Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 5
Intégration sur un segment

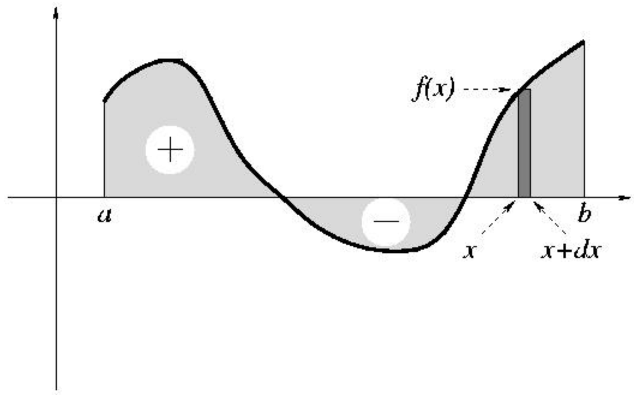

Table des matières

L'intégrale des fonctions continues sur un segment de $\mathbb{R}$ est une notion déjà étudiée en première année. Le but est ici d'étendre cette opération à des fonctions un peu plus générales (les fonctions dites «continues par morceaux»), mais également aux fonctions à valeurs complexes. Ce chapitre est aussi l'occasion de rappeler (sans démonstration) les propriétés les plus importantes de l'intégrale ainsi que les différentes techniques de calcul. La notion d'intégrale sera encore généralisée au chapitre suivant, cette fois-ci en remplaçant les segments par des intervalles quelconques.

I Construction de l'intégrale

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

1) Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux

On commence par présenter les différents types de fonctions que nous allons rencontrer. Ces fonctions ne sont pas nécessairement continues, ce qui conduit à découper le segment $[a;b]$ selon leurs points de discontinuité.

Définition 1 (Subdivision d'un segment).
On appelle **subdivision** *du segment $[a;b]$ une suite finie $(a_0, \dots, a_n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$.*

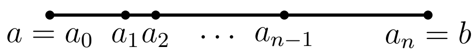

FIGURE 1 – Une subdivision du segment $[a;b]$

Remarque
L'ensemble $\{a_0, \cdots, a_n\}$ est une partie finie de $[a;b]$, de cardinal $n+1$. On appellera cet ensemble le **support** de la subdivision $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$.

Définition 2 (Fonction en escalier).
Une fonction $\varphi : [a;b] \to \mathbb{K}$ est dite **en escalier** *s'il existe une subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ du segment $[a;b]$ telle que pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, la restriction $\varphi_{|]a_i;a_{i+1}[}$ est constante .*

Remarque
- Dans ces conditions, on dit que $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une **subdivision adaptée à $\boldsymbol{\varphi}$**.
- Une fonction en escalier est une fonction «constante par morceaux».
- Pour une fonction en escalier φ, les valeurs $(\varphi(a_i))_{0 \leq i \leq n}$ n'ont aucune importance (elles n'interviennent pas dans la définition).

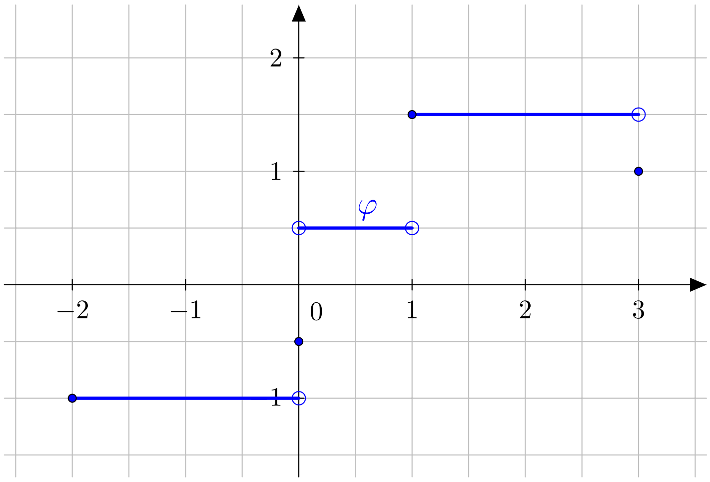

FIGURE 2 – Une fonction en escalier $\varphi : [-2; 3] \to \mathbb{R}$.

Définition 3 (Fonction continue par morceaux).
Une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** *s'il existe*
une subdivision $(a_i)_{0 \le i \le n}$ du segment $[a; b]$ telle que pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$,
la restriction $f_{|]a_i;a_{i+1}[}$ est continue et se prolonge continûment au segment $[a_i; a_{i+1}]$.

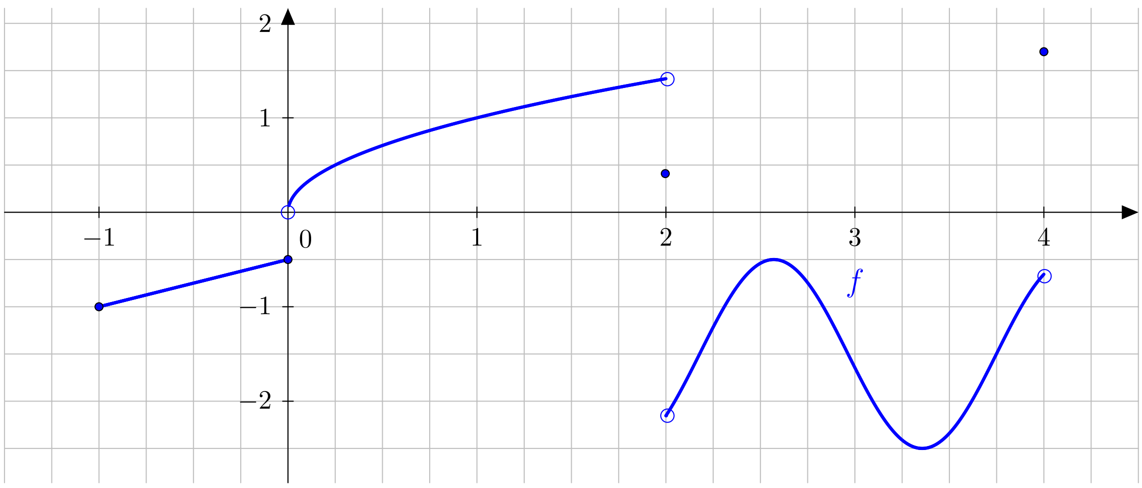

FIGURE 3 – Une fonction continue par morceaux $f : [-1; 4] \to \mathbb{R}$
.

Remarque

- On dit, là aussi, que $(a_i)_{0 \le i \le n}$ est une **subdivision adaptée à f**.
- Cela revient à dire que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction $f_{|]a_i;a_{i+1}[}$ est continue **et possède des limites finies en a_i^+ et en a_{i+1}^-**.
- Comme pour les fonctions en escalier, les valeurs aux points a_i n'ont pas d'importance pour une fonction f continue par morceaux.

