Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2020-2021

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 2
Compléments d'algèbre linéaire

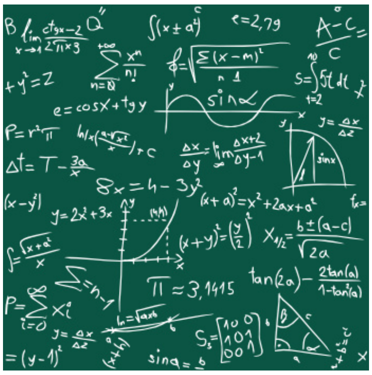

Table des matières

I Familles quelconques de vecteurs

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, noté E.
Dans cette première section, nous allons généraliser les résultats vus en première année (pour les familles finies) à des familles quelconques de vecteurs, éventuellement infinies.

1) Définition générale d'une famille de vecteurs

Définition 1 (Famille de vecteurs).

. . . .
. . . .
. . . .

ATTENTION !
A la différence d'un ensemble, une famille peut contenir **plusieurs fois le même vecteur** (c'est le cas si l'application x n'est pas injective).

Exemple (p-uplet)
Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, un ***p*-uplet** $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ (on dit aussi une "liste") est une famille de vecteurs indexée par l'ensemble $\boldsymbol{I = \{1, 2, \cdots, p\}}$. Indexer par un ensemble fini I revient à numéroter.

Exemple (Suite)
Une **suite** de vecteurs de E, notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une famille de vecteurs indexée par $\boldsymbol{I = \mathbf{N}}$ (ou une partie infinie de $\mathbb{N}$).

Exemple (Une famille de fonctions)
On peut indexer une famille par un ensemble d'indices **aussi gros que l'on veut** : par exemple, si on pose, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$, on peut envisager la famille $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ (ici $\boldsymbol{I = \mathbf{R}}$). C'est une famille de vecteurs de l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (un espace de fonctions, donc).

Remarque
En général, $I \subset \mathbb{R}$ et le plus souvent, on a $I \subset \mathbb{N}$ (les indices des vecteurs sont des entiers naturels).

Convention
Il existe une seule famille indexée par $\boldsymbol{I = \emptyset}$. On l'appelle **famille vide**.

Définition 2 (Sous-famille d'une famille de vecteurs).

. . . .
. . . .

Remarque
La famille vide est une sous-famille de n'importe quelle famille de vecteurs de E car on a $\emptyset \subset I$ pour tout ensemble I.

Définition 3 (Sur-famille).

. . . .

. . . .

Exemple
Si on considère $x, y, z \in E$, et $\mathcal{F} = (x, y, y)$, alors $\mathcal{F}' = (x, y)$ est une sous-famille de $\mathcal{F}$, et $\mathcal{F}'' = (x, y, x, y, z)$ est une sur-famille de $\mathcal{F}$.
En effet, si on pose $\mathcal{F}'' = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, on a

$$\mathcal{F}'' = (a_i)_{i \in I}, \qquad \mathcal{F} = (a_1, a_2, a_4) = (a_i)_{i \in J}, \qquad \mathcal{F}' = (a_1, a_2) = (a_i)_{i \in K},$$

avec $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $J = \{1, 2, 4\}$ et $K = \{1, 2\}$ (on a bien $K \subset J \subset I$).

Exemple
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$, la famille infinie $(X^{2k})_{k \in \mathbb{N}} = (1, X^2, X^4, X^6 \cdots)$ est une sous-famille de la famille $(X^i)_{i \in \mathbb{N}} = (1, X, X^2, X^3, \cdots)$. En effet, on a $(X^{2k})_{k \in \mathbb{N}} = (X^i)_{i \in J}$ avec $J = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ le sous-ensemble des entiers naturels pairs.

Rappel
Un ensemble I est dit **fini** s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection entre $\{1, 2, \cdots, n\}$ et I.
Cet entier n est unique et s'appelle **le cardinal de** I ; on le note $Card(I)$ ou $\#I$ ou encore $|I|$, c'est le "nombre d'éléments" de I.

Définition 4 (Famille finie, cardinal d'une famille).

. . . .

. . . .

