Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 2
Compléments d'algèbre linéaire

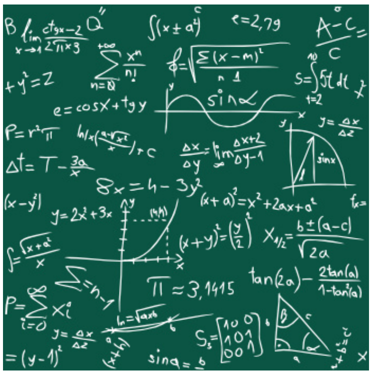

Table des matières

I Familles quelconques de vecteurs

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, noté E.
Dans cette première section, nous allons généraliser les résultats vus en première année (pour les familles finies) à des familles quelconques de vecteurs, éventuellement infinies.

1) Définition générale d'une famille de vecteurs

Définition 1 (Famille de vecteurs).
Une **famille de vecteurs de E** *indexée par un ensemble non vide I*
est une application $x : I \to E$ (à chaque $i \in I$, on associe un vecteur $x_i \in E$).
On la note $(x_i)_{i\in I}$, et I est appelé ensemble des indices.

ATTENTION !
A la différence d'un ensemble, une famille peut contenir **plusieurs fois le même vecteur** (c'est le cas si l'application x n'est pas injective).

Exemple (p-uplet)
Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, un **p-uplet** $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ (on dit aussi une "liste") est une famille de vecteurs indexée par l'ensemble $\boldsymbol{I = \{1, 2, \cdots, p\}}$. Indexer par un ensemble fini I revient à numéroter.

Exemple (Suite)
Une **suite** de vecteurs de E, notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une famille de vecteurs indexée par $\boldsymbol{I = \mathbf{N}}$ (ou une partie infinie de $\mathbb{N}$).

Exemple (Une famille de fonctions)
On peut indexer une famille par un ensemble d'indices **aussi gros que l'on veut** : par exemple, si on pose, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$, on peut envisager la famille $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ (ici $\boldsymbol{I = \mathbf{R}}$). C'est une famille de vecteurs de l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (un espace de fonctions, donc).

Remarque
En général, $I \subset \mathbb{R}$ et le plus souvent, on a $I \subset \mathbb{N}$ (les indices des vecteurs sont des entiers naturels).

Convention
Il existe une seule famille indexée par $\boldsymbol{I = \emptyset}$. On l'appelle **famille vide**.

Définition 2 (Sous-famille d'une famille de vecteurs).
Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle **sous-famille de $\mathcal{F}$**
toute famille $\mathcal{F}'$ de la forme $\mathcal{F}' = (x_i)_{i\in J}$, où $J \subset I$.

Remarque
La famille vide est une sous-famille de n'importe quelle famille de vecteurs de E car on a $\emptyset \subset I$ pour tout ensemble I.

Définition 3 (Sur-famille).
Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux familles de vecteurs de E, alors on dit que
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est une sur-famille de $\boldsymbol{\mathcal{F}'}$ si $\boldsymbol{\mathcal{F}'}$ est une sous-famille de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Exemple
Si on considère $x, y, z \in E$, et $\mathcal{F} = (x, y, y)$, alors $\mathcal{F}' = (x, y)$ est une sous-famille de $\mathcal{F}$, et $\mathcal{F}'' = (x, y, x, y, z)$ est une sur-famille de $\mathcal{F}$.
En effet, si on pose $\mathcal{F}'' = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, on a

$$\mathcal{F}'' = (a_i)_{i\in I}, \qquad \mathcal{F} = (a_1, a_2, a_4) = (a_i)_{i\in J}, \qquad \mathcal{F}' = (a_1, a_2) = (a_i)_{i\in K},$$

avec $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $J = \{1, 2, 4\}$ et $K = \{1, 2\}$ (on a bien $K \subset J \subset I$).

Exemple
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$, la famille infinie $(X^{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (1, X^2, X^4, X^6 \cdots)$ est une sous-famille de la famille $(X^i)_{i\in\mathbb{N}} = (1, X, X^2, X^3, \cdots)$. En effet, on a $(X^{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (X^i)_{i\in J}$ avec $J = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ le sous-ensemble des entiers naturels pairs.

Rappel
Un ensemble I est dit **fini** s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection entre $\{1, 2, \cdots, n\}$ et I.
Cet entier n est unique et s'appelle **le cardinal de** I ; on le note $Card(I)$ ou $\#I$ ou encore $|I|$, c'est le "nombre d'éléments" de I.

