Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 7
Réduction des endomorphismes : trigonalisation et compléments

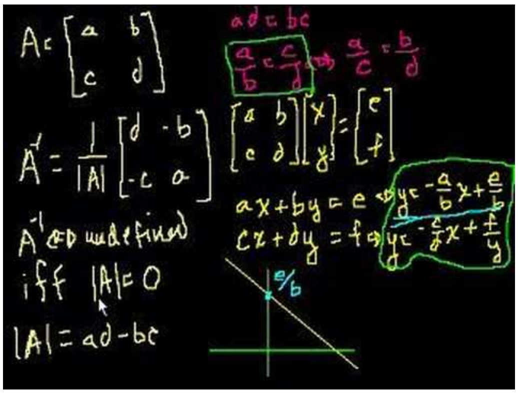

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Endomorphismes/matrices trigonalisables

1) Définition

Définition 1 (Endomorphisme trigonalisable).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit ***trigonalisable*** *s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire .*

Vocabulaire
Trigonaliser l'endomorphisme f signifie trouver une telle base de E, appelée **base de trigonalisation** de f.

Remarque

- Tout endomorphisme diagonalisable est trigonalisable, mais la réciproque est fausse.
- Si f est trigonalisable, on peut toujours se ramener (quitte à permuter les vecteurs de la base) à une matrice **triangulaire supérieure** (ou inférieure, c'est comme on veut).

Exemple
Montrer que l'endomorphisme $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} ix+(1+i)y \\ iy \end{pmatrix} \end{array} \right.$ est trigonalisable, mais pas diagonalisable.

En effet, dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ (notée $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$), la matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

elle est triangulaire. Ceci montre que f est trigonalisable.
Par contre, si f était diagonalisable, la matrice A le serait aussi, et puisque $sp(A) = \{i\}$, on aurait A semblable à iI_2, ce qui est impossible (puisqu'on a $P^{-1}(iI_2)P = iI_2 \neq A$ pour toute matrice P inversible). Donc f n'est pas diagonalisable.

Définition 2 (Matrice trigonalisable).
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** *si elle est*
semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$
telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire .

Remarque

- Trigonaliser la matrice A, c'est donner explicitement une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire. Bien entendu, **les colonnes de P représentent une base de trigonalisation** de l'endomorphisme $f : V \mapsto AV$ canoniquement associé à A.
- Evidemment toute matrice triangulaire est trigonalisable, et la réciproque est fausse.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$A \text{ trigonalisable } \iff \text{ l'endomorphisme } f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ V & \longmapsto & AV \end{array} \right. \text{ est trigonalisable.}$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une quelconque base de E, alors

$$f \text{ trigonalisable } \iff Mat_{\mathcal{B}}(f) \text{ est trigonalisable.}$$

2) Théorème de trigonalisation et conséquences

Théorème 3 (Théorème de trigonalisation).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :
f est trigonalisable $\iff$ *le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$* .

Rappel
Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit **scindé** sur $\mathbb{K}$ s'il s'écrit comme le produit de polynômes de degré 1 (pas nécessairement distincts) de $\mathbb{K}[X]$.

Preuve :

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Facile car si f est trigonalisable, f se représente par une matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$ dans une certaine base $\mathcal{B}$.

  On a donc $\chi_f(X) = \det(XI_n - T) = \prod_{k=1}^{n} (X - a_{k,k}) \in \mathbb{K}[X]$, ce qui prouve que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ (attention, pas nécessairement à racines simples !).

- $\boxed{\Longleftarrow}$ Plus difficile, on procède par récurrence sur $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$.