Remarque
La famille vide est finie, elle est de cardinal 0 (et c'est la seule).
Une famille finie de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ peut **toujours** se réindexer par $I = \{1, \cdots, n\}$ (ou $I = \{0, \cdots, n-1\}$, etc.).

ATTENTION !
Le cardinal d'une famille finie **n'est pas le nombre d'éléments distincts** de cette famille (à la différence d'un ensemble). Par exemple, **l'ensemble** $\{x, x, x\} = \{x\}$ est de cardinal 1, mais la **famille** (x, x, x) est de cardinal 3.

2) Familles génératrices d'un espace vectoriel

Définition 5 (Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs).

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Rappel
Une somme indexée par $I = \emptyset$ vaut 0_E.
Donc, **la seule combinaison linéaire de la famille vide est le vecteur nul** 0_E.

ATTENTION !
Une combinaison linéaire est toujours une somme finie : même si la famille de vecteurs est infinie, on ne les utilise pas tous dans la combinaison !

Définition 6 (Ensemble des combinaisons linéaires d'une famille).

. . . .

Remarque
On a $Vect(\emptyset) = \{0_E\}$. Si $x \in E$, alors $Vect(x) = \{\lambda x,\ \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}x$.

Proposition 7 (Engendrement d'un espace vectoriel à l'aide des C.L.).

. . . .

(i) . . . .

(ii) . . . .
. . . .

. . . .

Preuve : Notons $V = Vect((x_i)_{i\in I})$.

(i) Montrons que V est un sev de E :

- le vecteur nul 0_E est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$ (prendre tous les coefficients nuls), donc $0_E \in V$.
- soit $x, y \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition de V, il existe deux sous-ensembles finis de I, notés J et K, et des familles finies de scalaires $(\alpha_i)_{i\in J}$, $(\beta_i)_{i\in K}$ tels que
$$x = \sum_{i\in J} \alpha_i x_i, \qquad y = \sum_{i\in K} \beta_i x_i.$$

On en déduit que

$$\lambda x + y = \sum_{i\in J} \lambda\alpha_i x_i + \sum_{i\in K} \beta_i x_i.$$

Posons alors $L = J \cup K$ (c'est un sous-ensemble fini de I), et pour tout $i \in L$,

$$\gamma_i = \begin{cases} \lambda\alpha_i & \text{si } i \in J \setminus K \\ \beta_i & \text{si } i \in K \setminus J \\ \lambda\alpha_i + \beta_i & \text{si } i \in J \cap K \end{cases}.$$

On a $\lambda x + y = \sum_{i\in L} \gamma_i x_i$, ce qui montre que $\lambda x + y \in V$.

(ii) Il est clair que $\forall i \in I$, $x_i = 1x_i \in V$. Le sous-espace V contient donc tous les x_i. Montrons enfin que V est le plus petit sev de E contenant tous les x_i : si W est un autre sev de E contenant tous les x_i, alors W contient toute combinaison linéaire $\sum_{i\in J} \alpha_i x_i$ (avec $J \subset I$, J fini) puisque W est stable par somme et multiplication externe. Donc $V \subset W$, ce qu'il fallait montrer.

□

Définition 8 (Famille génératrice).

. . . .

. . . .

Remarque

- Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de E.
- Le fait que $(x_i)_{i\in I}$ engendre E revient à dire que $E \subset Vect((x_i)_{i\in I})$, c'est-à-dire que tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs x_i (l'autre inclusion $Vect((x_i)_{i\in I}) \subset E$ est triviale).

Exemple

La famille finie $(e_1, e_2, e_3) = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
En effet, tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se décompose sous la forme :

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Exemple

La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}} = (1, X, X^2, X^3 \cdots)$ (infinie) est génératrice de $\mathbb{R}[X]$.
En effet, tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit sous la forme :

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d,$$

avec $a_0, \cdots, a_d \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{N}$, donc tout polynôme est combinaison linéaire des $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

ATTENTION !

Lorsqu'on veut montrer qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice d'un **sous-espace vectoriel F de E**, il faut vérifier deux choses :

(i) Que tous les vecteurs x_i **sont dans F**, ce qui n'est pas automatique (ça l'est seulement si $F = E$). Cela assure que $Vect((x_i)_{i\in I}) \subset F$.