Définition 4 (Famille finie, cardinal d'une famille).
Une **famille** *$(x_i)_{i\in I}$ de E est dite* **finie** *si l'ensemble des indices I est fini.*
Dans ce cas, le cardinal de I est appelé **cardinal de la famille $\boldsymbol{(x_i)_{i\in I}}$.**

Remarque
La famille vide est finie, elle est de cardinal 0 (et c'est la seule).
Une famille finie de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ peut **toujours** se réindexer par $I = \{1, \cdots, n\}$ (ou $I = \{0, \cdots, n-1\}$, etc.).

ATTENTION !
Le cardinal d'une famille finie **n'est pas le nombre d'éléments distincts** de cette famille (à la différence d'un ensemble). Par exemple, **l'ensemble** $\{x, x, x\} = \{x\}$ est de cardinal 1, mais la **famille** (x, x, x) est de cardinal 3.

2) Familles génératrices d'un espace vectoriel

Définition 5 (Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs).
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
Une **combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$** *est un vecteur $x \in E$ de la forme $x = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i$, où J est un sous-ensemble* **fini** *de I et $(\lambda_i)_{i\in J}$ est une famille* **finie** *de "scalaires" de $\mathbb{K}$ (réels ou complexes).*

Rappel
Une somme indexée par $I = \emptyset$ vaut 0_E.
Donc, **la seule combinaison linéaire de la famille vide est le vecteur nul** 0_E.

ATTENTION !
Une combinaison linéaire est toujours une somme finie : même si la famille de vecteurs est infinie, on ne les utilise pas tous dans la combinaison !

Définition 6 (Ensemble des combinaisons linéaires d'une famille).
On note $\boldsymbol{Vect((x_i)_{i\in I})}$ *l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i\in I}$.*

Remarque
On a $Vect(\emptyset) = \{0_E\}$. Si $x \in E$, alors $Vect(x) = \{\lambda x,\ \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}x$.

Proposition 7 (Engendrement d'un espace vectoriel à l'aide des C.L.).
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Alors, :

(i) *$Vect((x_i)_{i\in I})$ est un sous-espace vectoriel de E ;*

(ii) *$Vect((x_i)_{i\in I})$ est le* **plus petit sous-espace vectoriel** *de E contenant tous les vecteurs x_i.*

On dit que $Vect((x_i)_{i\in I})$ est le **sous-espace engendré par $(x_i)_{i\in I}$**.

Preuve : Notons $V = Vect((x_i)_{i\in I})$.

(i) Montrons que V est un sev de E :

- le vecteur nul 0_E est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$ (prendre tous les coefficients nuls), donc $0_E \in V$.
- soit $x, y \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition de V, il existe deux sous-ensembles finis de I, notés J et K, et des familles finies de scalaires $(\alpha_i)_{i\in J}$, $(\beta_i)_{i\in K}$ tels que

$$x = \sum_{i\in J} \alpha_i x_i, \qquad y = \sum_{i\in K} \beta_i x_i.$$

On en déduit que
$$\lambda x + y = \sum_{i\in J} \lambda\alpha_i x_i + \sum_{i\in K} \beta_i x_i.$$
Posons alors $L = J \cup K$ (c'est un sous-ensemble fini de I), et pour tout $i \in L$,
$$\gamma_i = \begin{cases} \lambda\alpha_i & \text{si } i \in J \setminus K \\ \beta_i & \text{si } i \in K \setminus J \\ \lambda\alpha_i + \beta_i & \text{si } i \in J \cap K \end{cases}.$$
On a $\lambda x + y = \sum_{i\in L} \gamma_i x_i$, ce qui montre que $\lambda x + y \in V$.

(ii) Il est clair que $\forall i \in I$, $x_i = 1x_i \in V$. Le sous-espace V contient donc tous les x_i. Montrons enfin que V est le plus petit sev de E contenant tous les x_i : si W est un autre sev de E contenant tous les x_i, alors W contient toute combinaison linéaire $\sum_{i\in J} \alpha_i x_i$ (avec $J \subset I$, J fini) puisque W est stable par somme et multiplication externe. Donc $V \subset W$, ce qu'il fallait montrer.