ATTENTION !

Pour que f soit continue par morceaux, il ne suffit pas que les restrictions $f_{|]a_i;a_{i+1}[}$ soient continues !

Par exemple, la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0;1] \end{cases}$ **n'est pas** continue par morceaux, car elle ne possède pas de limite finie en 0^+.

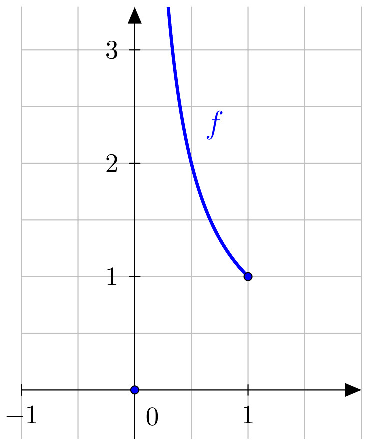

FIGURE 4 – Une fonction non continue par morceaux

Notation

On note $\mathcal{E}([a;b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a;b]$ dans $\mathbb{K}$.
On note $\mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a;b]$ dans $\mathbb{K}$.
Rappelons aussi que $\mathcal{F}([a;b], \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions de $[a;b]$ dans $\mathbb{K}$, et que $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{K}$.

Proposition 4 (Structure algébrique des ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}_M$).

(i) *On a $\mathcal{E}([a;b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{K})$* .

(ii) *Les ensembles $\mathcal{E}([a;b], \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathcal{F}([a;b], \mathbb{K})$* .

Remarque

Les espaces vectoriels $\mathcal{E}([a;b], \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{K})$ vérifient aussi les propriétés suivantes :

- ils contiennent les fonctions constantes sur $[a;b]$;
- stabilité par produit : $\begin{cases} f, g \in \mathcal{E}([a;b], \mathbb{K}) \implies f \times g \in \mathcal{E}([a;b], \mathbb{K}) \\ f, g \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{K}) \implies f \times g \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{K}) \end{cases}$;
- stabilité par passage à la valeur absolue (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), au module (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) : $\begin{cases} f \in \mathcal{E}([a;b], \mathbb{K}) \implies |f| \in \mathcal{E}([a;b], \mathbb{R}) \\ f \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{K}) \implies |f| \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{R}) \end{cases}$.

Proposition 5 (Existence de limites finies à gauche/à droite).
Si $f \in \mathcal{C}_M([a;b],\mathbb{K})$, **alors** f *possède* :

(i) *une limite finie* **à gauche et à droite** *en tout point* $x_0 \in]a;b[$ *(qui peuvent être différentes, et différentes de* $f(x_0)$*)* ;

(ii) *une limite finie* **à droite en** $\boldsymbol{a}$ *(qui peut être différente de* $f(a)$*)* ;

(iii) *une limite finie* **à gauche en** $\boldsymbol{b}$ *(qui peut être différente de* $f(b)$*)* .

Preuve : Notons $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a;b]$ adaptée à f.

- Puisque f est continue en tout point $x_0 \in [a;b]\setminus\{a_0,\cdots,a_n\}$, f possède une limite finie en ces points x_0.
- Pour tout $i \in \{0,\cdots,n-1\}$, la fonction continue $f_{|]a_i;a_{i+1}[}$ se prolonge continûment à $[a_i;a_{i+1}]$, donc f possède des limites finies en a_i^+ et a_{i+1}^-.

$\square$

Proposition 6 (Caractère borné des fonctions continues par morceaux).
Si $f \in \mathcal{C}_M([a;b],\mathbb{K})$, **alors** f *est bornée sur* $[a;b]$.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{C}_M([a;b],\mathbb{K})$ et $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f.
Pour tout $i \in \{0,\cdots,n-1\}$, le prolongement de $f_{]a_i;a_{i+1}[}$ est continu sur le segment $[a_i;a_{i+1}]$, donc est borné (et atteint ses bornes, mais on ne l'utilise pas ici). On en déduit *a fortiori* que f est bornée sur chaque $]a_i;a_{i+1}[$. Pour tout $i \in \{0,\cdots,n-1\}$, il existe donc une constante $M_i \geq 0$ telle que

$$\forall x \in]a_i;a_{i+1}[, \quad |f(x)| \leq M_i.$$

Attention, cette inégalité n'est pas nécessairement valable en $x = a_i$ (ni en $x = a_{i+1}$ d'ailleurs), puisqu'on peut avoir $\lim\limits_{x\to a_i^+} f(x) \neq f(a_i)$.

En conclusion, on a donc

$$\forall x \in [a;b], \quad |f(x)| \leq \max\left(|f(a_0)|, M_0, |f(a_1)|, M_1, \cdots, |f(a_{n-1})|, M_{n-1}, |f(a_n)|\right),$$

ce qui montre bien que f est bornée sur le segment $[a;b]$. $\square$

ATTENTION !
La réciproque de la proposition précédente est fausse : par exemple, soit :

$$f : [0;1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \in]0;1] \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} .$$

La fonction f est bornée sur $[0;1]$ (puisque $\forall x \in [0;1]$, $|f(x)| \leq 1$), mais f n'est pas continue par morceaux, car f ne possède pas de limite finie en 0^+.

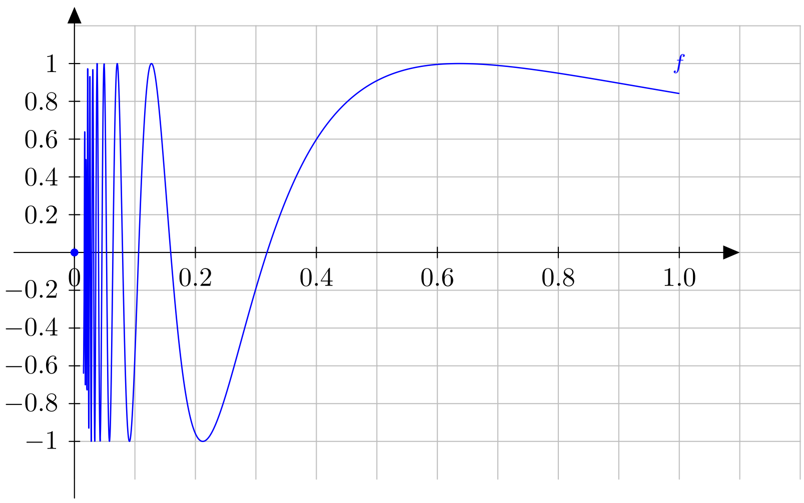

FIGURE 5 – Fonction bornée mais pas continue par morceaux

ATTENTION !
À la différence d'une fonction continue, une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ **n'atteint pas nécessairement ses bornes** !
Par exemple, la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0;1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ est continue par morceaux, mais n'atteint pas sa borne supérieure (qui est 1).

