Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 3
Déterminants

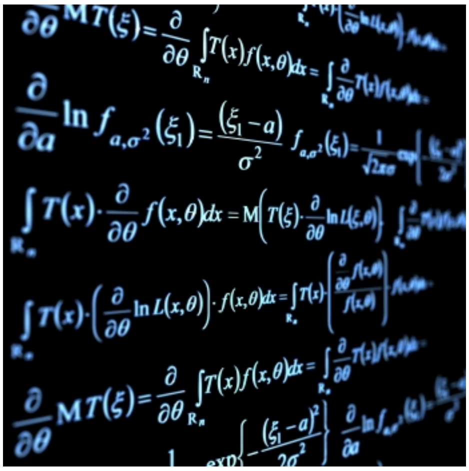

Table des matières

I Déterminant d'une matrice carrée

Dans cette section, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On identifiera toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à la famille de ses vecteurs colonnes $(C_1, \cdots, C_n) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n$.

1) Définition

Nous admettons le théorème suivant :

Théorème 1.
Il existe une unique application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \Phi(A) \end{array} \right.$ *telle que :*

- Φ *est* **linéaire par rapport à chaque colonne de A**, *c'est-à-dire que si l'on fixe $i \in [\![1, n]\!]$ et $C_1, \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, \cdots, C_n \in \mathbb{K}^n$, l'application*
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ X & \longmapsto & \Phi(C_1, \cdots, C_{i-1}, X, C_{i+1}, \cdots, C_n) \end{array} \right.$$
est une forme linéaire
- Φ *est* **antisymétrique**, *c'est-à-dire que la valeur de $\Phi(A)$ est multipliée par -1 lorsqu'on échange deux colonnes de A.*
- $\Phi(I_n) = 1$, *où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Vocabulaire
La première propriété s'appelle la **n-linéarité** : ainsi, Φ est une "forme n-linéaire" sur $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n$.

Définition 2 (Déterminant d'ordre n).
L'unique application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui vérifie les propriétés précédentes est appelée le **déterminant d'ordre n**. *On la note* det, *et pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le nombre* $\det(A)$ *est appelé* **déterminant de la matrice A**.

Remarque
Le déterminant d'ordre n est donc l'unique forme n-linéaire antisymétrique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vaut 1 sur la matrice identité.

Notation
Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors on notera

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

2) Propriétés immédiates

Proposition 3 (Conditions suffisantes de nullité).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) **Si** *A possède deux colonnes identiques,* **alors** $\det(A) = 0$.

(ii) **Si** *la famille des colonnes de A est liée,* **alors** $\det(A) = 0$.

Preuve :

(i) Supposons que $C_i = C_j$, avec $1 \leq i < j \leq n$. On a alors

$$\det(A) = \det(C_1, \cdots, C_{i-1}, \mathbf{C_i}, C_{i+1}, \cdots, C_{j-1}, \mathbf{C_j}, C_{j+1}, \cdots, C_n)$$

En échangeant les colonnes C_i et C_j, on obtient par antisymétrie :

$$-\det(A) = \det(C_1, \cdots, C_{i-1}, \mathbf{C_j}, C_{i+1}, \cdots, C_{j-1}, \mathbf{C_i}, C_{j+1}, \cdots, C_n).$$

Mais $C_i = C_j$, donc $\det(A) = -\det(A)$, c'est-à-dire $\det(A) = 0$.