$\square$

Définition 8 (Famille génératrice).
On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une **famille génératrice de E** *(ou "engendre E") si* ....
$E = Vect((x_i)_{i\in I})$. ....

Remarque

- Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de E.
- Le fait que $(x_i)_{i\in I}$ engendre E revient à dire que $E \subset Vect((x_i)_{i\in I})$, c'est-à-dire que tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs x_i (l'autre inclusion $Vect((x_i)_{i\in I}) \subset E$ est triviale).

Exemple
La famille finie $(e_1, e_2, e_3) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
En effet, tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se décompose sous la forme :
$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Exemple
La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}} = (1, X, X^2, X^3 \cdots)$ (infinie) est génératrice de $\mathbb{R}[X]$.
En effet, tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit sous la forme :
$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d,$$
avec $a_0, \cdots, a_d \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{N}$, donc tout polynôme est combinaison linéaire des $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

ATTENTION !
Lorsqu'on veut montrer qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice d'un **sous-espace vectoriel F de E**, il faut vérifier deux choses :

(i) Que tous les vecteurs x_i **sont dans F**, ce qui n'est pas automatique (ça l'est seulement si $F = E$). Cela assure que $Vect((x_i)_{i\in I}) \subset F$.

(*ii*) Que tout vecteur $x \in F$ est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ ce qui assure que $F \subset Vect((x_i)_{i\in I})$.

Exemple

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2t = 0,\ y = z\}.$$

La famille $\mathcal{G}_1 = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de F :

En effet, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ z \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mais la famille $\mathcal{G}_2 = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ n'est pas génératrice de F, bien qu'elle comporte plus de vecteurs : en effet, le troisième vecteur **n'appartient pas à *F***! Cette famille engendre donc un espace vectoriel plus gros que F.

Proposition 9 (Principe de réduction d'une famille génératrice).
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. S'il existe $i_0 \in I$ tel que
$x_{i_0} \in Vect((x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}})$, alors la sous-famille $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ est génératrice de E.

Remarque

Cela signifie que dans une famille génératrice, si on enlève un vecteur qui est combinaison linéaire des autres, on obtient encore une famille génératrice.

Preuve : Soit $x \in E$. Vu que $(x_i)_{i\in I}$ engendre E, le vecteur x est combinaison linéaire des x_i donc il existe une partie finie $J \subset I$ et une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in J}$ tels que

$$x = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i = \lambda_{i_0} x_{i_0} + \sum_{i\in J\setminus\{i_0\}} \lambda_i x_i.$$

Or, x_{i_0} est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$, donc on peut écrire :

$$x_{i_0} = \sum_{i\in K} \alpha_i x_i,$$

où K est une partie finie de $I \setminus \{i_0\}$. D'où

$$x = \sum_{i\in K} (\lambda_{i_0}\alpha_i) x_i + \sum_{i\in J\setminus\{i_0\}} \lambda_i x_i.$$

En posant alors $L = K \cup (J \setminus \{i_0\})$ (c'est une partie finie de $I \setminus \{i_0\}$) et

$$\gamma_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i \in (J \setminus \{i_0\}) \setminus K \\ \lambda_{i_0}\alpha_i & \text{si } i \in K \setminus (J \setminus \{i_0\}) \\ \lambda_i + \lambda_{i_0}\alpha_i & \text{si } i \in (J \setminus \{i_0\}) \cap K \end{cases},$$

on a $x = \sum_{i \in L} \gamma_i x_i$, ce qui montre que x est combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$, et donc que la sous-famille $(x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ engendre E. □

3) Familles liées, familles libres

Rappel (Famille finies libres/liées)

- Une famille finie $(x_1, \cdots, x_n)$ est **liée** s'il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$.
- Une famille finie $(x_1, \cdots, x_n)$ est **libre** si elle n'est pas liée, c'est-à-dire si

$$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \right).$$

Définition 10 (Famille infinie liée).
Une famille infinie $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite **liée** *s'il existe* ....
une sous-famille **finie** *$(x_i)_{i \in J}$ qui soit liée* , ...

Remarque
$(x_i)_{i \in I}$ est liée si et seulement si il existe une partie finie $J \subset I$ et une famille finie de scalaires $(\lambda_i)_{i \in J}$ **non tous nuls** tels que $\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0_E$.