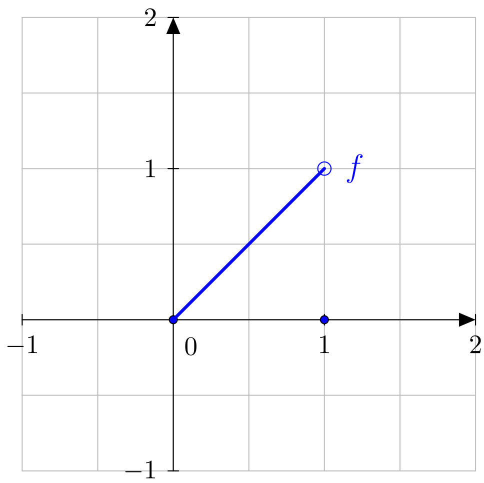

FIGURE 6 – Fonction continue par morceaux qui n'atteint pas ses bornes

2) Intégrale sur un segment d'une fonction à valeurs réelles

On va maintenant définir la notion d'intégrale d'une fonction à valeurs réelles, d'abord pour les fonctions en escalier, qui sont les objets les plus simples dans cette théorie, puis étendre cette définition aux fonctions continues par morceaux.

Définition 7 (Intégrale d'une fonction réelle en escalier).
Soit $\varphi : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et une subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ adaptée à φ. On appelle **intégrale de $\boldsymbol{\varphi}$ sur $\boldsymbol{[a;b]}$** *le nombre réel*

$$\int_{[a;b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(a_{i+1} - a_i),$$

où pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, y_i est la valeur constante de φ sur $]a_i; a_{i+1}[$.

Remarque

- L'intégrale d'une fonction réelle en escalier correspond donc à la **somme algébrique** des aires des n rectangles de base $[a_i; a_{i+1}]$ et de hauteur $|y_i|$, c'est-à-dire que certaines aires sont comptées positivement, et d'autres négativement.
- L'intégrale d'une fonction réelle en escalier ne dépend pas de ses valeurs aux points a_i de la subdivision considérée.

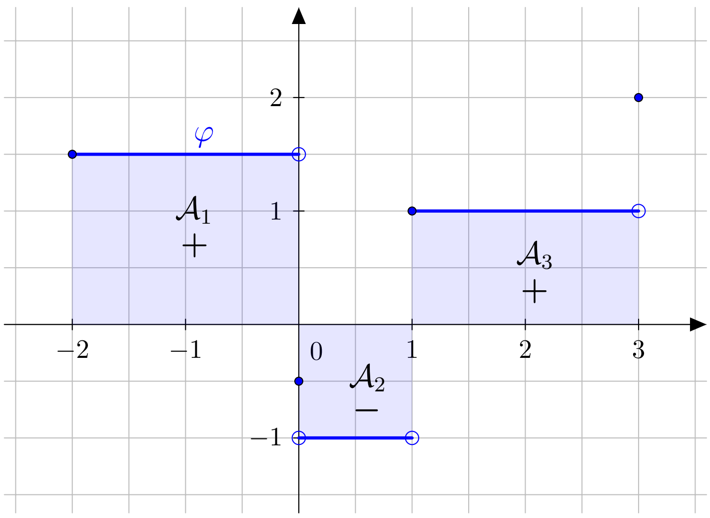

FIGURE 7 – L'intégrale de φ vaut $\displaystyle\int_{[-2;3]} \varphi = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$

ATTENTION !

On pourrait *a priori* croire que $\displaystyle\int_{[a;b]} \varphi$ dépend de la subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ que l'on a considéré, mais ce n'est pas le cas (c'est un peu fastidieux à montrer, mais pas difficile).

On définit maintenant l'intégrale d'une fonction f continue par morceaux, en donnant un sens précis à «l'aire sous sa courbe» : il s'agit de «l'aire limite» obtenue en considérant des rectangles de plus en plus étroits qui remplissent (ou qui enveloppent) le domaine situé sous le graphe de f.

On est donc amené à encadrer f par des fonctions en escalier :

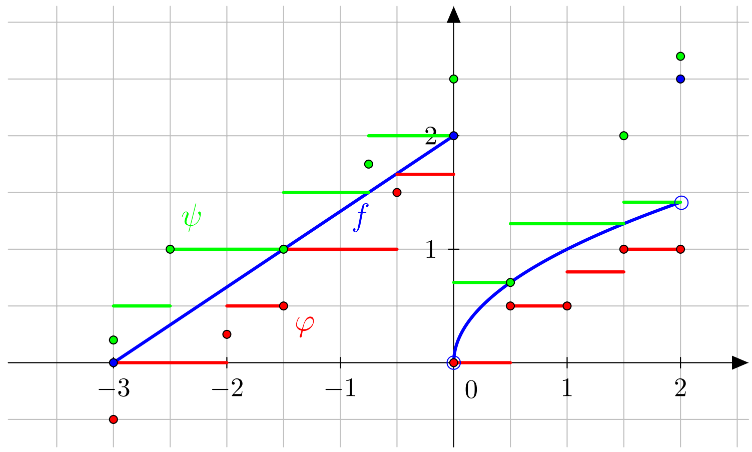

FIGURE 8 – Encadrement d'une fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier

Le résultat suivant est fondamental mais difficile à démontrer. Nous l'admettrons :

Théorème 8.
Soit $f \in \mathcal{C}_M([a;b],\mathbb{R})$. Alors, on a

$$\sup\left\{\int_{[a;b]} \varphi,\ \varphi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R}),\ \varphi \leq f\right\} = \inf\left\{\int_{[a;b]} \psi,\ \psi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R}),\ \psi \geq f\right\}.$$

Remarque
Ainsi, la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier situées sous le graphe de f est égale à la borne inférieure des intégrales de celles situées au-dessus du graphe.

De ce théorème découle la définition suivante :

Définition 9 (Intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux).
Soit $f \in \mathcal{C}_M([a;b],\mathbb{R})$. On appelle **intégrale de f sur le segment $[a;b]$ le**

nombre réel $\displaystyle\int_{[a;b]} f = \sup\left\{\int_{[a;b]} \varphi,\ \varphi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R}),\ \varphi \leq f\right\}$,

qui est aussi égal à $\displaystyle\inf\left\{\int_{[a;b]} \psi,\ \psi \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{R}),\ \psi \geq f\right\}$.

Remarque

- En fait, si $f \geq 0$, le nombre $\int_{[a;b]} f$ est l'aire du domaine

$$\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

- Même si cette définition théorique est indispensable pour expliciter rigoureusement la notion d'intégrale (et donc "d'aire sous la courbe"), on ne s'en sert (presque) jamais pour calculer effectivement une intégrale.