* Pour $n = 1$, le résultat est évident car en dimension 1, tout endomorphisme se représente par une matrice 1×1, qui est évidemment triangulaire !
* Soit $n \geq 1$. Supposons qu'en dimension n, tout endomorphisme ayant son polynôme caractéristique scindé soit trigonalisable, et montrons que ceci reste vrai en dimension $n+1$.
  Soit donc E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. On va montrer que f est trigonalisable.
  Puisque χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, f possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Notons $e \in E$ un vecteur propre associé, et complétons (e) en une base $\mathcal{B} = (e, e_2, \cdots, e_{n+1})$ de E. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}), \qquad A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

  Exprimons alors χ_f : en développant par rapport à C_1, on obtient

$$\chi_f(X) = \det(XI_{n+1} - A) = (X - \lambda) \times \det(XI_n - A_1) = (X - \lambda)\chi_{A_1}(X).$$

  Puisque χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, son diviseur χ_{A_1} est aussi scindé sur $\mathbb{K}$. Par hypothèse de récurrence, la matrice A_1 est donc trigonalisable (car elle représente un endomorphisme en dimension n dont le polynôme caractéristique est scindé).

D'où l'existence d'une matrice $P_1 \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P_1^{-1} A_1 P_1 = T_1$ soit triangulaire supérieure.

On conclut en posant $P = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$: on a $P \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ (puisque $\det(P) = 1 \times \det(P_1) \neq 0$), et

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_1^{-1} A_1 P_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right). \end{aligned}$$

Cette matrice est bien triangulaire supérieure, ce qui montre que A est trigonalisable, et donc f aussi.

$\square$

Remarque (A retenir)
Si $\boldsymbol{f}$ est trigonalisable, et si T est une matrice triangulaire représentant f, alors

- les éléments diagonaux de T sont exactement **les valeurs propres de $\boldsymbol{f}$**.
- chaque valeur propre apparaît sur la diagonale de T **autant de fois que sa multiplicité**.

Mais à l'inverse de la diagonalisation, **la matrice $\boldsymbol{T}$ n'est pas unique** (même à l'ordre des facteurs diagonaux près), à cause des éléments non diagonaux de T.

Corollaire 4 (Cas complexe / cas réel).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.*

(ii) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$* **ayant toutes ses valeurs propres dans R** *est trigonalisable.*

Preuve :

(i) On a $\chi_f \in \mathbb{C}[X]$ et χ_f non constant, donc χ_f est scindé sur $\mathbb{C}$, et on en déduit par le théorème 3 que f est trigonalisable.

(ii) Ici, $\chi_f \in \mathbb{R}[X]$ et par hypothèse, toutes les racines de χ_f sont réelles. On a donc la factorisation $\chi_f(X) = \prod_{\lambda \in sp(f)} (X-\lambda)^{\alpha_\lambda}$, où chaque valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$

a pour multiplicité $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$. D'où χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne par le théorème 3 que f est trigonalisable.

$\square$

Corollaire 5 (Trigonalisation des matrices carrées).

(i) *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.*

(ii) *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable* **dans C***, i.e. il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).*

(iii) *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$* **telle que $\boldsymbol{\chi_A}$ est scindé sur R** *est trigonalisable* **dans R***, c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).*

Preuve : Il suffit d'appliquer le corollaire précédent à l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ V & \longmapsto & AV \end{array} \right. ,$$

et cela montre (i) et (iii). Pour le point (ii), il suffit de considérer A comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ et on se ramène à (i). $\square$

Corollaire 6 (Lien entre trace, déterminant et valeurs propres).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de f **(pas nécessairement distinctes, mais comptées avec multiplicité)** .

Alors, on a $tr(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ *et* $\det(f) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Preuve : Puisque χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, l'endomorphisme f est trigonalisable, donc il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $T = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure, avec pour éléments diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.
Donc, par définition de la trace et du déterminant d'un endomorphisme (qui ne dépendent pas de la base de représentation) :

$$tr(f) = tr(T) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k, \quad det(f) = det(T) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

□

Corollaire 7 (Lien entre trace, dét. et valeurs propres d'une matrice).
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

(i) *La trace de A est la somme de ses valeurs propres (***comptées avec multiplicité***).*

(ii) *Le déterminant de A est le produit de ses valeurs propres (***comptées avec multiplicité***).*

Ces résultats sont aussi valables pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant toutes ses valeurs propres réelles.