Définition 11 (Famille infinie libre).
Une famille infinie $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite **libre** *si toutes ses* ....
sous-familles finies $(x_i)_{i \in J}$ (avec $J \subset I$) sont libres. ....

Remarque
$(x_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si pour toute partie finie $J \subset I$ et pour toute famille finie de scalaires $(\lambda_i)_{i \in J}$, on a

$$\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in J, \ \lambda_i = 0.$$

Convention
La famille vide (de cardinal 0) est libre.

Remarque
Il est clair que :

- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Exemple
Une famille (x) de cardinal 1 est libre si $x \neq 0_E$ et liée si $x = 0_E$.
En effet :

- si $x \neq 0_E$, alors on a $\lambda x = 0_E \implies \lambda = 0$.
- si $x = 0_E$, alors on a $1_{\mathbb{K}}.0_E = 0_E$ (combinaison linéaire non triviale nulle).

Exemple
Dans l'e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), la famille $(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$ est libre.
En effet :

$$\lambda \cos + \mu \sin = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \implies \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0.$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient $\lambda = 0$.
En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\mu = 0$.

Notation
Lorsque l'ensemble des indices I est une partie infinie de $\mathbb{R}$, alors les sous-familles finies $(x_i)_{i \in J}$ peuvent se noter $(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \cdots, i_n$ distincts dans I.

Exemple
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille infinie de fonctions $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ définie par $f_a : x \mapsto |x - a|$ est libre.
En effet, soit une sous-famille finie $(f_{a_1}, \cdots, f_{a_n})$, avec $(a_1, \cdots, a_n)$ des réels distincts.
Montrons que $(f_{a_1}, \cdots, f_{a_n})$ est libre en cherchant tous les réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ tels que

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_{a_1} + \ldots + \lambda_n f_{a_n} = 0 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 f_{a_1}(x) + \ldots + \lambda_n f_{a_n}(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 |x - a_1| + \ldots + \lambda_n |x - a_n| = 0. \end{aligned}$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Alors la fonction $\lambda_1 f_{a_1} + \ldots + \lambda_n f_{a_n}$ n'est pas dérivable en a_i (car la fonction $x \mapsto |x - a_i|$ n'est pas dérivable en a_i et les autres sont dérivables en a_i). Or, cette fonction doit être égale à la fonction nulle qui, elle, est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc nous aboutissons à une absurdité. Ainsi, tous les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont nuls, ce qui signifie que la famille $(f_{a_1}, \ldots, f_{a_n})$ est libre. En conclusion la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Proposition 12 (Caractérisation des familles liées).
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille non vide de vecteurs de E. Alors

....

$(x_i)_{i\in I}$ *est* **liée** $\iff \exists i_0 \in I,\ x_{i_0} \in Vect\big((x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}\big)$.

....

Remarque
Cela signifie qu'une famille est liée ssi un des vecteurs est combinaison linéaire des autres)

Preuve :

$\boxed{\Longleftarrow}$ Evident car si $x_{i_0} = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i$ (avec $J \subset I$ fini, et $i_0 \notin J$), on a

$$1 \times x_{i_0} - \sum_{i\in J} \lambda_i x_i = 0,$$

d'où l'existence d'une combinaison linéaire nulle et non triviale (puisque le premier coefficient vaut 1 donc est non nul), qui montre que $(x_i)_{i\in I}$ est liée.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $(x_i)_{i\in I}$ est liée, il existe une combinaison linéaire nulle $\sum_{i\in J} \lambda_i x_i = 0_E$ à coefficients non tous nuls. En isolant un terme $\lambda_{i_0} x_{i_0}$ possédant un coefficient non nul, on obtient

$$x_{i_0} = \sum_{i\in J\setminus\{i_0\}} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}}\right) x_i,$$

d'où x_{i_0} est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

$\square$

Proposition 13 (Principe d'extension d'une famille libre).
Si $(x_i)_{i\in I}$ est libre et si $x \notin Vect((x_i)_{i\in I})$, alors la surfamille $(x, (x_i)_{i\in I})$ est libre.