3) Intégrale sur un segment d'une fonction à valeurs complexes

Définition 10 (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes).
Soit $f \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{C})$. On pose

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} \mathrm{Re}(f) + i \int_{[a;b]} \mathrm{Im}(f) \in \mathbb{C}.$$

Remarque

Ceci est possible car on a $f \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{C}) \implies \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{R})$.
En effet, si une fonction $h :]\alpha;\beta[\to \mathbb{C}$ est continue et possède des limites finies aux extrémités, alors il en est de même pour les fonctions $\mathrm{Re}(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$ (voir les propriétés des limites des fonctions à valeurs complexes).

II Propriétés de l'intégrale

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $[a;b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

1) Propriétés de base

Proposition 11 (Propriétés fondamentales de l'intégrale des fcts. réelles).
L'intégrale des fonctions réelles continues par morceaux possède les propriétés suivantes :

(i) Linéarité : $\forall f, g \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad \int_{[a;b]} (\lambda f + g) = \lambda \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g.$

L'application $f \mapsto \int_{[a;b]} f$ est donc une forme linéaire $\mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

(ii) Positivité : $\forall f \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{R}),\quad f \geq 0 \implies \int_{[a;b]} f \geq 0$.

(iii) Croissance : $\forall f, g \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{R}),\quad f \leq g \implies \int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} g$.

(iv) Additivité : $\forall f \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{R}),\quad \int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$*, pour tout* $c \in]a;b[$.

Remarque
Là encore, la dernière propriété à bien un sens car si $f : [a;b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux, il est immédiat que la restriction de f à tout segment inclus dans $[a;b]$ est aussi une fonction continue par morceaux.

ATTENTION !
Bien entendu, $\displaystyle\int_{[a;b]} fg \neq \int_{[a;b]} f \times \int_{[a;b]} g \ldots$

Proposition 12 (Propriétés de l'intégrale des fonctions complexes).
L'intégrale des fonctions continues par morceaux à valeurs complexes possède les propriétés suivantes :

(i) Linéarité : $\forall f, g \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{C}),\ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \displaystyle\int_{[a;b]} (\lambda f + g) = \lambda \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g.$
L'application $f \mapsto \int_{[a;b]} f$ *est donc une forme linéaire* $\mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$.

(ii) Additivité : $\forall f \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{C}), \quad \displaystyle\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$, *pour tout* $c \in]a;b[$.

ATTENTION !
Les propriétés de positivité et de croissance n'ont aucun sens pour des fonctions à valeurs complexes !

2) Inégalités fondamentales

Rappelons quelques inégalités de base qui permettent de manipuler les intégrales :

Proposition 13 (Croissance par rapport au domaine d'intégration).
Soit $f \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{R})$. *On suppose que* $f \geq 0$. *Alors, pour tout segment*
. . . .
$K \subset [a;b]$ *non vide et non réduit à un point, on a* $\displaystyle\int_K f \leq \int_{[a;b]} f$.
. . . .

Preuve : Notons $K = [c;d] \subset [a;b]$. Puisque $a < c < d < b$, nous obtenons par additivité de l'intégrale :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;d]} f + \int_{[d;b]} f.$$

Or, f étant positive, on a $\int_{[a;c]} f \geq 0$ et $\int_{[d;b]} f \geq 0$ donc $\int_{[a;b]} f \geq \int_{[c;d]} f$. □

ATTENTION !
L'hypothèse de positivité de f est indispensable.

Proposition 14 (Inégalité de la moyenne).
Si $f \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{R})$ et si m, M sont deux constantes réelles, alors on a

$$m \leq f \leq M \implies m \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \leq M.$$

Preuve : Puisque la fonction f est comprise entre les fonctions constantes égales à m et M, on obtient par croissance de l'intégrale :

$$\int_{[a;b]} m \leq \int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} M,$$

c'est-à-dire $m(b-a) \leq \int_{[a;b]} f \leq M(b-a)$ (les fonctions constantes m et M étant des fonctions en escalier). $\square$

Remarque
Le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_{[a;b]} f$ est appelé **valeur moyenne** de f sur le segment $[a;b]$.
L'inégalité de la moyenne dit simplement que μ est compris entre les valeurs extrêmes de f.

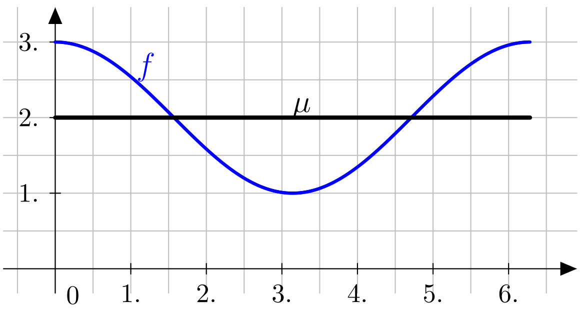

FIGURE 9 – La valeur moyenne de f, notée μ.

Proposition 15 (Inégalité intégrale et valeur absolue/module).
Si $f \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{K})$, alors $\left| \displaystyle\int_{[a;b]} f \right| \leq \displaystyle\int_{[a;b]} |f|$.

Preuve :

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors on a $-|f| \leq f \leq |f|$, donc par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$-\int_{[a;b]} |f| \leq \int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} |f|,$$

c'est-à-dire

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leq \int_{[a;b]} |f|.$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors il existe $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\int_{[a;b]} f = \rho e^{i\theta}$, donc

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| = \rho = e^{-i\theta} \int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} e^{-i\theta} f.$$

Vu que cette dernière intégrale est réelle (et positive), on a

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| = Re\left(\int_{[a;b]} e^{-i\theta} f\right) = \int_{[a;b]} Re(e^{-i\theta} f).$$

On conclut alors en appliquant l'inégalité intégrale/valeur absolue à la fonction réelle $g = Re(e^{-i\theta} f)$, ce qui donne :

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| = \int_{[a;b]} Re(e^{-i\theta} f) \leq \int_{[a;b]} \left|Re(e^{-i\theta} f)\right| \leq \int_{[a;b]} |e^{-i\theta} f| = \int_{[a;b]} |f|.$$

□

Corollaire 16 (Majoration de l'intégrale d'un produit).
Si $f, g \in \mathcal{C}_M([a;b], \mathbb{K})$, *alors* $\left|\int_{[a;b]} fg\right| \leq \sup_{[a;b]} |f| \times \int_{[a;b]} |g|$.

. . . .