(ii) Si la famille $(C_1, \cdots, C_n)$, alors une des C_i est combinaison linéaire des autres. Il existe donc $i_0 \in [\![1, n]\!]$ et des scalaires $(\lambda_j)_{j \neq i_0}$ tels que

$$C_{i_0} = \sum_{j \neq i_0} \lambda_j C_j.$$

Par linéarité du déterminant par rapport à la i_0^e colonne, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(C_1, \cdots, C_{i_0-1}, \sum_{j \neq i_0} \lambda_j C_j, C_{i_0+1}, \cdots, C_n) \\
&= \sum_{j \neq i_0} \lambda_j \det(C_1, \cdots, C_{i_0-1}, C_j, C_{i_0+1}, \cdots, C_n)
\end{aligned}$$

Mais d'après (i), chacun des termes $\det(C_1, \cdots, C_{i_0-1}, C_j, C_{i_0+1}, \cdots, C_n)$ est nul, car la colonne C_j apparaît deux fois dans le déterminant (puisque j est l'un des entiers $1, \cdots, i_0 - 1, i_0 + 1, \cdots, n$). Donc $\det(A) = 0$.

$\square$

Remarque

- En particulier, si une colonne de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.
- La réciproque de (i) est fausse. En revanche, on verra plus loin que la réciproque de (ii) est vraie.

Proposition 4 (Invariance par transvection sur les colonnes).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1, n]\!]$. Si on remplace la colonne C_i par $C_i + \alpha C_j$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $j \neq i$, alors le déterminant de A ne change pas :

$$\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \cdots, C_n) = \det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i + \alpha C_j, C_{i+1}, \cdots, C_n).$$

. . . .

Vocabulaire
Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, l'opération $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ s'appelle une **transvection**.

Preuve : Par linéarité du déterminant par rapport à la i^e colonne, on a

$$\begin{aligned} & \det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i + \alpha C_j, C_{i+1}, \cdots, C_n) \\ = \ & \det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \cdots, C_n) + \alpha \det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \cdots, C_n). \end{aligned}$$

Mais $\det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \cdots, C_n) = 0$, d'après la proposition précédente, car la colonne C_j apparaît deux fois.
Donc $\det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i + \alpha C_j, C_{i+1}, \cdots, C_n) = \det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \cdots, C_n)$.

$\square$

ATTENTION !
Le déterminant n'est **pas** invariant par **dilatation** ou **permutation** des colonnes :

- Si on remplace C_i par αC_i (avec $\alpha \in \mathbb{K}$), alors le déterminant de A est multiplié par α (par linéarité par rapport à la i^e colonne).
- Si on permute deux colonnes, le déterminant de A est multiplié par -1.

Proposition 5.
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Preuve : On obtient λA en multipliant toutes les colonnes de A par λ. D'où, par linéarité par rapport à chaque colonne :

$$\begin{aligned}\det(\lambda A) &= \det(\lambda C_1, \lambda C_2, \cdots, \lambda C_n) = \lambda \det(C_1, \lambda C_2, \cdots, \lambda C_n) \\ &= \underbrace{(\lambda \times \cdots \times \lambda)}_{n \text{ fois}} \det(C_1, C_2 \cdots, C_n) = \lambda^n \det(A).\end{aligned}$$

□

3) Expression en petites dimensions

Proposition 6 (Expression du déterminant d'ordre 2).
Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, *alors* $\det(A) = ad - bc$.

Preuve : En notant $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, les colonnes de A sont $C_1 = aE_1 + cE_2$ et $C_2 = bE_1 + dE_2$. D'où

$$\det(A) = \det(aE_1 + cE_2; bE_1 + dE_2).$$

Par n-linéarité du déterminant (on dit "bilinéarité" pour $n = 2$), on a

$$\det(A) = a \det(E_1; bE_1 + dE_2) + c \det(E_2; bE_1 + dE_2),$$

c'est-à-dire

$$\det(A) = ab \det(E_1; E_1) + ad \det(E_1; E_2) + cb \det(E_2; E_1) + cd \det(E_2; E_2).$$

Par la proposition 3, $\det(E_1; E_1) = \det(E_2; E_2) = 0$. En outre, par antisymétrie, $\det(E_2; E_1) = -\det(E_1; E_2)$. D'où

$$\det(A) = (ad - bc) \det(E_1; E_2) = (ad - bc) \times \det(I_2) = ad - bc,$$

puisque $\det(I_2) = 1$.