Preuve : Soit J une partie finie de I. Montrons que la sous-famille finie $(x, (x_i)_{i\in J})$ est libre. Supposons donc que

$$\lambda x + \sum_{i\in J} \lambda_i x_i = 0_E,$$

où λ et les λ_i sont des scalaires.
Montrons que $\lambda = 0$ et que $\forall i \in J,\ \lambda_i = 0$.
Tout d'abord, $\lambda = 0$ car sinon, on obtient (en divisant par λ) que x est combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in J}$, donc $x \in Vect((x_i)_{i\in I})$, ce qui est impossible car contraire aux hypothèses.
Puisque $\lambda = 0$, l'hypothèse se réécrit donc $\sum\limits_{i\in J} \lambda_i x_i = 0_E$, ce qui entraîne $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in J$, puisque $(x_i)_{i\in I}$ est libre. $\square$

4) Bases

Définition 14 (Base).
Une **base** *de E est une famille $(e_i)_{i\in I}$ libre et génératrice de E.*
. . . .

ATTENTION !
Selon l'espace E que l'on considère, une base peut être une famille **infinie**.

Exemple
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, on pose $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$
(le 1 étant à la i^e place). Alors, la famille $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la **base canonique de** $\mathbb{K}^n$.

Exemple
La famille vide est une base de l'espace vectoriel nul $\{0_E\}$.

Exemple
Si on considère $\mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors la famille $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$.
En effet :

- tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $z = a1 + bi$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, donc $z \in Vect(1, i)$, ce qui montre que $(1, i)$ est génératrice de $\mathbb{C}$.

- pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $a1 + bi = 0_{\mathbb{C}} \implies a = b = 0$, donc la famille $(1, i)$ est libre.

ATTENTION !
Si on considère $\mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors la famille $(1, i)$ n'est plus libre, car $i = i \times 1$ (vu que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut considérer des coefficients complexes dans les combinaisons linéaires). En fait, dans ce cas, la famille (1) est une base de $\mathbb{C}$.

Exemple
La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ (et elle est infinie). On l'appelle la **base canonique de** $\mathbb{K}[X]$.
En effet, on a précédemment vu que cette famille est génératrice de $\mathbb{K}[X]$ et elle est libre, car pour toute sous-famille finie $(X^{k_1}, \cdots, X^{k_n})$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $k_1, \cdots, k_n$ des entiers distincts), on a

$$\lambda_1 X^{k_1} + \cdots + \lambda_n X^{k_n} = 0_{\mathbb{K}[X]} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

par identification des coefficients.

5) Critère d'indépendance linéaire dans $\mathbb{K}[X]$

Dans l'espace des polynômes $\mathbb{K}[X]$, on dispose d'un critère pratique pour savoir si une famille est libre, ou même si c'est une base de $\mathbb{K}[X]$:

Proposition 15 (Condition suffisante d'indép. linéaire de polynômes).

(*i*) *Toute famille finie* $(P_1, \cdots, P_n)$ *de* $\mathbb{K}[X]$ *formée de polynômes* **non nuls de degrés deux à deux distincts** *est libre* .

(*ii*) *Toute suite* $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{K}[X]$ *formée de polynômes* **non nuls de degrés deux à deux distincts est libre** .

Preuve :

(*i*) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ (le cardinal de la famille).

- Pour $n = 1$, c'est évident car une famille formée d'un seul vecteur non nul (ici (P_1)) est libre.
- Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que le résultat soit vrai pour toute famille de cardinal n. Considérons alors une famille $(P_1, \cdots, P_{n+1})$ de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, et montrons qu'elle est libre. Quitte à permuter (ça ne change pas le caractère libre ou lié de la famille), on peut supposer que $\deg(P_{n+1}) > \deg(P_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Par hypothèse de récurrence, on sait que la famille $(P_1, \cdots, P_n)$ est libre (puisque formée elle aussi de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts). Le vecteur P_{n+1} n'étant pas combinaison linéaire de $(P_1, \cdots, P_n)$ (à cause des degrés), la surfamille $(P_1, \cdots, P_n, P_{n+1})$ est libre.

(*ii*) C'est immédiat car d'après (*i*), toutes les sous-familles finies de $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont libres.

$\square$

ATTENTION !

C'est une condition **suffisante**! Elle n'est pas nécessaire. Il existe des familles libres dans $\mathbb{K}[X]$ formée de polynômes n'ayant pas des degrés distincts. Par exemple, la famille $(P_1, P_2, P_3) = (X, X+1, X^2)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 16 (Condition suffisante pour être une base de polynômes).
Toute suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{K}[X]$ *telle que* $\forall k \in \mathbb{N},\ \deg(P_k) = k$
. . . .
est une base de $\mathbb{K}[X]$.
. . . .