(*ii*) Que tout vecteur $x \in F$ est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ ce qui assure que $F \subset Vect((x_i)_{i\in I})$.

Exemple
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2t = 0,\ y = z\}.$$

La famille $\mathcal{G}_1 = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de F :

En effet, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ z \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mais la famille $\mathcal{G}_2 = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ n'est pas génératrice de F, bien qu'elle comporte plus de vecteurs : en effet, le troisième vecteur **n'appartient pas à $\boldsymbol{F}$** ! Cette famille engendre donc un espace vectoriel plus gros que F.

Proposition 9 (Principe de réduction d'une famille génératrice).

. . . .

. . . .

Remarque
Cela signifie que dans une famille génératrice, si on enlève un vecteur qui est combinaison linéaire des autres, on obtient encore une famille génératrice.

Preuve : Soit $x \in E$. Vu que $(x_i)_{i\in I}$ engendre E, le vecteur x est combinaison linéaire des x_i donc il existe une partie finie $J \subset I$ et une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in J}$ tels que

$$x = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i = \lambda_{i_0} x_{i_0} + \sum_{i\in J\setminus\{i_0\}} \lambda_i x_i.$$

Or, x_{i_0} est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$, donc on peut écrire :

$$x_{i_0} = \sum_{i\in K} \alpha_i x_i,$$

où K est une partie finie de $I \setminus \{i_0\}$. D'où

$$x = \sum_{i\in K} (\lambda_{i_0}\alpha_i) x_i + \sum_{i\in J\setminus\{i_0\}} \lambda_i x_i.$$

En posant alors $L = K \cup (J \setminus \{i_0\})$ (c'est une partie finie de $I \setminus \{i_0\}$) et

$$\gamma_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i \in (J \setminus \{i_0\}) \setminus K \\ \lambda_{i_0}\alpha_i & \text{si } i \in K \setminus (J \setminus \{i_0\}) \\ \lambda_i + \lambda_{i_0}\alpha_i & \text{si } i \in (J \setminus \{i_0\}) \cap K \end{cases},$$

on a $x = \sum_{i \in L} \gamma_i x_i$, ce qui montre que x est combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$, et donc que la sous-famille $(x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ engendre E. $\square$

3) Familles liées, familles libres

Rappel (Famille finies libres/liées)

- Une famille finie $(x_1, \cdots, x_n)$ est **liée** s'il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$.
- Une famille finie $(x_1, \cdots, x_n)$ est **libre** si elle n'est pas liée, c'est-à-dire si

$$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \right).$$

Définition 10 (Famille infinie liée).

....
.... ,

Remarque

$(x_i)_{i \in I}$ est liée si et seulement si il existe une partie finie $J \subset I$ et une famille finie de scalaires $(\lambda_i)_{i \in J}$ **non tous nuls** tels que $\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0_E$.

Définition 11 (Famille infinie libre).

....
....

Remarque

$(x_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si pour toute partie finie $J \subset I$ et pour toute famille finie de scalaires $(\lambda_i)_{i \in J}$, on a

$$\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in J,\ \lambda_i = 0.$$

Convention
La famille vide (de cardinal 0) est libre.

Remarque
Il est clair que :

- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Exemple
Une famille (x) de cardinal 1 est libre si $x \neq 0_E$ et liée si $x = 0_E$.
En effet :

- si $x \neq 0_E$, alors on a $\lambda x = 0_E \implies \lambda = 0$.
- si $x = 0_E$, alors on a $1_{\mathbb{K}}.0_E = 0_E$ (combinaison linéaire non triviale nulle).

Exemple
Dans l'e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), la famille $(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$ est libre.
En effet :

$$\lambda \cos + \mu \sin = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \implies \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0.$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient $\lambda = 0$.
En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\mu = 0$.

Notation
Lorsque l'ensemble des indices I est une partie infinie de $\mathbb{R}$, alors les sous-familles finies $(x_i)_{i \in J}$ peuvent se noter $(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \cdots, i_n$ distincts dans I.