Preuve : Tout d'abord, on a $\left|\int_{[a;b]} fg\right| \leq \int_{[a;b]} |fg|$ d'après la prop. 15.
Ensuite, la fonction f étant continue par morceaux sur le segment $[a;b]$, elle est bornée.
Notons $M = \sup_{[a;b]} |f|$. On a alors :

$$\forall x \in [a;b], \quad |fg|(x) = |f(x)| \times |g(x)| \leq M|g(x)|,$$

donc $|fg| \leq M|g|$. Par croissance et linéarité de l'intégrale, on en déduit :

$$\int_{[a;b]} |fg| \leq \int_{[a;b]} M|g| = M \int_{[a;b]} |g|,$$

et donc $\left|\int_{[a;b]} fg\right| \leq M \int_{[a;b]} |g|$. □

3) Cas d'une fonction continue, positive et d'intégrale nulle

Toutes les propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux s'appliquent évidemment aux fonctions **continues**. Mais dans ce cas, on dispose d'une propriété supplémentaire.

Proposition 17 (Fonction continue positive et d'intégrale nulle).
Si $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$, et si $f \geq 0$, alors :
....

$$\int_{[a;b]} f = 0 \implies (\forall x \in [a;b],\ f(x) = 0)\,.$$

....

Preuve : Supposons par l'absurde que f ne soit pas identiquement nulle sur le segment $[a;b]$. Vu que f est supposée positive, il existe un point $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) > 0$.
L'idée est alors de **minorer** $\boldsymbol{f}$ par une fonction en escalier simple d'intégrale non nulle.
La continuité de f entraîne alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \qquad x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \cap [a;b] \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Or, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \iff f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$, donc en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$ (par exemple), on obtient :

$$\exists \delta > 0, \qquad x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \cap [a;b] \implies f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) > 0.$$

Par positivité de f et croissance de l'intégrale, on obtient alors :

$$\int_{[a;b]} f \geq \int_{[a;b] \cap [x_0 - \delta; x_0 + \delta]} f \geq \int_{[a;b] \cap [x_0 - \delta; x_0 + \delta]} \frac{1}{2} f(x_0) = \frac{1}{2} f(x_0) \alpha,$$

où α est la longueur de l'intervalle $[a;b] \cap [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$. Puisque $\alpha > 0$, on en déduit que $\int_{[a;b]} f > 0$, ce qui contredit l'hypothèse d'intégrale nulle.
En conclusion, f est identiquement nulle sur $[a;b]$.

$\square$

Remarque

- Ce résultat reste vrai si $f \leq 0$. En fait, il devient faux si f est de signe variable.
- L'implication réciproque est évidemment triviale : si f est identiquement nulle, alors f est d'intégrale nulle (par linéarité de l'intégrale).

ATTENTION !

Cette proposition est **fausse** si f est seulement supposée continue par morceaux !
En effet, la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et $f(x) = 0$ sinon est continue par morceaux (car en escalier), positive, non nulle (car $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$) et pourtant on a $\displaystyle\int_{[0;1]} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

III Lien entre intégration et dérivation

Dans cette partie, les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et les intervalles I considérés sont non vides et non réduits à un point. En revanche, on ne supposera plus nécessairement $a < b$ pour les extrémités des segments d'intégration.

1) Polarisation de l'intégrale

Dans la suite, nous utiliserons la convention suivante :

Définition 18 (Intégrale polarisée).

Soient deux réels a, b et f une fonction continue par morceaux sur
....
un segment contenant a et b. On pose :
....

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a;b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ \displaystyle -\int_{[b;a]} f & \text{si } a > b \end{cases}.$$

....

Remarque

On a donc $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **quel que soit l'ordre de a et b.**

ATTENTION !

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, **la variable x est muette** (on l'appelle «variable d'intégration»), car l'intégrale est un nombre, **qui ne dépend pas de la variable x** : il dépend seulement de la fonction f, et des bornes de l'intervalle a et b.
On peut écrire :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \dots,$$

mais surtout pas

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a)\mathrm{d}a \qquad !$$

(cette écriture n'a aucun sens, car il y a conflit entre la variable d'intégration et une des bornes de l'intégrale).

Proposition 19 (Relation de Chasles).
Soient trois réels a, b, c et f une fonction continue par morceaux sur un segment contenant a, b, c. Alors, on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque

La relation de Chasles est valable **quel que soit l'ordre des trois bornes**.

Preuve : On procède par distinction de cas, suivant l'ordre des bornes :

- Si $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$, alors le résultat est trivial, puisqu'une des trois intégrales est nulle. Il reste donc à traiter les cas où a, b, c sont deux à deux distincts.
- Si $a < c < b$, alors d'après la propriété d'additivité de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- Si $a < b < c$, alors d'après le cas précédent :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

  c'est-à-dire

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- Si $c < a < b$, alors de même :

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx,$$

donc

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx.$$

- Les autres cas se traitent pareillement...

$\square$

ATTENTION !

Quand les bornes ne sont «**pas dans le bon sens**» **(i.e. si $a > b$)** :

- les propriétés concernant l'ordre ne sont plus valables :
  par exemple si $a > b$ et $f \geq 0$, alors on a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq 0$!
  C'est le défaut majeur de la notation polarisée pour l'intégrale.
- l'inégalité $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est **fausse** !
  En effet, on a $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = -\int_{[b;a]} |f(t)|\mathrm{d}t \leq 0$, ce qui rend impossible l'inégalité dans le cas général.

On dispose quand même de l'inégalité générale suivante :

Proposition 20 (Inégalité intégrale/module avec la notation polarisée). *Soient a, b deux réels et f une fonction continue par morceaux sur un segment contenant a et b. Alors, on a $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\right|$.*

Preuve : Trois cas :

- Si $a = b$, alors l'inégalité est triviale car les deux intégrales sont nulles.
- Si $a < b$, alors d'après la prop. 15 :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{[a;b]} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_{[a;b]} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

  Toutes ces quantités étant positives, on a $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\right|$.
- Si $a > b$, alors, toujours d'après la prop. 15 :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|-\int_{[b;a]} f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{[b;a]} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_{[b;a]} |f(x)|\mathrm{d}x = -\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

  Toutes ces quantités étant positives, on a $-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \left|-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\right|$.

$\square$

2) Théorème fondamental de l'analyse et conséquences

Rappel
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point).

- Une primitive de $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable $F : I \to \mathbb{K}$ telle que $F' = f$.
- Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur I, alors $F - G$ est constante sur I (puisque $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$ sur **l'intervalle** I).
- Si elles existent, les primitives d'une fonction sont donc toutes égales à une constante près.

Le théorème suivant fait le lien entre la notion d'intégrale et celle de primitive, pour les fonctions continues.

Théorème 21 (Théorème fondamental de l'analyse).
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction **continue** *sur un intervalle I, et soit $a \in I$.*

Alors la fonction $F_a : I \to \mathbb{K}$ définie par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

est une primitive de f sur I (i.e F_a est dérivable sur I et $F_a' = f$) .