Preuve :

- Déjà, une telle famille est libre, puisque formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts.
- Fixons $n \in \mathbb{N}$.
  Tous les $(P_i)_{0\leq i\leq n}$ sont de degré $\leq n$, donc la famille finie $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille de $\mathbb{K}_n[X]$ (de cardinal $n+1$). Cette famille finie est libre (d'après la proposition 15). En outre, on sait que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, donc $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
  En particulier, le monôme X^n est combinaison linéaire de $(P_0, \cdots, P_n)$, et donc de la famille infinie $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que tout polynôme est combinaison linéaire de la famille infinie $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, cette famille engendre tout $\mathbb{K}[X]$.

$\square$

ATTENTION !
Là encore, la condition n'est pas nécessaire. Par exemple, la suite

$$(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots) = (X, X+1, X^2, X^3, X^4, \cdots)$$

est une base de $\mathbb{K}[X]$ (puisque $Vect(X, X+1) = Vect(1, X)$), et pourtant elle ne vérifie par la condition de la proposition 16.

II Somme de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie), et $F_1, \cdots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E.

1) Définition et structure

Définition 17 (Somme de sev).
On appelle **somme des sous-espaces vectoriels** $(F_i)_{1\leq i\leq k}$ *l'ensemble*

$$F_1 + \cdots + F_k = \{x_1 + \cdots + x_k,\ \forall i \in \{1, \cdots, k\},\ x_i \in F_i\}.$$

On le note aussi $\sum_{i=1}^{k} F_i$.

Remarque
Pour $k = 2$: $F_1 + F_2$ est l'ensemble des vecteurs x de E de la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.

Proposition 18 (Structure de la somme).
La somme $\sum_{i=1}^{k} F_i$ est le plus petit sev de E contenant tous les F_i .

Preuve : Il faut montrer que $\sum_{i=1}^k F_i$ est le plus petit sev de E contenant $\bigcup_{i=1}^k F_i$ (c'est-à-dire contenant tous les F_i).

- Montrons que $\sum_{i=1}^k F_i$ est un sev de E.
  $0_E = \sum_{i=1}^k 0_E$ et 0_E est dans chaque F_i, donc $0_E \in F_1 + \cdots + F_k$.
  Si $x, y \in F_1 + \cdots + F_k$, alors on peut décomposer :
  $$x = x_1 + \cdots + x_k, \qquad y = y_1 + \cdots + y_k,$$
  avec chaque x_i, y_i dans F_i.
  Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a alors
  $$\lambda x + y = \sum_{i=1}^k (\lambda x_i + y_i),$$
  avec chaque $\lambda x_i + y_i \in F_i$ (puisque F_i est un sev de E), ce qui montre que $\lambda x + y \in F_1 + \cdots + F_k$.
- Montrons que $F_j \subset \sum_{i=1}^k F_i$ pour tout j.
  Soit $j \in \{1, \cdots, k\}$, et $x \in F_j$. Puisque
  $$x = 0_E + \cdots + 0_E + x + 0_E + \cdots + 0_E,$$
  et que 0_E est dans tous les F_i, on en déduit que $x \in F_1 + \cdots + F_k$, d'où l'inclusion voulue.

- Montrons que si G est un sev de E contenant tous les F_i, alors $\sum_{i=1}^k F_i \subset G$ Soit G un tel sev, et $x = x_1 + \cdots + x_k$ un vecteur de l'espace somme $F_1 + \cdots + F_k$. Chaque x_i est dans F_i, donc dans G. Vu que G est un sev de E, il est stable par somme et donc $x \in G$, ce qui montre l'inclusion $\sum_{i=1}^k F_i \subset G$.

$\square$

2) Somme directe

Définition 19 (Somme directe).
On dit que les sous-espaces $F_1, \cdots, F_k$ sont **en somme directe** *si pour tout vecteur $x \in \sum_{i=1}^k F_i$, la décomposition $x = \sum_{i=1}^k x_i$ (avec chaque x_i dans F_i) est unique .*
Dans ce cas, la somme se note $\sum_{i=1}^k F_i = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$ (ou $\bigoplus_{i=1}^k F_i$) .