Exemple
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille infinie de fonctions $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ définie par $f_a : x \mapsto |x - a|$ est libre.

Proposition 12 (Caractérisation des familles liées).

. . . .

. . . .

Remarque
Cela signifie qu'une famille est liée ssi un des vecteurs est combinaison linéaire des autres)

Preuve :

Proposition 13 (Principe d'extension d'une famille libre).

. . . .

Preuve :

4) Bases

Définition 14 (Base).

. . . .

ATTENTION !
Selon l'espace E que l'on considère, une base peut être une famille **infinie**.

Exemple
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, on pose $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$
(le 1 étant à la i^e place). Alors, la famille $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la **base canonique de** $\mathbb{K}^n$.

Exemple
La famille vide est une base de l'espace vectoriel nul $\{0_E\}$.

Exemple
Si on considère $\mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors la famille $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$.
En effet :

- tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $z = a1 + bi$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, donc $z \in Vect(1, i)$, ce qui montre que $(1, i)$ est génératrice de $\mathbb{C}$.

- pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $a1 + bi = 0_{\mathbb{C}} \implies a = b = 0$, donc la famille $(1, i)$ est libre.

ATTENTION !
Si on considère $\mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors la famille $(1, i)$ n'est plus libre, car $i = i \times 1$ (vu que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut considérer des coefficients complexes dans les combinaisons linéaires). En fait, dans ce cas, la famille (1) est une base de $\mathbb{C}$.

Exemple
La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ (et elle est infinie). On l'appelle la **base canonique de** $\mathbb{K}[X]$.
En effet, on a précédemment vu que cette famille est génératrice de $\mathbb{K}[X]$ et elle est libre, car pour toute sous-famille finie $(X^{k_1}, \cdots, X^{k_n})$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $k_1, \cdots, k_n$ des entiers distincts), on a

$$\lambda_1 X^{k_1} + \cdots + \lambda_n X^{k_n} = 0_{\mathbb{K}[X]} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

par identification des coefficients.

5) Critère d'indépendance linéaire dans $\mathbb{K}[X]$

Dans l'espace des polynômes $\mathbb{K}[X]$, on dispose d'un critère pratique pour savoir si une famille est libre, ou même si c'est une base de $\mathbb{K}[X]$:

Proposition 15 (Condition suffisante d'indép. linéaire de polynômes).

(i) ....
....

(ii) ....
....

Preuve :

ATTENTION !
C'est une condition **suffisante** ! Elle n'est pas nécessaire. Il existe des familles libres dans $\mathbb{K}[X]$ formée de polynômes n'ayant pas des degrés distincts. Par exemple, la famille $(P_1, P_2, P_3) = (X, X+1, X^2)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 16 (Condition suffisante pour être une base de polynômes).

. . . .
. . . .

Preuve :

ATTENTION !
Là encore, la condition n'est pas nécessaire. Par exemple, la suite

$$(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots) = (X, X+1, X^2, X^3, X^4, \cdots)$$

est une base de $\mathbb{K}[X]$ (puisque $Vect(X, X+1) = Vect(1, X)$), et pourtant elle ne vérifie par la condition de la proposition 16.

II Somme de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie), et $F_1, \cdots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E.

1) Définition et structure

Définition 17 (Somme de sev).
On appelle **somme des sous-espaces vectoriels** $(F_i)_{1\leq i\leq k}$ *l'ensemble*

. . . .

On le note aussi . . . .

Remarque
Pour $k = 2$: $F_1 + F_2$ est l'ensemble des vecteurs x de E de la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.

Proposition 18 (Structure de la somme).
. . . .

Preuve :

2) Somme directe

Définition 19 (Somme directe).

. . . .

. . . .

. . . .

Dans ce cas, la somme se note . . . .

Proposition 20 (Caractérisation d'une somme directe).
Les sous-espaces $F_1, \cdots, F_k$ *sont en* **somme directe** *si et seulement si*

. . . .

. . . .

Preuve :

Remarque
Il n'y a pas d'autre caractérisation correcte (et simple d'utilisation) de la somme directe dans le cas où $k \geq 3$.