Preuve : Evident en raisonnant sur l'endomorphisme canoniquement associé à A et en appliquant le corollaire 6. □

ATTENTION !
Les valeurs propres de multiplicité ≥ 2 "comptent plusieurs fois" dans le calcul de la trace et du déterminant.

Exemple
En dimension 3, si $\chi_f(X) = (X-1)(X-3)^2$, alors on a

$$tr(f) = 1 + 3 + 3 = 7, \qquad \det(f) = 1 \times 3 \times 3 = 9.$$

ATTENTION !
Dans les cas où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède des valeurs propres complexes non réelles, il faut tenir compte de ces valeurs propres dans le calcul de la trace et du déterminant.

Exemple (Encore la matrice de rotation)

On fixe un réel θ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
Etablir un lien entre sa trace et ses valeurs propres.
On a $tr(A) = 1 + 2\cos(\theta)$, et

$$\chi_A(X) = (X-1)(X^2 - 2\cos(\theta)X + 1) = (X-1)(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}).$$

Dans $\mathbb{C}$, la somme des trois valeurs propres est bien égale à la trace :

$$1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 1 + 2\cos(\theta).$$

3) Trigonalisation en dimension 2

Méthode (Trigonalisation en dimension 2)
Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que A est **trigonalisable** dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ mais **non diagonalisable**.
En notant $f : V \mapsto AV$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à A, on a donc

$$\chi_f(X) = (X-\lambda)^2, \quad \dim(E_\lambda(f)) = 1.$$

- On détermine une base (u_1) de $E_\lambda(f)$. On a donc $f(u_1) = \lambda u_1$.
- On complète en une base $\mathcal{B} := (u_1, u_2)$ de $\mathbb{K}^2$.

  La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est alors de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

  Vu que cette matrice est semblable à A, on a $tr(T) = tr(A) = 2\lambda$, et donc

  $$T = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

  On a donc trigonalisé A, puisque T est triangulaire et semblable à A : en effet, on a $T = P^{-1}AP$, où P est la matrice de passage dont les colonnes sont les coordonnées de u_1 et u_2 dans la base canonique.

ATTENTION !
u_1 est un vecteur propre de f, mais pas u_2 !

Remarque (Choix optimal de u_2)
On peut **"optimiser" le choix du vecteur u_2**, afin d'obtenir une base $\mathcal{B} := (u_1, u_2)$ dans laquelle la matrice de f est

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Il suffit pour cela de prendre u_2 tel que

$$f(u_2) = u_1 + \lambda u_2$$

(et c'est toujours possible, c'est l'objet d'une théorie plus poussée appelée la "réduction de Jordan").
En pratique, le calcul d'un tel vecteur u_2 est simple (système linéaire avec second membre à résoudre) : en notant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de u_2 dans la base canonique de $\mathbb{K}^2$, et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ celles de u_1, on a

$$f(u_2) = u_1 + \lambda u_2 \iff (f - \lambda Id)(u_2) = u_1 \iff (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

4) Trigonalisation en dimension 3

Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. On suppose que A est **trigonalisable** dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ mais **non diagonalisable**.

En notant $f : V \mapsto AV$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à A, on a donc deux cas possibles :

a) $\chi_f(X) = (X - \alpha)(X - \beta)^2$ avec $\alpha \neq \beta$, et $\dim(E_\alpha(f)) = \dim(E_\beta(f)) = 1$.

b) $\chi_f(X) = (X - \alpha)^3$ avec $\dim(E_\alpha(f)) = 1$ ou 2 .