Proposition 20 (Caractérisation d'une somme directe).
Les sous-espaces $F_1, \cdots, F_k$ sont en **somme directe** *si et seulement si pour tous vecteurs $x_1 \in F_1, \cdots, x_k \in F_k$, on a*

$$x_1 + \cdots + x_k = 0_E \implies x_1 = \cdots = x_k = 0_E.$$

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que la somme $F_1 + \cdots + F_k$ soit directe. Considérons $x_1 \in F_1, \cdots, x_k \in F_k$ tels que $x_1 + \cdots + x_k = 0_E$. Le vecteur nul s'écrit aussi $0_E = 0_E + \cdots + 0_E$, donc puisqu'il y a unicité de l'écriture en somme, on en déduit que $x_1 = 0_E, \cdots, x_k = 0_E$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons vraie la propriété :

$$\forall x_1 \in F_1, \cdots, \forall x_k \in F_k, \qquad (x_1 + \cdots + x_k = 0_E \implies x_1 = \cdots = x_k = 0_E),$$

et montrons que la somme $F_1 + \cdots + F_k$ est directe.
Soit donc un vecteur $x \in F_1 + \cdots + F_k$ qui admet deux décompositions :

$$x = x_1 + \cdots + x_k = y_1 + \cdots + y_k,$$

avec chaque x_i, y_i dans F_i. On a alors

$$(x_1 - y_1) + \cdots + (x_k - y_k) = 0_E,$$

avec chaque $x_i - y_i$ dans F_i (puisque F_i est un sev de E). D'après la propriété supposée, on en déduit alors : $x_1 - y_1 = \cdots = x_k - y_k = 0_E$, c'est-à-dire $x_i = y_i$ pour tout i. Ceci montre que la décomposition de x en somme est unique, et donc que la somme est directe.

□

Remarque
Il n'y a pas d'autre caractérisation correcte (et simple d'utilisation) de la somme directe dans le cas où $k \geq 3$.

On admet le résultat suivant, très utile en pratique :

Proposition 21 (Base adaptée à une somme directe).
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, et $F_1, \cdots, F_k$ **des sev de E en somme directe**. *Pour chaque $i \in \{1, \cdots, k\}$, on considère* **$\mathcal{B}_i$ une base de F_i**. *Alors :*

(i) *n'importe quelle famille obtenue* **en réunissant $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_k$** *est une base de l'espace somme $F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$, dite "base adaptée à la somme directe $F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$".*

(ii) *on a* $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{k} F_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim(F_i)$.

Lorsqu'on a seulement deux sous-espaces, on dispose d'une caractérisation plus simple de la somme directe :

Proposition 22 (Caractérisation d'une somme directe de deux sev).
F_1 et F_2 sont **en somme directe** *si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$* .

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons la somme $F_1 + F_2$ directe.
Si $x \in F_1 \cap F_2$, alors $0_E = x + (-x)$, avec $x \in F_1$ et $-x \in F_2$ (puisque $x \in F_2$ et que F_2 est un sev de E). D'après la prop 20, on a donc $x = -x = 0_E$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
Montrons que la somme $F_1 + F_2$ est directe en utilisant la caractérisation de la prop 20. Si $x_1 + x_2 = 0_E$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$, alors $x_1 = -x_2$, si bien que $-x_2 \in F_1$, et donc $x_2 \in F_1$ (par stabilité de F_1). On en déduit que $x_2 \in F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, c'est-à-dire $x_2 = 0_E$, et donc $x_1 = -x_2 = 0_E$.

$\square$

ATTENTION !
Cette caractérisation est fausse avec trois sev ou plus !

Exemple
Dans $\mathbb{R}^2$, les trois droites

$$\mathcal{D}_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x\}, \quad \mathcal{D}_3 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2,\ y = -x\}$$

(qui sont des sous-espaces vectoriels de dimension 1) ne sont pas en somme directe, sinon le sous-espace somme $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_3$ serait de dimension 3, ce qui est impossible (tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ sont de dimension ≤ 2).
Pourtant on a $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \{(0;0)\}$ pour tout couple $(i;j)$ avec $i \neq j$.

3) Sous-espaces supplémentaires (rappels)

Définition 23 (Sous-espaces supplémentaires).
On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires** *s'ils sont en somme directe et si $E = F \oplus G$.*

Remarque
F et G sont supplémentaires dans $E \iff F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.