On admet le résultat suivant, très utile en pratique :

Proposition 21 (Base adaptée à une somme directe).
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, et $F_1, \cdots, F_k$ **des sev de $\boldsymbol{E}$ en somme directe**. *Pour chaque $i \in \{1, \cdots, k\}$, on considère* **$\boldsymbol{\mathcal{B}_i}$ une base de $\boldsymbol{F_i}$**. *Alors :*

(i) ....
.... *, dite "base adaptée à la somme directe $F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$".*

(ii) ....

Lorsqu'on a seulement deux sous-espaces, on dispose d'une caractérisation plus simple de la somme directe :

Proposition 22 (Caractérisation d'une somme directe de deux sev).
....

Preuve :

ATTENTION !
Cette caractérisation est fausse avec trois sev ou plus !

Exemple
Dans $\mathbb{R}^2$, les trois droites

$$\mathcal{D}_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x\}, \quad \mathcal{D}_3 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ y = -x\}$$

(qui sont des sous-espaces vectoriels de dimension 1) ne sont pas en somme directe, sinon le sous-espace somme $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_3$ serait de dimension 3, ce qui est impossible (tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ sont de dimension ≤ 2).
Pourtant on a $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \{(0;0)\}$ pour tout couple $(i;j)$ avec $i \neq j$.

3) Sous-espaces supplémentaires (rappels)

Définition 23 (Sous-espaces supplémentaires).
On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires** *s'ils sont en somme directe et si $E = F \oplus G$.*

Remarque
F et G sont supplémentaires dans $E \iff F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.

ATTENTION !
Ne pas confondre :

- "F et G en somme directe", ce qui signifie que tout vecteur **de $\boldsymbol{F+G}$** se décompose de manière unique en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
- "F et G supplémentaires", ce qui signifie que tout vecteur **de $\boldsymbol{E}$** se décompose de manière unique en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Rappelons les résultats suivants, vu en sup :

Proposition 24 (Existence d'un supplémentaire en dimension finie).
Si E est **de dimension finie**, *et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F possède au moins un supplémentaire G dans E. De plus,* $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$.

Proposition 25 (Formule de Grassmann).
Soit E un espace vectoriel **de dimension finie**, *et F et G deux sev de E. Alors*
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Corollaire 26 (Caractérisations de deux supplémentaires).
Soit E un espace vectoriel **de dimension finie**, *et F et G deux sev de E. Alors, il y a équivalence entre*

(i) *F et G sont supplémentaires dans E ;*

(ii) $F \cap G = \{0_E\}$ *et* $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ *;*

(iii) $F + G = E$ *et* $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

III Compléments sur les applications linéaires

1) Action d'une appl. linéaire sur les familles de vecteurs

Dans cette section, on fixe deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.

Proposition 27 (Image d'une famille génératrice).
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. ....

....

Preuve :

ATTENTION !
L'image d'une famille génératrice de E n'est **pas** nécessairement une famille génératrice **de $\boldsymbol{F}$!**

Proposition 28 (Image d'une famille liée/libre).
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

(i) . . . .

(ii) . . . .

Preuve :

ATTENTION !
L'image d'une famille libre n'est **pas** libre en général.

Proposition 29 (Caractérisation des isomorphismes par les bases).
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $(e_i)_{i\in I}$ une **base** *de E. Alors :*

. . . .

Remarque
Les isomorphismes sont donc les applications linéaires qui envoient une base de E sur une base de F.

Preuve :

2) Projecteurs et symétries

Définition 30 (Projecteur sur F parallèlement à G).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sev tels que $F \oplus G = E$.

. . . .

. . . .

ATTENTION !
Cette définition a un sens car F et G sont supplémentaires dans E.

Remarque
On définit de même le projecteur sur G parallèlement à F, noté $\boldsymbol{p_G^F}$. On a . . . .
puisque . . . .
On dit que p_F^G et p_G^F sont les **projecteurs associés à** la décomposition $\boldsymbol{E = F \oplus G}$.

<u>Dessin</u> :

Proposition 31 (Caractérisation des projecteurs).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p : E \to E$.
Alors, ...
Dans ce cas, p est le projecteur sur . . . . *parallèlement à* . . . .

Preuve :

ATTENTION !