□

Proposition 7 (Expression du déterminant d'ordre 3).
Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, *alors*

$$\begin{aligned} \det(A) &= (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}) \\ &\quad - (a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}). \end{aligned}$$

Preuve : Pour tout $j \in \{1;2;3\}$, la j^e colonne de A est $C_j = \sum_{i=1}^{3} a_{i,j}E_i$, où (E_1, E_2, E_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donc,

$$\det(A) = \det\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i,1}E_i, \sum_{i=1}^{3} a_{i,2}E_i, \sum_{i=1}^{3} a_{i,3}E_i\right).$$

Par n-linéarité du déterminant (on dit "trilinéarité" pour $n = 3$), on obtient

$$\det(A) = \sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\sum_{i_3=1}^{3} a_{i_1,1}a_{i_2,2}a_{i_3,3}\det(E_{i_1}, E_{i_2}, E_{i_3})$$

(soit $3^3 = 27$ termes au total !).
Mais $\det(E_{i_1}, E_{i_2}, E_{i_3}) = 0$ si i_1, i_2, i_3 ne sont pas distincts .

Il ne reste donc que les termes contenant les déterminants de la famille (E_1, E_2, E_3) et toutes ses permutations possibles. Il y en a $3! = 6$ au total :

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}\det(E_1, E_2, E_3) + a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}\det(E_1, E_3, E_2) + a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}\det(E_2, E_1, E_3) \\ &\quad + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}\det(E_2, E_3, E_1) + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}\det(E_3, E_1, E_2) + a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}\det(E_3, E_2, E_1). \end{aligned}$$

Or, $\det(E_1, E_2, E_3) = \det(I_3) = 1$. Il ne reste plus qu'à utiliser l'antisymétrie :

- $\det(E_1, E_3, E_2) = -\det(E_1, E_2, E_3) = -1$,
- $\det(E_2, E_1, E_3) = -\det(E_1, E_2, E_3) = -1$,
- $\det(E_2, E_3, E_1) = -\det(E_1, E_3, E_2) = -(-1) = 1$,
- $\det(E_3, E_1, E_2) = -\det(E_1, E_3, E_2) = -(-1) = 1$,
- $\det(E_3, E_2, E_1) = -\det(E_1, E_2, E_3) = -1$.

□

Remarque

- On comprend bien que l'expression du déterminant va devenir de plus en plus compliquée au fur et à mesure que n augmente.
- Inutile de retenir l'expression de $\det(A)$ pour $n = 3$ (on va voir d'autres méthodes).

4) Invariance par transposition et conséquences

Proposition 8 (Invariance par transposition).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $\det(A^T) = \det(A)$.

Remarque
On admet ce résultat, mais la preuve est facile pour $n = 2$:

$$\det(A^T) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(A).$$

Corollaire 9 (Propriétés vis-à-vis des lignes).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- *Le déterminant de A est linéaire par rapport à chacune des lignes de A.*
- *Si on multiplie une ligne L_i par un scalaire α, alors le déterminant de A est multiplié par α.*
- *Si on échange deux lignes de A, alors le déterminant de A est multiplié par -1.*
- *Si les lignes de A forment une famille liée, alors $\det(A) = 0$.*
- *Si on remplace la ligne L_i (avec $i \in [\![1, n]\!]$) par $L_i + \alpha L_j$ (avec $j \neq i$), alors le déterminant de A ne change pas.*

Preuve : Les lignes de A sont les colonnes de A^T, donc les propriétés déjà vraies pour les colonnes de A se transfèrent aux lignes de A, puisque $\det(A^T) = \det(A)$. □

5) Déterminant d'une matrice triangulaire

Proposition 10 (Déterminant d'une matrice triangulaire).
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **triangulaire** *(supérieure ou inférieure). Alors, on a* $\det(A) = a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n,n}$.

