la pour $n+1$ événements $A_1, \cdots, A_{n+1}$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$. Par associativité de l'intersection, on a, en posant $B = A_1 \cap \cdots \cap A_n$:

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(B \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A_{n+1}).$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence : puisque $B \subset (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$, on a $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1) \times \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i}(A_k),$$

ce qui entraîne

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i}(A_k) \right) \times \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1) \times \prod_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i}(A_k),$$

ce qui montre l'hérédité.

$\square$

Remarque (Interprétation sur un arbre)
La formule des probabilités composées dit que la probabilité d'un chemin dans un arbre est le produit des probabilités des branches.

Dessin :

Exemple (Tirage de 4 cartes sans remise)
On considère les tirages de 4 cartes sans remise dans un jeu de 52.
Calculer la probabilité de tirer les 4 as.

1. **Première méthode** : Il y a $52 \times 51 \times 50 \times 49$ 4-listes de cartes, et on a $4!$ tirages comportant les 4 as (l'ordre compte) donc la proba cherchée est $p = \frac{4!}{52\times51\times50\times49}$.
2. **Seconde méthode** : Si on note A_i l'événement "la i-ième carte tirée est un as", alors ce que l'on cherche est

$$p = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap A_3}(A_4) = \frac{4}{52}\times\frac{3}{51}\times\frac{2}{50}\times\frac{1}{49}.$$

Exemple (Tirage sans remise de n boules)
Une urne contient n boules blanches et n boules noires, toutes indiscernables.
On tire successivement et sans remise n boules dans cette urne.
Calculer la probabilité de l'événement E : "on tire au moins une boule blanche".

1. **Première méthode** : On assimile l'expérience à des tirages simultanés et on compte les combinaisons de n boules parmi $2n$. L'univers Ω est donc l'ensemble des parties à n éléments d'un ensemble à $2n$ éléments, et

$$\#\Omega = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

L'événement contraire $\overline{E}$ ("on tire n boules noires") est alors un événement élémentaire : c'est la partie composée des n boules noires.
D'où par équiprobabilité $\mathbb{P}(\overline{E}) = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$, et donc

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{1}{\binom{2n}{n}} = 1 - \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

2. **Seconde méthode** : On tient compte de l'ordre des tirages.
   On note alors A_k l'événement : "la k^e boule est noire". On a

$$\overline{E} = \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

   Or $\mathbb{P}(A_1) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k) = \frac{n-(k-1)}{2n-(k-1)}$ d'où, par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \cdots \times \frac{1}{n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

   et on retrouve bien

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

4) Formule des probabilités totales

Proposition 23 (Formule des probabilités totales).
Soit $(E_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements (I fini ou dénombrable).

. . . .

(i) *Pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap E_i)$* .

. . . .

(ii) *Si de plus $\mathbb{P}(E_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$, alors $\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}_{E_i}(A) \times \mathbb{P}(E_i)$* .

. . . .

Preuve : Vu que $(E_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements de Ω, on a $\Omega = \bigcup_{i\in I} E_i$.
Ainsi $A = A \cap \Omega = \bigcup_{i\in I} (A \cap E_i)$ (et cette réunion est disjointe), d'où par additivité :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap E_i)$$

et si de plus les $\mathbb{P}(E_i)$ sont non nulles, ceci se réécrit :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \frac{\mathbb{P}(A \cap E_i)}{\mathbb{P}(E_i)} \times \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}_{E_i}(A) \times \mathbb{P}(E_i),$$

$\square$

Remarque (Interprétation sur un arbre)
Ce théorème correspond simplement au fait de calculer une probabilité par une disjonction de cas pertinente !
De manière équivalente, il dit dans le cas fini que la probabilité d'un événement A dans un arbre est la somme des probabilités des chemins qui mènent à A.

Dessin :

Corollaire 24 (Formules de Bayes).
Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

(i) *Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$* .

(ii) *Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements tel que $\forall i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$,* *alors pour tout $j \in I$, on a $\mathbb{P}_B(A_j) = \dfrac{\mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}{\sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}$* .

Preuve :

(i) $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ vu que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

(ii) S'obtient à partir de la relation précédente en écrivant $\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)$ d'après la formule des probabilités totales.