Si un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\boldsymbol{p \circ p = p}$, **alors** c'est un projecteur et on a automatiquement la décomposition $E = Ker(p) \oplus Im(p)$.
Mais **la réciproque est fausse** : on peut avoir $E = Ker(p) \oplus Im(p)$ sans que l'endomorphisme p soit un projecteur.

Remarque

- Pour tout projecteur p, on a la décomposition

  ....

- **A retenir** : pour tout projecteur p, on a

  ....

  On a donc également la décomposition ....

Définition 32 (Symétrie par rapport à $\boldsymbol{F}$ et parallèlement à $\boldsymbol{G}$).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sev tels que $F \oplus G = E$.

....

....

....

Remarque (Relation entre symétries et projecteurs)

- On remarque que ....
- On définit de même la symétrie s_G^F par ....

<u>Dessin</u> :

On admet la caractérisation suivante, qui se démontre comme celle des projecteurs :

Proposition 33 (Caractérisation des symétries).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $s : E \to E$.
Alors,
. . . .
Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à . . . . *parallèlement à* . . . .

Remarque
- Toute symétrie s est un automorphisme de E, et on a $s^{-1} = s$, puisque $s \circ s = Id_E$.
- **Si** un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\boldsymbol{s \circ s = Id_E}$, **alors** c'est une symétrie et on a automatiquement la décomposition $E = Ker(s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E)$.

ATTENTION !
Pour une symétrie s, $Ker(s) = \{0_E\}$ et $Im(s) = E$ (car s bijective).

Remarque
Pour toute symétrie s, on a la décomposition

. . . .

3) Formes linéaires et hyperplans

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition 34 (Forme linéaire sur E).
. . . .

Exemple
- Pour tout vecteur $a = (a_1, \cdots, a_n)$ de $\mathbb{K}^n$, l'application

  . . . .
  est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.
- L'application $\psi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ définie par . . . . est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.

Lemme 35 (Rang d'une forme linéaire).
. . . .

Preuve : $Im(\phi)$ est un sev de $\mathbb{K}$, et $\dim(\mathbb{K}) = 1$, donc $\dim(Im(\phi)) \in \{0; 1\}$. □

Définition 36 (Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie).
On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

....

Exemple
Les hyperplans du plan $\mathbb{R}^2$ sont les droites "vectorielles" (celles qui passent par $(0;0)$).
Les hyperplans de l'espace $\mathbb{R}^3$ sont les plans "vectoriels" (ceux qui passent par $(0;0;0)$).

Proposition 37 (Noyau d'une forme linéaire non nulle).

....
....

Preuve : D'après le théorème du rang :

$$\dim(Ker(\phi)) = \dim(E) - \dim(Im(\phi)) = \dim(E) - rg(\phi).$$

La forme linéaire ϕ étant non nulle, elle est de rang 1 (voir prop 35).
Donc $\dim(Ker(\phi)) = n - 1$.

$\square$

Exemple
L'ensemble $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + 3z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, et une base

de H est

....

Exemple
Pour tout vecteur $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ **non nul**, l'ensemble

....
est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$
(en effet, H est le noyau de la forme linéaire ....).

Si $a_1 \neq 0$, une base de H est

....

Proposition 38 (Caractérisation comme supplémentaire d'une droite).
Soit E de dimension finie et H un sous-espace vectoriel de E.

. . . .

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ Si H est un hyperplan de E, alors en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, H possède au moins un supplémentaire, noté D.
Nécessairement, $\dim(D) = \dim(E) - \dim(H) = n - (n-1) = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $E = H \oplus D$ avec $\dim(D) = 1$, alors on a $\dim(H) = \dim(E) - \dim(D) = n-1$, donc H est un hyperplan de E.

□

Remarque
En d'autres termes, les hyperplans sont les **supplémentaires des droites**.
C'est cette définition qu'on adopte si on veut parler d'hyperplan de E lorsque E est de dimension infinie.

IV Changements de base

1) Rappels

Définition 39 (Matrice de passage d'une base à une autre).
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni de deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$.

. . . .

. . . .

. . . .