Preuve : Vu que le déterminant est invariant par transposition, il suffit de démontrer le résultat pour une matrice triangulaire supérieure : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, on a

$$\det(A) = a_{1,1} \times \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On effectue ensuite les transvections $C_j \leftarrow C_j - a_{1,j} C_1$ pour $2 \leq j \leq n$.
Le déterminant ne change pas, et cela fait apparaître des 0 sur la première ligne :

$$\det(A) = a_{1,1} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On peut continuer : on factorise la deuxième colonne par $a_{2,2}$ puis on fait les transvections $C_j \leftarrow C_j - a_{2,j} C_2$ pour $3 \leq j \leq n$ pour faire apparaître des 0 sur la deuxième ligne, etc.
En itérant ce procédé, on obtient (par récurrence) :

$$\det(A) = a_{1,1} \times \cdots \times a_{n-2,n-2} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Dernière étape : on factorise la $(n-1)^e$ colonne par $a_{n-1,n-1}$, puis on fait la transvection $C_n \leftarrow C_n - a_{n-1,n} C_{n-1}$. On obtient

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1} \times \cdots \times a_{n-1,n-1} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= a_{1,1} \times \cdots \times a_{n-1,n-1} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= a_{1,1} \times \cdots \times a_{n-1,n-1} \times a_{n,n} \times \underbrace{\det(I_n)}_{=1}. \end{aligned}$$

$\square$

Remarque
Le déterminant d'une matrice **triangulaire** est donc le produit de ses éléments diagonaux. Evidemment, il en va de même pour une matrice diagonale, puisque toute matrice diagonale est triangulaire !

ATTENTION !
En général, il n'y a pas d'expression simple du déterminant d'une matrice non triangulaire.

6) Déterminant d'un produit de matrices

Proposition 11 (Déterminant d'un produit).
Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a* $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.

Remarque
On admet ce résultat, mais sa preuve est facile pour $n = 2$:

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{vmatrix} = (aa'+bc')(cb'+dd')-(ca'+dc')(ab'+bd') = (ad-bc)(a'd'-b'c').$$

ATTENTION !
Il n'y a pas de formule pour $\det(A + B)$!

7) Une autre caractérisation de l'inversibilité

Proposition 12 (Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Alors* *A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

Dans ce cas, on a $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Preuve :
$\boxed{\Longrightarrow}$ Si A est inversible, alors, puisque $A^{-1} \times A = I_n$, on en déduit par la prop. 11 que $\det(A^{-1}) \times \det(A) = \det(I_n) = 1$, et donc que $\det(A) \neq 0$ et $\frac{1}{\det(A)} = \det(A^{-1})$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On procède par contraposée. Si A n'est pas inversible, alors $rg(A) < n$, donc les colonnes $(C_1, \cdots, C_n)$ forment une famille liée de $\mathbb{K}^n$ (on rappelle que les colonnes de A engendrent $Im(A)$). Donc $\det(A) = 0$ (par la prop. 3).

$\square$

Remarque
On a donc, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff rg(A) = n \iff \text{la famille } (C_1, \cdots, C_n) \text{ est libre} \iff \det(A) \neq 0.$$

II Calcul pratique de déterminants

1) Formules de développement par rapport à une rangée

On dispose d'une méthode de calcul **récursive** des déterminants, c'est-à-dire que le calcul d'un déterminant d'ordre n peut se ramener au calcul de plusieurs déterminants d'ordre $n-1$, qui eux-mêmes se calculent en fonction de déterminants d'ordre $n-2$, etc.

On introduit pour cela la définition suivante :

Définition 13 (Mineurs d'une matrice carrée).
Soit un entier $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
on appelle **mineur du coefficient $\boldsymbol{a_{i,j}}$** *le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne de A.*

Exemple
Dans la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$, on a

$$\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{1,2} = \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2,3} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

Les formules suivantes sont très importantes mais difficiles à montrer. Nous les admettrons.