Preuve : Soit $x_0 \in I$. Montrons que F_a est dérivable en x_0 et que $F_a'(x_0) = f(x_0)$.

Pour cela, calculons le taux d'accroissement de F_a en x_0 : pour $x \in I$, $x \neq x_0$:

$$\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\Big(\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\Big) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt.$$

On doit alors montrer que cette quantité a pour limite $f(x_0)$ lorsque $x \to x_0$.
Cela semble logique car pour x proche de x_0,
$\displaystyle\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt$ est proche de $\displaystyle\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)dt = \frac{1}{x - x_0} \times (x - x_0)f(x_0) = f(x_0)$.
Montrons donc que la différence tend vers 0 :

$$\left|\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^x f(x_0)dt\right)\right| = \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\right|.$$

Revenons à la définition d'une limite : soit un réel $\varepsilon > 0$. On doit montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \quad |x - x_0| \leq \delta \implies \left|\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon.$$

Pour cela, on utilise la continuité de f au point x_0 : étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in I, \quad |t - x_0| \leq \delta \implies |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Donc, si x vérifie $x \neq x_0$ et $|x - x_0| \leq \delta$, on aura, pour tout t compris entre x et x_0, $|t - x_0| \leq |x - x_0| \leq \delta$, donc $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. On en déduit que :

$$\forall x \in I\setminus\{x_0\}, \quad |x - x_0| \leq \delta \implies \left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^x \varepsilon dt\right| = \varepsilon|x - x_0|.$$

Finalement, on a

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \quad |x - x_0| \leq \delta \implies \left|\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\varepsilon|x - x_0| = \varepsilon,$$

ce qui montre bien que $\dfrac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$. □

On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 22 (Existence de primitives pour des fonctions continues).
Toute fonction **continue** *sur un intervalle I possède des primitives* .
. . . .

Remarque
Si f est continue sur I, alors

- La fonction $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est en fait l'**unique** primitive de f sur I qui est **nulle en a** (puisqu'on a $\displaystyle\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$).
- F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (puisque sa dérivée f est continue).

ATTENTION !
Une fonction continue par morceaux sur un segment peut ne pas posséder de primitive.
En fait, la fonction $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, même si elle existe, n'est pas nécessairement dérivable.

Exemple
La fonction $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \end{cases}$
est continue par morceaux, mais **ne possède pas de primitive** sur $[-1;1]$.
Sinon, il existerait $F : [-1;1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$, ce qui impose :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \qquad F(x) = \begin{cases} x + \alpha & \text{si } x > 0 \\ -x + \beta & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

puis par continuité de F, $\alpha = \beta = F(0)$.
La fonction F serait donc de la forme $F(x) = |x| + F(0)$, ce qui contredit sa dérivabilité en 0 (on rappelle que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0).

Proposition 23 (Formule fondamentale du calcul intégral).
Soit f une fonction **continue** *sur un intervalle I. Alors, on a*

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$

où F est **n'importe quelle primitive de f** *sur I.*

Preuve : Fixons a et b dans I.
Soit F une primitive quelconque de f sur I (elle existe car f est continue). Considérons aussi la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, qui elle aussi est une primitive de f sur I d'après le théorème 21. Il existe donc une constante $C \in \mathbb{K}$ telle que $\forall x \in I,\ F(x) = F_a(x) + C$.
En évaluant en $x = a$, on obtient $F(a) = F_a(a) + C$, donc $C = F(a)$ (puisque $F_a(a) = 0$).
En évaluant en $x = b$, on obtient $F(b) = F_a(b) + C = F_a(b) + F(a)$, donc

$$\int_a^b f(t)dt = F_a(b) = F(b) - F(a).$$

□

Notation
On note $[F(t)]_a^b$ ou encore $F(t)|_a^b$ pour désigner $F(b) - F(a)$.
Ainsi, on écrit $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b$.

Notation ("Intégrale sans bornes")
Pour $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, on peut noter $\int f(x)\mathrm{d}x$ **les** primitives de f.
On a donc $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$, où F est n'importe quelle primitive de f sur l'intervalle I. Mais attention, cette notation peut prêter à confusion !

Exemple
On a $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$ $(c \in \mathbb{R})$, donc $\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}$ pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Corollaire 24 (Intégrale de la dérivée).
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, alors

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Preuve : Direct d'après la prop. 23 car si f est $\mathcal{C}^1$, alors f est une primitive de f'. □

ATTENTION !
La condition $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ est importante, elle garantit que la dérivée f' est continue sur I, et donc que l'intégrale $\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ existe pour tout $x \in I$.

Remarque (Démo de l'inégalité des accroissements finis dans le cas $\mathcal{C}^1$)
Ce dernier corollaire permet notamment de **retrouver l'inégalité des accroissements finis** dans le cas où $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$:

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| = \left|\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t\right| \leq \left(\sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|\right) \times |b-a|.$$

(rappelons que cette inégalité reste vraie lorsque f est seulement dérivable, mais sa démonstration est plus difficile).

IV Techniques de calcul

Dans cette partie, les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et les intervalles I considérés sont non vides et non réduits à un point.

1) Recherche directe d'une primitive pour une fct. continue

On vient de voir que l'on peut calculer l'intégrale d'une fonction continue si l'on en connaît une primitive. Mais en général, la recherche d'une primitive peut être un problème difficile.

Méthode (Identification de motif)
Savoir reconnaître une dérivée composée : $\quad f(u(x)) \times u'(x) = (F \circ u)'(x)$, où $F' = f$.

Exemple
Calculer $\int_0^1 x(x^2+1)^5 dx$.
En notant $u(x) = x^2 + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = 2x$, donc

$$x(x^2+1)^5 = xu(x)^5 = \frac{1}{2}u'(x)u(x)^5 = f(u(x)) \times u'(x),$$

avec $f : t \mapsto \frac{t^5}{2}$. Une primitive de f est $F : t \mapsto \frac{t^6}{12}$, donc

$$x(x^2+1)^5 = \frac{d}{dx}(F(u(x))) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{12}(x^2+1)^6\right).$$

On en déduit

$$\int_0^1 x(x^2+1)^5 dx = \left[\frac{1}{12}(x^2+1)^6\right]_0^1 = \frac{2^6-1}{12} = \frac{63}{12} = \frac{21}{4} = 5,25.$$

Exemple
Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}dx$.
$\dfrac{x+1}{x^2+1}$ est "presque" de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$. En posant $u(x) = x^2+1$ pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)} + \arctan'(x).$$

Puisque $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $x \mapsto \ln(u(x))$ est une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sur $\mathbb{R}$, donc

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2} + \arctan(1) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

2) Intégration par parties

Proposition 25 (Formule d'intégration par parties).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient deux fonctions $\boldsymbol{u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})}$.
. . . .
Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$, on a
. . . .