Remarque
Schématiquement,

. . . .
(on exprime "les nouveaux vecteurs en fonction des anciens").
On remarque que
. . . .

ATTENTION !

Lorsqu'on envisage P comme la matrice de $Id_E : E \to E$:
* la "nouvelle" base $\mathcal{B}' = (e'_j)_{1\leq j\leq n}$ est **à la source (espace de départ)**,
* l'"ancienne" base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est **au but (espace d'arrivée)**.

Proposition 40 ("Matrices de passage=matrices inversibles").
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) *Toute matrice de passage P (d'une base $\mathcal{B}$ de E à une autre base $\mathcal{B}'$ de E) est* **inversible** *: $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P^{-1} = Mat_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.*

(ii) *Réciproquement, toute matrice* **inversible** *$P \in GL_n(\mathbb{K})$ est une matrice de passage entre deux bases de E.*

Preuve :

(i) On a $P = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$, et l'application Id_E est bijective, donc sa matrice représentative P est inversible. De plus, $P^{-1} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_E^{-1}) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_E) = Mat_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

(ii) Si P est une matrice carrée inversible, alors en notant $\mathcal{B}$ une base quelconque de E, il existe un unique endomorphisme $f : E \to E$ tel que $P = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. Puisque P est inversible, f est bijectif, donc la famille image $f(\mathcal{B})$ est aussi une base de E, notée $\mathcal{B}'$ (on rappelle qu'un isomorphisme transforme une base en

une base). Du coup, les colonnes de P représentent les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, ce qui montre que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

□

Remarque

- Une même matrice inversible P peut représenter **plusieurs changements de bases différents** : par exemple, une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ peut être vue comme :
  - une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{R}^3$.
  - une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$.
- L'endomorphisme $Id_E : x \mapsto x$ peut donc se représenter par **d'autres matrices que I_n** (en prenant des bases de départ et d'arrivée différentes).

Exemple

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (elle est bien inversible, car de rang 3).

- P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ avec $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ n'importe quelle base de $\mathbb{R}^3$ (par exemple la base canonique) et
  ....
- Mais P est aussi la matrice de passage de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}_4$ avec $\mathcal{B}_3 = (P_1, P_2, P_3)$ une base quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$ et ....

Notation
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim. $n \geq 1$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour $x \in E$, on notera $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ le vecteur colonne de $\mathbb{K}^n$ formé des **coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 41 (Formule de changement de coordonnées).
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Notons $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ATTENTION !
Avec P, on obtient donc “les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles” :
$\dots\dots\dots\dots\dots$, avec $X = [x]_{\mathcal{B}}$ et $X' = [x]_{\mathcal{B}'}$
(alors que P représente "les nouveaux vecteurs en fonction des anciens").

Preuve :

Proposition 42 (Formule de changement de bases pour $\boldsymbol{f \in \mathcal{L}(E, F)}$).
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ muni de deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$.
Soit F un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni de deux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$.
Soit $\boldsymbol{f \in \mathcal{L}(E, F)}$. On note

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Alors on a
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Preuve :

Corollaire 43 (Cas du changement de base simultané pour $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{L}(E)}$).
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni de deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$.
Soit $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{L}(E)}$. On note

. . . .
et . . . . *. On a alors* . . . .

Preuve : On obtient directement le corollaire en posant $P = Q$ dans la preuve précédente. □

2) Matrices semblables

Dorénavant, nous allons considérer **des endomorphismes** $f \in \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$, et écrire leur matrices (carrées) dans des couples de bases du type $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)$ (**même base à la source et au but**). On adopte la notation

. . . .

Définition 44 (Matrices semblables).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. . . . .
. . . .

Proposition 45 (Propriétés de la relation de similitude sur $\boldsymbol{\mathcal{M}_n}(\mathbb{K})$).
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toutes matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- (i) *A est semblable à A ("réflexivité"),*
- (ii) *si B est semblable à A, alors A est semblable à B ("symétrie"),*
- (iii) *si B est semblable à A et si C est semblable à B, alors C est semblable à A ("transitivité").*

On dira alors "A et B sont semblables" plutôt que "B est semblable à A".