Proposition 14 (Formules de développement par rapport à une rangée).
Soit un entier $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) *Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on a la formule de développement par rapport à la i^e ligne :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}.$$

(ii) *Pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, on a la formule de développement par rapport à la j^e colonne :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}.$$

Remarque
On peut donc développer un déterminant par rapport à la ligne ou la colonne **de son choix**.

ATTENTION !
Ne pas oublier le $(-1)^{i+j}$ dans la formule de développement.
Chaque position dans la matrice est ainsi associée à un signe :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{pmatrix}.$$

(on peut remarquer que tous les coefficients diagonaux correspondent à un signe + car $(-1)^{i+i} = 1$ pour tout entier i).

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$, alors :

- en développant par rapport à L_1 :
$\det(A) = a_{1,1}\Delta_{1,1} - a_{1,2}\Delta_{1,2} + a_{1,3}\Delta_{1,3}$;
- en développant par rapport à L_2 :
$\det(A) = -a_{2,1}\Delta_{2,1} + a_{2,2}\Delta_{2,2} - a_{2,3}\Delta_{2,3}$;
- en développant par rapport à C_2 :
$\det(A) = -a_{1,2}\Delta_{1,2} + a_{2,2}\Delta_{2,2} - a_{3,2}\Delta_{3,2}$.

Méthode
Pour utiliser au mieux ces formules, on développe selon la rangée (ligne ou colonne) **qui comporte le plus de zéros** (s'il y en a une).

Exemple

Calcul de $\det(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Le plus efficace est ici de développer par rapport à la ligne L_3 (qui comporte 2 zéros) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_{3,1} - 0\Delta_{3,2} + 0\Delta_{3,3} - (-5)\Delta_{3,4} = 3\Delta_{3,1} + 5\Delta_{3,4}.$$

Pour calculer $\Delta_{3,1}$, on le développe par rapport à la colonne C_3 :

$$\Delta_{3,1} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2+4)+3*(2+3) = 17.$$

Pour calculer $\Delta_{3,4}$, on le développe par rapport à la colonne C_1 :

$$\Delta_{3,4} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 32 - 5 = -35.$$

Finalement, on a donc

$$\det(A) = 3 * 17 + 5(-35) = 51 - 175 = -124.$$

Remarque (Mauvaise complexité des formules de développement)
Le défaut de ces formules de développement est la complexité du calcul. Par exemple, pour calculer un déterminant 4×4, il faut calculer 4 déterminants 3×3, qui font appel chacun à 3 déterminants 2×2 !
En général, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le calcul de $\det(A)$ avec les formules de développement demande au pire le calcul de :

- n déterminants d'ordre $n - 1$,
- plus n multiplications (produits $(-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$),
- plus $n - 1$ additions (pour faire la somme).

En notant Δ_n le nombre d'opérations mathématiques nécessaires au calcul d'un déterminant d'ordre n (par cette méthode), on a donc

$$\forall n \geq 3, \quad \Delta_n = n\Delta_{n-1} + 2n - 1.$$

Le cas initial est $\Delta_2 = 3$ (le calcul d'un déterminant d'ordre 2 nécessite trois opérations : deux multiplications et une addition). On montre alors facilement par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \qquad n! \leq \Delta_n \leq n \times n!.$$

Donc pour de grandes valeurs de n, Δ_n est très grand, et le calcul est impossible à réaliser sur machine. Mais heureusement, des méthodes de calcul plus efficaces du déterminant d'une matrice existent !

2) Méthodes de calcul efficaces

Méthode (Calcul d'un déterminant par la méthode du pivot de Gauss)

1. En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes et/ou colonnes de A, on se ramène à une matrice triangulaire, sachant que :
   - les transvections $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ (avec $j \neq i$) conservent la valeur du déterminant ;
   - les dilatations $L_i \leftarrow \alpha L_i$ et $C_i \leftarrow \alpha C_i$ multiplient la valeur du déterminant par α ;
   - les permutations $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplient la valeur du déterminant par -1.
2. Le déterminant de la matrice triangulaire est alors simplement le produit de ses éléments diagonaux.