a) Trigonalisation avec une valeur propre simple et une double

On suppose que $\chi_f(X) = (X - \alpha)(X - \beta)^2$ avec $\alpha \neq \beta$ et les sous-espaces propres vérifient :

$$\dim(E_\alpha(f)) = \dim(E_\beta(f)) = 1.$$

Méthode

- On détermine une base (u_1) de $E_\alpha(f)$ et une base (u_2) de $E_\beta(f)$.
  Puisque les deux espaces propres sont en somme directe, (u_1, u_2) est une famille libre de $\mathbb{K}^3$.
- On peut la compléter en une base $\mathcal{B} := (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{K}^3$.
  Puisque $f(u_1) = \alpha u_1$ et $f(u_2) = \beta u_2$, on a

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

- Pour des raisons de trace ($tr(T) = tr(A) = \alpha + 2\beta$), on a nécessairement :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

On a bien trigonalisé A, puisque T est semblable à A et que T est triangulaire.

Remarque (Choix optimal de u_3)
On peut en fait trigonaliser "mieux que ça" et montrer que A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Pour cela, il suffit de choisir u_3 tel que

$$f(u_3) = u_2 + \beta u_3.$$

,
plutôt que de compléter (u_1, u_2) "au hasard", et la théorie assure que c'est toujours possible dans ce cas.

b) Trigonalisation avec une valeur propre triple (HP)

La situation est plus complexe. Les résultats qui suivent sont hors-programme.
On suppose que $\chi_f(X) = (X - \alpha)^3$ avec $\dim(E_\alpha(f)) \in \{1; 2\}$.

Méthode

- Si $\underline{\dim(E_\alpha(f)) = 2}$, alors la situation est similaire au cas a) : on ne dispose que de **deux** vecteurs propres libres (u_1, u_2).

  On montre que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, en construisant une base (u_1, u_2, u_3) telle que $\begin{cases} f(u_1) = \alpha u_1 \\ f(u_2) = \alpha u_2 \\ f(u_3) = u_2 + \alpha u_3 \end{cases}$.

- Si $\dim(E_\alpha(f)) = 1$, alors c'est encore plus compliqué : on ne dispose que d'**un seul** vecteur propre u_1 libre (puisque E_α est une droite, tous les vecteurs propres sont colinéaires entre eux).

  Cette fois-ci, on montre que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, en construisant une base (u_1, u_2, u_3) telle que $\begin{cases} f(u_1) = \alpha u_1 \\ f(u_2) = u_1 + \alpha u_2 \\ f(u_3) = u_2 + \alpha u_3 \end{cases}$.

ATTENTION !
Dans chacun des deux cas, la construction d'une telle base peut être subtile (il ne suffit pas de compléter "au hasard" la famille libre de vecteurs propres).
De toute façon, si la situation se présente, cette construction sera guidée.

II Applications de la réduction des endomorphismes

1) Calcul des puissances d'une matrice

Méthode (Calcul de puissance)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour calculer explicitement A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut :

- Diagonaliser ou trigonaliser A : on trouve ainsi une matrice B diagonale ou triangulaire telle que $B = P^{-1}AP$.
- Calculer les puissances de B :
  - * si elle est diagonale, c'est trivial :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

  - * si elle est seulement triangulaire, on se débrouille autrement (récurrence, ou formule du binôme, ou utilisation d'un polynôme annulateur).
- Grâce à la formule $B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$, on obtient $\boxed{A^k = PB^kP^{-1}}$.

Remarque (Cas initial)
On rappelle la convention $A^0 = I_n$, pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple

Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

$\chi_A(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. On a $E_1(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_2(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} := D.$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix},$$

puis

$$A^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^k+1 & 2^k-1 \\ 2^k-1 & 2^k+1 \end{pmatrix}.$$

2) Suites définies par récurrence linéaire

a) Suites définies par récurrence linéaire d'ordre 2

On envisage des suites $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant une relation du type

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad .$$

On peut obtenir **une expression directe du terme général $\boldsymbol{u_n}$** d'une telle suite (en fonction de n), en se ramenant à un calcul de puissance de matrice :

Proposition 8 (Réécriture matricielle).
Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Alors, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$ *où* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$.