$\square$

Exemple (Faux négatifs / faux positifs)
Dans une population, on note $p \in [0;1]$ la proportion d'individus atteints du VIH.
On tire un individu au hasard et on lui fait passer un test de séropositivité.
Il arrive que le test donne de faux résultats :

- si l'individu est séropositif (malade), la probabilité que le test donne un résultat négatif ("faux-négatif") est notée p_1.
- si l'individu est séronégatif (sain), la probabilité que le test donne un résultat positif ("faux-positif") est notée p_2.

Bien entendu, p_1 et p_2 sont proches de 0, mais on va voir que si p est également proche de 0, il va y avoir une dissymétrie dans l'interprétation des résultats du test.

1. Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que l'individu soit réellement séropositif ?
2. Sachant que le test est négatif, quelle est la probabilité que l'individu soit réellement séronégatif ?
3. Application : pour les tests dits "de 4^e génération", on dispose des données suivantes (source 2018) :

$$p_1 = 10^{-3}, \qquad p_2 = 5 \times 10^{-3}$$

(soit 1 faux-négatif pour 1000 et 5 faux-positifs pour 1000).
Comparer les deux probabilités précédentes si on suppose $p = 10^{-4}$. Interpréter.

Notons les événements :

- S^+ : individu séropositif
- S^- : individu séronégatif
- T^+ : test positif
- T^- : test négatif.

Ainsi si l'on peut légitimement avoir des doutes lorsque le test est positif, on a par contre une très grande fiabilité lorsqu'il est négatif. On se passe donc en pratique d'un deuxième test lorsque le premier est négatif, mais il faut absolument poursuivre les investigations lorsqu'il est positif.

V Indépendance

On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ (fini ou dénombrable).

1) Indépendance d'un couple d'événements

Définition 25 (Indépendance de deux événements).
On dit que deux événements A et B sont **indépendants** *lorsque*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Explication : Lorsque $\mathbb{P}(B) \neq 0$, cela revient à dire $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(A)$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A)$ ne dépend pas de la réalisation ou non de l'événement B.
Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors cela revient aussi à $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$.
Et si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0$, alors les événements ne se réalisent (presque) jamais, et sont bien indépendants au sens de la définition donnée.

ATTENTION !

L'indépendance n'a rien à voir avec la notion d'incompatibilité !

Si A et B sont incompatibles et de probabilité non nulle, alors ils ne sont pas indépendants.

En effet,

C'est normal ! La réalisation de l'un (A) empêche l'autre (B), alors que B n'est pas impossible vu qu'il a une probabilité non nulle.

Exemple (Lancer consécutif de deux dés non pipés)

- L'événement E_2 : "le deuxième dé donne un multiple (entier) du premier dé" n'est pas indépendant de l'événement F : "le premier dé donne 2".
  En effet, on a $E_2 = \big\{(1,b),\ b \in \{1,\dots,6\}\big\} \cup \{(2,2),(2,4),(2,6)\} \cup \{(3,3),(3,6)\} \cup \big\{(a,a),\ a \in \{4,5,6\}\big\}$, d'où $\mathbb{P}(E_2) = \dfrac{6+3+2+3}{36} = \dfrac{14}{36} = \dfrac{7}{18}$.
  Si on regarde maintenant l'événement F : "le premier dé donne 2", on a $\mathbb{P}(F) = \dfrac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(F \cap E_2) = \dfrac{3}{36} \neq \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}(E_2) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{7}{18}$.

- L'événement S_6 : "la somme des deux lancers vaut 6" n'est pas indépendant de l'événement F : "le premier dé donne 2".
  C'est intuitivement clair car le résultat du premier lancer influe sur la réalisation de S_6 : si le premier dé donne 6, l'événement S_6 ne peut plus survenir.
  Par le calcul : $\mathbb{P}(S_6 \cap F) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(S_6)\mathbb{P}(F) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{6}$.

- Par contre l'événement S_7 est indépendant de F : intuitivement car le résultat du premier lancer ne change pas la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 ensuite.
  Par le calcul : $\mathbb{P}(S_7 \cap F) = \frac{1}{36}$ et $\mathbb{P}(S_7)\mathbb{P}(F) = \frac{6}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Remarque
Un événement A est indépendant de lui-même ssi $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$, c'est-à-dire ssi $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Proposition 26 (Indépendance et complémentaire).
Soient A et B deux événements. Alors on a **équivalence** *entre :*

(i) A *et* B *sont indépendants.*
(ii) A *et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*
(iii) $\overline{A}$ *et* B *sont indépendants.*
(iv) $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*

Preuve : On voit l'idée sur $(i) \implies (ii)$: on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ par hypothèse. Or $E = A \cup \overline{A}$ donc $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \big(1 - \mathbb{P}(A)\big)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)$.