ATTENTION !

Si $A \underset{L}{\sim} B$ (matrices "équivalentes en lignes"), alors $\det(A) \neq \det(B)$ en général ! (à cause des éventuelles dilatations et permutations de lignes).

Exemple

Calcul de $\det(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 9 & -8 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - (6/5)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - (2/5)L_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -28/5 \\ 0 & 0 & -7 & 24/5 \end{vmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + (7/3)L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -28/5 \\ 0 & 0 & 0 & -124/15 \end{vmatrix}.$$

Finalement, $\det(A) = 1 * 5 * 3 * \left(-\frac{124}{15}\right) = -124$.

Remarque (Bonne complexité de la méthode de Gauss)
On peut montrer que dans le cas général, le nombre d'opérations pour calculer un déterminant d'ordre n par cette méthode est **inférieur à $\boldsymbol{n^3}$**, ce qui fait beaucoup moins que $n!$ quand n devient grand.

Cette méthode de pivot étant la plus efficace pour n grand et pour une matrice "générique", il n'en reste pas moins que sur des calculs de déterminants particuliers, il y a souvent des méthodes plus astucieuses.

Méthode (Variante du pivot de Gauss pour calculer un déterminant)

1. Faire apparaître des 0 dans une rangée (la plus simple, par exemple si elle comporte déjà des zéros) en effectuant des transvections.
2. Développer suivant la rangée : il n'y a **qu'un seul terme** (les autres valent 0).
3. Itérer cette méthode pour calculer le déterminant d'ordre inférieur.

Exemple

Calcul de $\det(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_4 \leftarrow C_4 + (5/3)C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 8/3 \\ 2 & 1 & -1 & 10/3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 4/3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{dev } L_3}{=} 3 \begin{vmatrix} -2 & -3 & 8/3 \\ 1 & -1 & 10/3 \\ 4 & -2 & 4/3 \end{vmatrix} \underset{\text{fact } C_3}{=} \begin{vmatrix} -2 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & 10 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 10C_1}}{=} \begin{vmatrix} -2 & -5 & 28 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -36 \end{vmatrix} \underset{\text{dev } L_2}{=} - \begin{vmatrix} -5 & 28 \\ 2 & -36 \end{vmatrix} = -(5*36-2*28) = -180+56 = -124$$

3) Un exemple de calcul de déterminant d'ordre n

Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculons le déterminant d'ordre n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & n-3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-2 & \cdots & \cdots & 2 & 1 & 0 & 1 \\ n-1 & \cdots & \cdots & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En effectuant les transvections $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$, $\ldots$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on obtient :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

On fait des transvections sur les colonnes : $C_j \leftarrow C_j + C_1$ pour $2 \leq j \leq n$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la colonne C_n, on obtient finalement

$$\Delta_n = (-1)^{n+1}(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(n-1)2^{n-2}$$

(puisque ce dernier déterminant est triangulaire).

III Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1) Définition

Définition 15 (Déterminant dans la base $\mathcal{B}$).
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, et $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **déterminant de la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dans la base $\mathcal{B}$** *le déterminant de la matrice formée des vecteurs colonne des coordonnées des x_i dans la base $\mathcal{B}$.*
On note $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$.

Remarque
Ainsi, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)) = \begin{vmatrix} | & | & \cdots & | & | \\ | & | & \cdots & | & | \\ [x_1]_{\mathcal{B}} & [x_2]_{\mathcal{B}} & \cdots & [x_{n-1}]_{\mathcal{B}} & [x_n]_{\mathcal{B}} \\ | & | & \cdots & | & | \\ | & | & \cdots & | & | \end{vmatrix}$.