Preuve :

Proposition 46 (Caractérisation des matrices semblables).
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont semblables} \iff \begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ représentent un même endomorphisme} \\ f \in \mathcal{L}(E) \text{ dans des bases } (\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) \text{ et } (\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_E), \end{array}$$

Preuve : Cela résulte directement du corollaire 43. □

ATTENTION !
Il est nécessaire dans chaque couple de bases d'avoir **la même base à la source et au but** !

Remarque

- Deux matrices semblables ont même rang (puisqu'elles représentent le même endomorphisme), mais la réciproque est fausse.
  Par exemple, les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont de rang 2, mais ne sont pas semblables :
  ....
- En général, il est difficile de savoir si deux matrices sont semblables.

Proposition 47 ($\boldsymbol{P^{-1}AP}$ puissance $\boldsymbol{k}$).
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) . . . .

(ii) . . . .

Preuve :

V Compléments sur les matrices

n et p désignent des entiers naturels non nuls. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le coefficient à la i^e ligne et j^e colonne de A sera noté $a_{i,j}$ ou $A[i,j]$.

1) Base des matrices élémentaires

Définition 48 (Matrice élémentaire $\boldsymbol{E_{i,j}}$).
Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, ...

....
C'est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le $(i,j)^e$ *qui vaut* 1.

Proposition 49 (Base des matrices élémentaires).

....

....

....

Preuve :

2) Transposition, matrices symétriques, antisymétriques

Définition 50 (Transposée d'une matrice).
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on appelle **transposée** *de A la matrice $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A :*

. . . .

On note . . . . *ou* . . . .

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, alors . . . .

Si $B = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -5 \\ 1 & \mathbf{0} & e \\ \sqrt{3} & -1 & \mathbf{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors . . . .

(transposer une matrice carrée revient à faire une symétrie par rapport à sa diagonale).

Proposition 51 (Linéarité de la transposition).

(i) La transposition $T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array} \right.$ *est une appli. linéaire :*

. . . .

(ii) De plus, on a . . . .

Preuve :

La proposition suivante est difficile à montrer, nous l'admettrons :

Proposition 52 (Invariance du rang par transposition).
Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *on a* ....

Proposition 53 (Transposée d'un produit, d'un inverse).

(i) *Pour toutes* $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, *on a* ....

(ii) *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *alors* ....

....

Preuve :

Définition 54 (Matrices symétriques, antisymétriques).
Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite .... , ... On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

Remarque

- Une matrice carrée symétrique est une matrice dont les coefficients sont symétriques par rapport à sa diagonale) :
$$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique, alors ses coefficients diagonaux sont nuls (mais la réciproque est fausse bien entendu). En effet, on a
$$A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
ce qui entraîne :
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple

On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 4 \\ 7 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

3) Trace d'une matrice

Définition 55 (Trace d'une matrice carrée).
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ....

....

Remarque
La trace d'une matrice carrée est donc la somme de ses éléments diagonaux.

Proposition 56 (Linéarité de la trace).
....

Preuve :

Proposition 57 (Trace d'un produit).
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors, on a* ....

Preuve :

ATTENTION !
On n'a **pas** $Tr(AB) = Tr(A) \times Tr(B)$!

4) Trace d'un endomorphisme

Proposition 58 (Deux matrices semblables ont même trace).
Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ....

Preuve :

ATTENTION !
La proposition n'admet pas de réciproque : deux matrices ayant la même trace ne sont pas nécessairement semblables (par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont même trace mais ne sont pas semblables).

Définition 59 (Trace d'un endomorphisme).
E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

. . . . :
. . . .

. . . .

Remarque
Cette définition a un sens car toutes les matrices représentatives de f avec **même base à la source et au but** sont semblables entre elles, et donc ont même trace.

ATTENTION !
Il est **absolument nécessaire d'avoir la même base à la source et au but**, sinon la trace change.

Exemple
On a . . . ., puisque pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a . . . .

Exemple (Trace d'un projecteur)
Si p est un projecteur de E, alors $tr(p) = rg(p)$.

Exemple (Trace d'une symétrie)
Si s est une symétrie de E, alors $tr(s) = \dim(Ker(s - Id_E)) - \dim(Ker(s + Id_E))$.