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ au_{n+1} + bu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n.$$

On en déduit par une récurrence facile que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^n X_0,$$

ce qui donne la relation voulue.

$\square$

Pour calculer le terme général u_n, il suffit donc de connaître u_0 et u_1 et de calculer A^n en diagonalisant ou trigonalisant la matrice A.

On obtient ainsi le résultat suivant (déjà vu en TSI 1) :

Théorème 9 (Expression des suites vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$).
Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On suppose que $b \neq 0$.

(*i*) *Si l'équation* $x^2 - ax - b = 0$ *a* **deux racines distinctes** $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, *alors :*

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha(\lambda_1)^n + \beta(\lambda_2)^n.$$

(*ii*) *Si l'équation* $x^2 - ax - b = 0$ *a une* **racine double** $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, *alors* $\lambda_0 \neq 0$ *et :*

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha(\lambda_0)^n + \beta n(\lambda_0)^{n-1}.$$

(*iii*) *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et si l'équation* $x^2 - ax - b = 0$ *n'a* **pas de racine** *dans* $\mathbb{R}$, *alors en notant les racines complexes* $(\rho e^{i\theta}, \rho e^{-i\theta})$ *avec* $\rho > 0$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *:*

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)).$$

Remarque
Dans le cas de la racine double, on peut (quitte à renommer la constante β) réécrire u_n sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\alpha + \beta n)\lambda_0^n.$$

Preuve : Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$. D'après la proposition précédente, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Procédons alors à la réduction de A :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -b & X-a \end{vmatrix} = X^2 - aX - b.$$

Les valeurs propres de A correspondent donc aux racines de l'équation $x^2 - ax - b = 0$.

(*i*) Si cette équation possède deux racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ alors A est diagonalisable (puisqu'elle possède deux valeurs propres distinctes), donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$.
On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

d'où (en calculant la première ligne de ce produit matriciel)

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\quad \forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n.$$

(ii) Si cette équation possède une racine double $\lambda_0\in\mathbb{K}$, alors A n'est pas diagonalisable (sinon A serait semblable à $\lambda_0 I_2$, ce qui n'est possible que si $A=\lambda_0 I_2$, et ce n'est pas le cas). D'après la trigonalisation en dimension 2, A est donc semblable à : $\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$. De plus, on a $\lambda_0\neq 0$ sinon $b=0$ (exclu).

Il existe donc $P\in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $A=P\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}P^{-1}$.

On en déduit par récurrence simple :

$$\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\lambda_0^n & n\lambda_0^{n-1}\\ 0 & \lambda_0^n\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix},$$

d'où (en calculant la première ligne de ce produit matriciel)

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\quad \forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=\alpha\lambda_0^n+\beta n\lambda_0^{n-1}.$$

(iii) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et cette équation n'a pas de racines réelles, alors on travaille dans $\mathbb{C}$: en notant $\lambda_1=\rho e^{i\theta}\notin\mathbb{R}$ et $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$ les deux racines, donc les deux valeurs propres complexes de A (conjuguées car $\chi_A(X)$ est à coefficients réels), on obtient (en utilisant le premier cas)

$$\exists(\gamma,\delta)\in\mathbb{C}^2,\quad \forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=\gamma\lambda_1^n+\delta\overline{\lambda_1}^n=\rho^n\left(\gamma e^{in\theta}+\delta e^{-in\theta}\right).$$

Mais $u_n\in\mathbb{R}$, donc on a nécessairement $\delta=\overline{\gamma}$, d'où

$$\exists\gamma\in\mathbb{C},\quad \forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=\rho^n\left(\gamma e^{in\theta}+\overline{\gamma}e^{-in\theta}\right)=\rho^n\Re(2\gamma e^{in\theta}),$$

c'est-à-dire

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=\rho^n\left(\alpha\cos(n\theta)+\beta\sin(n\theta)\right).$$

□

Vocabulaire
L'équation $x^2-ax-b=0$ est appelée **équation caractéristique** associée à la relation de récurrence $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$.
La démonstration du théorème précédent montre que le polynôme x^2-ax-b est le polynôme caractéristique de la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1\\b&a\end{pmatrix}$, ce qui justifie le nom.