ATTENTION !
Bien entendu, le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base choisie.

Remarque
Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$, car $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$.

2) Propriétés

Proposition 16 (Formule de changement de base).
Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors

(i) *Pour toute famille $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, on a*
$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \cdots, x_n).$$

(ii) *En particulier :* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1.$

Preuve :

(i) Notons $A = Mat_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(x_1, \cdots, x_n)$, et $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in GL_n(\mathbb{K})$ (la matrice de passage). Les colonnes de A sont les $X_i = [x_i]_{\mathcal{B}}$, celles de A' sont les $X_i' = [x_i]_{\mathcal{B}'}$. Vu que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $X_i = PX_i'$ (voir le chapitre 2), on en déduit que
$$A = PA'$$
(puisque le produit matriciel se fait "ligne par colonne"). D'où
$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \det(A) = \det(P) \times \det(A') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \cdots, x_n).$$

(ii) Utiliser le (i) avec $(x_1, \cdots, x_n) = \mathcal{B}$.
On obtient $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

□

Proposition 17 (Caractérisation des familles liées en dimension n).
Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors, il y a équivalence entre :

(i) *La famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est liée* .

(ii) *Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = 0$* .

(iii) *Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = 0$* .

Preuve : La famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est liée si et seulement si la matrice des coordonnées des x_i dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ n'est pas inversible, donc de déterminant nul. □

Corollaire 18 (Caractérisation des bases en dimension n).
Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors, il y a équivalence entre :

(i) *La famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est une base de E* .

(ii) *Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$* .

(iii) *Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$* .

Preuve : Reformulation de la proposition précédente : pour une famille $(x_1, \cdots, x_n)$ dans un espace de dimension n, être une base équivaut à être non liée. $\square$

3) Orientation d'un espace vectoriel réel

Dans cette sous-section, $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$. On a vu que, pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, on a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$, donc si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ ou $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$.

Définition 19 (Orientation d'une base par rapport à une autre).
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. *On dit que la base $\mathcal{B}'$ a la même orientation que la base $\mathcal{B}$ si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$, une orientation contraire si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$* .

Proposition 20 (Relation d'équivalence d'orientation).
Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E.

(i) *$\mathcal{B}$ a même orientation que $\mathcal{B}$.*

(ii) *Si $\mathcal{B}'$ a même orientation que $\mathcal{B}$, alors $\mathcal{B}$ a même orientation que $\mathcal{B}'$.*

(iii) *Si $\mathcal{B}'$ a même orientation que $\mathcal{B}$ et si $\mathcal{B}''$ a même orientation que $\mathcal{B}'$, alors $\mathcal{B}''$ a même orientation que $\mathcal{B}$.*

Vocabulaire
On résume ceci en disant que la notion de même orientation est une **relation d'équivalence** sur l'ensemble des bases de E (réflexive, symétrique et transitive).

Preuve :

(i) Réflexivité : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1 > 0$, donc $\mathcal{B}$ a même orientation que $\mathcal{B}$.

(ii) Symétrie : $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}$, donc si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$, alors $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) > 0$.

(iii) Transitivité : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')$, donc si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') > 0$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') > 0$.

$\square$

Définition 21 (Orientation d'un e.v. réel, bases directes/indirectes).
Orienter *un espace E, c'est* **choisir une base "de référence" $\mathcal{B}_0$** .
On définit alors deux classes de bases :

- *les bases $\mathcal{B}$ telles que* $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$ *, appelées* **bases directes** .
- *les bases $\mathcal{B}$ telles que* $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$ *, appelées* **bases indirectes** .

Remarque
"Orienter" un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, c'est donc choisir une base $\mathcal{B}_0$ et décréter qu'elle est "directe".

Convention (Orientation canonique de $\mathbb{R}^n$)
On oriente classiquement l'espace $E = \mathbb{R}^n$ en fixant la base canonique comme base de référence : les bases directes sont donc celles qui ont un déterminant positif dans la base canonique.