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

. . . .

Preuve : Vu que u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, le produit uv aussi et $(uv)' = u'v + uv'$. Donc

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

par linéarité de l'intégrale. □

ATTENTION !
L'hypothèse «u et v de classe $\mathcal{C}^1$» garantit l'existence des deux intégrales dans la formule d'I.P.P.

Exemple

Déterminer les primitives de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.

Soit $(a, x) \in I^2$. Calculons $\int_a^x \ln(t)dt$. D'après la formule d'intégrations par parties utilisée avec $u(t) = t$ et $v(t) = \ln(t)$, on a

$$\int_a^x \ln(t)dt = [t\ln(t)]_a^x - \int_a^x 1dt = x\ln(x) - a\ln(a) - x + a,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^x \ln(t)dt = x(\ln(x) - 1) + a(1 - \ln(a)).$$

En posant $a = e$, on obtient que $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur I. En conclusion, les primitives de ln sur $I =]0; +\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto x\ln(x) - x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Exemple

Calculer $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\mathrm{d}x$.

Une première I.P.P. avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x^2$ donne :

$$A = \left[x^2\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\mathrm{d}x.$$

Pour calculer cette nouvelle intégrale, on effectue une deuxième I.P.P., avec $u(x) = -\cos(x)$ et $v(x) = x$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = 0 + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

On a donc

$$A = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

3) Changement de variable pour les fonctions continues

Proposition 26 (Formule de changement de variable pour une fonction $\mathcal{C}^0$).
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $\boldsymbol{\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})}$ et soit $f \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{K})$ telle que $\varphi(I) \subset J$. Alors, on a

$$\forall(\alpha, \beta) \in I^2, \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Preuve : Soit F une primitive de f sur J. On a $F \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{K})$, donc $F \circ \varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \times \varphi'$. On en déduit que pour tous $(\alpha, \beta) \in I^2$:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)'(x)\mathrm{d}x = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha).$$

On peut donc réécrire :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt.$$

$\square$

Remarque

- Cette formule est vraie quel que soit l'ordre de α et β (grâce à la notion d'intégrale polarisée).
- Le changement de variable revient à penser :

  $$\text{«on pose } t = \varphi(x), \text{ on a alors } \mathrm{d}t = \varphi'(x)\mathrm{d}x.\text{»}$$

  Moyen mnémotechnique :

  $$\text{«}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x) = \varphi'(x) \text{ et on multiplie par } \mathrm{d}x.\text{»}$$

Méthode

Quand on fait un changement de variable dans une intégrale, trois choses se transforment :

- l'expression à intégrer («intégrande») ;
- les bornes de l'intégrale ;
- «l'élément différentiel» dt (**ne pas l'oublier !**).

En pratique, le changement de variable peut se présenter de deux manières.

1. **Premier cas :** $\boxed{\text{On part de } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ et on pose } t = \varphi(x)}$
   (on écrit "l'ancienne variable" t comme l'image d'une "nouvelle variable" x).
   On a alors
   $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x,$$
   où α et β sont tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

   Exemple
   Calcul de $A = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\mathrm{d}t$ avec le changement de variable $t = \sin(x)$.

   - En effectuant le changement de variable $t = \sin(x)$, on obtient $\mathrm{d}t = \cos(x)\mathrm{d}x$, $0 = \sin(0)$, $1 = \sin(\pi/2)$, donc
     $$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(x)}\cos(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(x)|\cos(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\mathrm{d}x,$$
     car la fonction cos est positive sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. En linéarisant, on obtient :
     $$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

   - On peut aussi poser $t = \cos(x)$ pour calculer cette intégrale : on a alors $dt = -\sin(x)dx$, $0 = \cos(\pi/2)$, $1 = \cos(0)$, donc
     $$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \cos^2(x)}(-\sin(x))\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x)|\sin(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\mathrm{d}x,$$
     d'où
     $$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

2. **<u>Second cas :</u>** $\boxed{\text{On part de } \int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x \text{ et on pose } t=\varphi(x)}$
(cette fois, on donne une "nouvelle variable" t en fct. de "l'ancienne variable" x).
On obtient alors
$$\int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t,$$
où $f(t)$ est une expression à déterminer .
Tout doit être en fonction de t, et la variable x ne doit plus apparaître.
Le problème est donc "posé à l'envers", puisqu'on veut x en fonction de t, alors qu'on nous donne l'inverse.
Dans ce cas, si φ est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ et que φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$, alors on peut se ramener au premier cas : $t=\varphi(x) \iff x=\varphi^{-1}(t)$.

Exemple
Calcul de $B=\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$ avec le changement de variable $t=e^x$.
On a, pour tous $(t,x)\in]0;+\infty[\times\mathbb{R}$: $t=e^x \iff x=\ln(t)$, et donc $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$.
De plus :
$$x=0 \iff t=1, \qquad x=1 \iff t=e,$$

ce qui amène :
$$B=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2}{t+\frac{1}{t}}\times\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t = [2\arctan(x)]_1^{\mathrm{e}} = 2\arctan(\mathrm{e})-\frac{\pi}{2}.$$

4) Découpage suivant une subdivision pour une fct. continue par morceaux

Rappelons qu'une fonction continue par morceaux (et pas continue) ne possède pas de primitive en général.

Méthode
Pour calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a;b]$, on choisit une **subdivision** $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ adaptée à f et on utilise la **relation de Chasles** :
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x.$$
La valeur de f aux extrémités a_i et a_{i+1} ne change pas la valeur de $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$, donc, en confondant $f_{|]a_i;a_{i+1}[}$ et son prolongement par continuité, on se ramène à une somme d'intégrales de fonctions **continues sur des sous-segments** de $[a;b]$, qu'on calcule avec les méthodes précédemment vues.

Exemple
Calculer $A = \int_0^9 E(\sqrt{x})\mathrm{d}x$, où $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ désigne la fonction partie entière.

— La fonction $f : x \mapsto E(\sqrt{x})$ est continue par morceaux sur le segment $[0;9]$, car c'est une fonction en escalier : en effet, la subdivision $(a_0; a_1; a_2; a_3) = (0;1;4;9)$ lui est adaptée puisque

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0;1[\\ 1 & \text{si } x \in [1;4[\\ 2 & \text{si } x \in [4;9[\\ 3 & \text{si } x = 9 \end{cases} .$$

— On en déduit que

$$A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x + \int_4^9 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x + \int_1^4 1\mathrm{d}x + \int_4^9 2\mathrm{d}x,$$

et donc

$$A = 0 + 1 \times (4-1) + 2 \times (9-4) = 13.$$

5) Changement de variable pour les fonctions continues par morceaux

On peut étendre la formule de changement de variable au cas où l'intégrande est seulement continu par morceaux.