Corollaire 10 (Structure algébrique des suites t.q. $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$).
Soient $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ avec $b\neq 0$. Alors l'ensemble

$$F_{a,b}=\{\ \textit{suites } (u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \textit{ telles que } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n\ \}$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Preuve : Dans chacun des trois cas, le théorème 9. donne une famille génératrice de $F_{a,b}$, formée de deux suites, ce qui montre que $F_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Il ne reste plus qu'à montrer que cette famille est libre pour obtenir $\dim(F_{a,b})=2$.

(i) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et l'équation caractéristique $x^2-ax-b=0$ a deux racines distinctes $\lambda_1\neq\lambda_2$: on a

$$F_{a,b}=Vect_{\mathbb{K}}((\lambda_1^n);(\lambda_2^n)),$$

et la famille $((\lambda_1^n);(\lambda_2^n))$ est libre car si

$$\alpha(\lambda_1^n)+\beta(\lambda_2^n)=0,$$

alors en évaluant en $n=0$ et $n=1$, on obtient le système :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \lambda_1\alpha+\lambda_2\beta=0\end{cases}\iff\begin{cases}\beta=-\alpha\\ \underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{\neq 0}\alpha=0\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}.$$

(ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$ a une racine double $\lambda_0 \neq 0$: on a

$$F_{a,b} = Vect_{\mathbb{K}}((\lambda_0^n); (n\lambda_0^{n-1})),$$

et la famille $((\lambda_0^n); (n\lambda_0^{n-1}))$ est libre car si

$$\alpha(\lambda_0^n) + \beta(n\lambda_0^{n-1}) = 0,$$

alors en évaluant en $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda_0\alpha + \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$ n'a pas de racine réelle : on a, en notant les racines complexes $\rho e^{\pm i\theta}$:

$$F_{a,b} = Vect_{\mathbb{R}}((\rho^n \cos(n\theta)), (\rho^n \sin(n\theta))),$$

et la famille $((\rho^n \cos(n\theta)), (\rho^n \sin(n\theta)))$ est libre car si

$$\alpha(\rho^n \cos(n\theta)) + \beta(\rho^n \sin(n\theta)) = 0,$$

alors en évaluant en $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \rho(\alpha\cos(\theta) + \beta\sin(\theta)) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta\rho\sin(\theta) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases},$$

car $\rho\sin(\theta) \neq 0$ (puisque c'est la partie imaginaire des racines, qui sont non réelles dans ce cas).

$\square$

b) Généralisation en dimension supérieure

En procédant de façon analogue, nous pouvons calculer le terme général d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence linéaire d'ordre $k \geq 3$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n,$$

où $(a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}) \in \mathbb{K}^k$, en ramenant le problème à une puissance de matrice.

En effet, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+k-2} \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \\ u_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \\ a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & & a_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+k-2} \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce qui amène par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0,$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix}$$

Exemple
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$(u_0, u_1, u_2) = (0, 1, 3), \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = -2u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n.$$

Calculer u_n en fonction de n.
En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = AX_n,$$

Donc par récurrence $X_n = A^n X_0$. Pour calculer A^n :
Il est facile de voir que A possède 3 valeurs propres distinctes : $1, -1, -2$, donc elle est diagonalisable et il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Il s'ensuit :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

donc (en calculant la première ligne de ce produit matriciel) :

$$\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma(-2)^n.$$

On termine en calculant les constantes à l'aide des C.I. :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha-\beta-2\gamma = 1 \\ \alpha+\beta+4\gamma = 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ -2\beta-3\gamma = 1 \\ 3\gamma = 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \gamma = 1 \\ \beta = -2 \\ \alpha = 1 \end{array}\right. .$$

Finalement, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 - 2(-1)^n + (-2)^n.$$