Remarque
On a ainsi donné une définition mathématique rigoureuse de la notion de "base directe" (et elle ne se limite pas aux dimensions 2 et 3).

4) Lien avec la géométrie, aires et volumes

On fait ici le lien avec les notions géométriques étudiées en TSI 1. Les résultats seront admis.

Notation (dans le plan)
On notera $\mathcal{P}$ un plan affine (ensemble de points) et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel associé (c'est l'ensemble des vecteurs du plan $\mathcal{P}$, donc un espace vectoriel de dimension 2).

Proposition 22 (Interprétation géométrique du déterminant dans le plan).
Dans un plan affine $\mathcal{P}$ orienté et muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$:

$$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\overrightarrow{\mathcal{P}} \setminus \{\overrightarrow{0}\})^2, \qquad \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \sin(\theta),$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Le nombre $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est donc l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Elle est strictement positive si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base directe, négative sinon.

Dessin :

Notation (dans l'espace)
On notera $\mathcal{E}$ un espace affine (ensemble de points) et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel de dimension 3 associé.
Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sera noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, et le produit vectoriel sera noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

Proposition 23 (Interprétation géométrique du déterminant dans le plan).
Dans l'espace affine $\mathcal{E}$ orienté et muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$:

$$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in (\overrightarrow{\mathcal{E}} \setminus \{\overrightarrow{0}\})^3, \quad \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}).$$

Le nombre $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est donc le volume algébrique du parallélépipède construit sur les vecteurs* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$.
Il est strictement positif si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est une base directe, négatif sinon.*

Vocabulaire
Le réel $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$ est aussi appelé "produit mixte" et parfois noté $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

Remarque
Vu les propriétés du déterminant, on a

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}.$$

Dessin :

IV Déterminant d'un endomorphisme

Dans cette section, E est à nouveau un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1) Définition

Proposition 24 (Deux matrices semblables ont même déterminant).
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **Si** *$A$ et B sont semblables,* **alors** $\det(B) = \det(A)$.

Preuve : Par multiplicativité du déterminant, on a, pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$,

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \times \det(A) \times \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \times \det(A) \times \det(P) = \det(A).$$

$\square$

ATTENTION !
La proposition n'admet pas de réciproque : deux matrices ayant le même déterminant ne sont pas nécessairement semblables (par exemple, I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont de déterminant 1 mais ne sont pas semblables, puisque seule I_2 est semblable à I_2).

La proposition précédente donne un sens à la definition suivante :

Définition 25 (Déterminant d'un endomorphisme).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. *On appelle* **déterminant de** u *le déterminant de la matrice de* u *dans* **n'importe quelle base de** $\boldsymbol{E}$. *On note ce nombre* $\det(u)$.

ATTENTION !
On a $\det(u) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(u)) = \det(Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u))$ pour toute base $\mathcal{B}$.
Il est nécessaire d'avoir choisi **la même base au départ et à l'arrivée** !

Exemple
$\det(Id_E) = 1$, puisque quelle que soit la base $\mathcal{B}$, on a $Mat_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_n$.

Remarque
Le déterminant d'un endomorphisme est donc une notion intrinsèque : elle ne dépend pas d'une quelconque base.

2) Propriétés

Proposition 26 (Déterminant d'une composée, d'un produit externe).
Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. *On a alors :*

(i) $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda u) = \lambda^{\dim(E)} \det(u)$.

Preuve :

$\square$

Proposition 27 (Lien entre déterminant et bijectivité).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

(i) *u est bijectif* $\iff \det(u) \neq 0$.

(ii) *Dans ce cas, on a* $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

Preuve :

$\square$

Remarque (Caractérisation des automorphismes par le déterminant)
En dimension finie, on a donc $GL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \det(u) \neq 0\}$.