Proposition 27 (Formule de chgt. de variable pour une fonction $\mathcal{C}_M$).
Soient I et J deux segments de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ **strictement monotone** *et soit $f \in \mathcal{C}_M(J,\mathbb{K})$ telle que $\varphi(I) \subset J$.*
Alors, on a $f \circ \varphi \in \mathcal{C}_M(I,\mathbb{K})$ et

$$\forall (\alpha,\beta) \in I^2, \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t.$$

ATTENTION !
L'hypothèse de stricte monotonie du changement de variable φ est ici indispensable. Sinon, la composée $f \circ \varphi$ risque de ne pas être continue par morceaux !

6) Intégrales et périodicité/symétries

On termine cette section sur les techniques de calcul intégral par des résultats sur l'intégrale des fonctions possédant certaines propriétés (périodicité, parité).

Proposition 28 (Intégrale d'une fonction périodique).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction périodique de période $T > 0$, et continue
par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.
Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t$ (pour $a \in \mathbb{R}$) sont **indépendantes de a** .

Remarque
On a donc notamment $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t.$

Preuve : Soit $a \in \mathbb{R}$. En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t.$$

Effectuons le changement de variable $u = t - T$ dans la dernière intégrale : on a $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ et

$$\int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(u+T)\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\mathrm{d}u,$$

puisque $f(u+T) = f(u)$ pour tout réel u. On en déduit

$$\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(u)\mathrm{d}u = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t,$$

puisque $\displaystyle\int_0^a f(u)\mathrm{d}u = \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^0 f(t)\mathrm{d}t$.

□

Proposition 29 (Intégrale d'une fonction paire/impaire).
Soit $f \in \mathcal{C}_M([-a;a], \mathbb{K})$ avec $a \in]0;+\infty[$. Alors

. . . .

(i) *Si f est impaire, on a $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$* .

. . . .

(ii) *Si f est paire, on a $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.*

. . . .

Preuve : D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = \int_{-a}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

Effectuons le changement de variable $u = -t$ dans la première intégrale : on a $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, et

$$\int_{-a}^0 f(t)\mathrm{d}t = \int_a^0 f(-u)(-\mathrm{d}u) = \int_0^a f(-u)\mathrm{d}u.$$

On en déduit

$$\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a (f(t) + f(-t))\,\mathrm{d}t.$$

Dès lors :

(i) si f est impaire, on a $f(t) + f(-t) = 0$ pour tout réel t, donc $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.

(ii) si f est paire, on a $f(t) + f(-t) = 2f(t)$ pour tout réel t, donc $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.

□

V Sommes de Riemann

On termine ce chapitre par un résultat important de convergence, qui dit que sous certaines conditions, on peut approcher l'intégrale sur $[a;b]$ d'une fonction f par des sommes d'aires de rectangles de largeur $\frac{b-a}{n}$ (avec n tendant vers l'infini). Là encore, les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 30 (Convergence des sommes de Riemann).
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{K})$, et soit $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision régulière de $[a;b]$:
. . . .

$$\forall i \in [\![0;n]\!], \qquad a_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

. . . .

Pour chaque indice $i \in [\![0;n-1]\!]$, on choisit un point $\xi_i \in [a_i;a_{i+1}]$. On a alors
. . . .

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

. . . .

Remarque (Interprétation)
Lorsque le pas $h_n = \frac{b-a}{n}$ devient petit, on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)h_n \simeq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

On comprend alors que l'intégrale est en quelque sorte une «somme continue», et le «dx» joue le rôle de «pas infinitésimal».

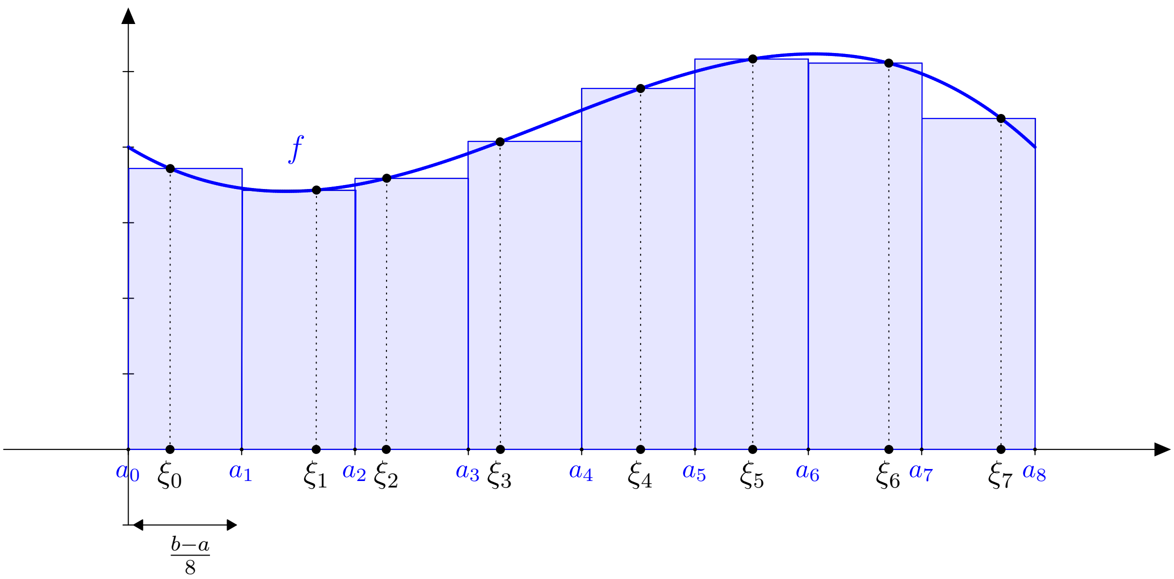

FIGURE 10 – La somme de Riemann $\displaystyle\frac{b-a}{8}\sum_{i=0}^{7} f(\xi_i)$ est la somme des aires coloriées (ici, $n = 8$)

En considérant les cas particuliers où l'on choisit $\xi_i = a_i$ (le bord gauche de chaque intervalle) ou encore $\xi_i = a_{i+1}$ (le bord droit), on obtient le résultat suivant :

Corollaire 31 (Méthodes des rectangles à gauche/à droite).
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{K})$. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

mais aussi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple
Si $f \in \mathcal{C}^0([0;1]; \mathbb{K})$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

puisque $\left(\frac{i}{n}\right)_{0\leq i\leq n}$ est une subdivision régulière du segment $[0;1]$.

Exemple
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2}$.

On peut réécrire $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2}$ sous la forme d'une somme de Riemann :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(k/n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

en posant $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2}{k^2+n^2} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$