$\square$

2) Famille d'événements mutuellement indépendants

Définition 27 (Evénements mutuellement indépendants).
On dit que les événements d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ (finie ou dénombrable) sont **mutuellement indépendants** *lorsque pour toute partie* **finie** *J de I :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Exemple

- Deux événements sont indépendantes ssi ils forment un couple d'événements mutuellement indépendants.
- Les éléments A, B et C d'une famille de trois événements (A, B, C) sont mutuellement indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

ATTENTION !

Si les $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants, **alors** il sont indépendants deux à deux.
Mais la réciproque est fausse !

Exemple (Trois lancers successifs d'une pièce)

On effectue trois lancers successifs d'une pièce équilibrée. On considère les événements :
A : "le premier lancer donne *Face*".
B : "le deuxième lancer donne *Face*".
C : "les trois lancers donnent tous *Face* ou tous *Pile*".
Ces événements sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.
En effet,

ATTENTION !
Si $(A_1, \cdots, A_n)$ est une famille finie d'événements, alors :

- c'est **l'incompatibilité deux à deux des** A_i qui permet d'écrire :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

- c'est **l'indépendance mutuelle des** A_i qui permet d'écrire :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Attention à ne pas confondre !

Proposition 28 (Indépendance mutuelle d'une sous-famille).
Toute sous-famille d'une famille d'événements mutuellement indépendants est elle-même constituée d'événements mutuellement indépendants.

Preuve : Evident d'après la définition de l'indépendance mutuelle. □

Proposition 29 (Indépendance mutuelle et complémentaires).
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. Pour chaque $i \in I$, on pose $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$. Si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants, alors la famille $(B_i)_{i\in I}$ aussi.

Preuve : La définition de l'indépendance mutuelle permet de se ramener à des familles finies, et donc d'envisager un raisonnement par récurrence. Ensuite c'est moralement du même niveau que pour les familles à 2 éléments, cas déjà traité plus tôt. □

Exemple
Si (A, B, C) sont mutuellement indépendants, alors $(A, \overline{B}, C)$, $(\overline{A}, \overline{B}, C)$, etc. aussi.

3) Exemple de construction de probabilité à partir de l'indépendance

Exemple (Lancers successifs de dés avec condition d'arrêt)
On lance un dé jusqu'à l'apparition d'un 6, et on note les résultats au fur et à mesure des lancers.

1. Proposer un univers Ω qui modélise cette expérience aléatoire.
   Est-il fini ? dénombrable ?
2. Montrer que l'on peut **définir une probabilité** $\mathbb{P}$ sur Ω à partir des deux hypothèses suivantes :
   - les résultats des lancers successifs sont **mutuellement indépendants**,
   - à chaque lancer, on a **équiprobabilité** sur $\{1, \cdots, 6\}$.

1. Prenons comme univers :
   $\Omega = \{$ listes finies $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_1, \cdots, a_{n-1} \leq 5$ et $a_n = 6\}$.
   Ω est un ensemble infini **dénombrable.**
   En effet : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
   $$\Omega_n = \{ \text{ n-listes } (a_1, a_2, \cdots, a_n),\ 1 \leq a_1, \cdots, a_{n-1} \leq 5 \text{ et } a_n = 6\}.$$
   On a $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n$, et chaque ensemble Ω_n est fini :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \# \Omega_n = 5^{n-1},$$
   donc Ω est une réunion dénombrable d'ensembles finis, il est donc dénombrable.

2. En notant A_i : "le i^e lancer donne a_i" pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, l'indépendance mutuelle supposée des A_i donne :
   $$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_n).$$
   Comme $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{1}{6}$ (toujours par hypothèse), on en déduit **la probabilité de tout événement élémentaire** :
   $$\mathbb{P}(\{(a_1, \cdots, a_n)\}) = \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \frac{1}{6^n}.$$
   On est donc amené à poser $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{6^n}$ pour toute suite $\omega = (a_1, \cdots, a_n)$ de longueur n de Ω.

Vérifions alors que l'on a bien défini ainsi une probabilité sur Ω :

- Pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) \geq 0$.
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  En effet, pour tout $n \geq 1$, il y a 5^{n-1} listes $\omega \in \Omega$ de longueur n, chacune étant de probabilité $\frac{1}{6^n}$. Donc, par additivité :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} 5^{n-1} \times \frac{1}{6^n} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - 5/6} = 1.$$