ATTENTION !
Ne pas confondre :

- "F et G en somme directe", ce qui signifie que tout vecteur **de $F+G$** se décompose de manière unique en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
- "F et G supplémentaires", ce qui signifie que tout vecteur **de E** se décompose de manière unique en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Rappelons les résultats suivants, vu en sup :

Proposition 24 (Existence d'un supplémentaire en dimension finie).
Si E est **de dimension finie**, *et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F possède au moins un supplémentaire G dans E. De plus,* $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$.

Proposition 25 (Formule de Grassmann).
Soit E un espace vectoriel **de dimension finie**, *et F et G deux sev de E. Alors*
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Corollaire 26 (Caractérisations de deux supplémentaires).
Soit E un espace vectoriel **de dimension finie**, *et F et G deux sev de E. Alors, il y a équivalence entre*

(i) *F et G sont supplémentaires dans E ;*

(ii) *$F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$;*

(iii) *$F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.*

III Compléments sur les applications linéaires

1) Action d'une appl. linéaire sur les familles de vecteurs

Dans cette section, on fixe deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.

Proposition 27 (Image d'une famille génératrice).
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. *Si $(x_i)_{i\in I}$ est une* ***famille génératrice de E,***
alors la famille-image $(f(x_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de $Im(f)$.

Preuve : Tous les vecteurs $f(x_i)$ (pour $i \in I$) sont dans $Im(f)$.
Montrons que tout vecteur de $Im(f)$ s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $(f(x_i))_{i\in I}$. Si $y \in Im(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
On a $E = Vect((x_i)_{i\in I})$ par hypothèse, donc x se décompose :

$$x = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i, \qquad J \subset I, \qquad J \text{ fini}\ .$$

Par linéarité de f, on a alors $y = \sum_{i\in J} \lambda_i f(x_i)$, donc $y \in Vect((f(x_i))_{i\in I})$.

□

ATTENTION !
L'image d'une famille génératrice de E n'est **pas** nécessairement une famille génératrice **de $\boldsymbol{F}$** !

Proposition 28 (Image d'une famille liée/libre).
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

(i) *Si $(x_i)_{i\in I}$ est liée, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est liée dans F* .

(ii) *Si f est* **injective** *et $(x_i)_{i\in I}$ est libre, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre* .

Preuve :

(i) Puisque $(x_i)_{i\in I}$ est liée, il existe $J \subset I$ fini, et une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in J}$ non tous nuls tels que $\sum_{i\in J} \lambda_i x_i = 0_E$. Par linéarité de f, on en déduit que

$$\sum_{i\in J} \lambda_i f(x_i) = f(0_E) = 0_F,$$

ce qui montre que la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est liée (puisque les λ_i sont non tous nuls).

(ii) Soit $J \subset I$ fini, et une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in J}$ tels que $\sum_{i\in J} \lambda_i f(x_i) = 0_F$. Par

linéarité de f, on obtient

$$f\left(\sum_{i\in J} \lambda_i x_i\right) = 0_F = f(0_E).$$

Mais f est injective, donc $\sum_{i\in J} \lambda_i x_i = 0_E$.
Enfin, la famille $(x_i)_{i\in I}$ étant libre, on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in J$, ce qui montre que la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre.

$\square$

ATTENTION !
L'image d'une famille libre n'est **pas** libre en général.

Proposition 29 (Caractérisation des isomorphismes par les bases).
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $(e_i)_{i \in I}$ une **base** *de E. Alors :*
f est un **isomorphisme** *ssi $(f(e_i))_{i \in I}$ est une base de F* .
. . . .

Remarque
Les isomorphismes sont donc les applications linéaires qui envoient une base de E sur une base de F.

Preuve :

- Puisque $(e_i)_{i \in I}$ est génératrice de E, on sait d'après la prop 27 que $Vect((f(e_i))_{i \in I}) = Im(f)$. On a donc
$$f \text{ est surjective } \iff Vect((f(e_i))_{i \in I}) = F.$$
- Ensuite, on a l'équivalence :
$$f \text{ est injective } \iff (f(e_i))_{i \in I} \text{ est libre.}$$
$\boxed{\Rightarrow}$ résulte de la proposition 28.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $(f(e_i))_{i \in I}$ est libre et montrons que f est alors injective.
Soit $x \in Ker(f)$. On a $f(x) = 0_F$. Or, x se décompose sur la base $(e_i)_{i \in I}$:
$$x = \sum_{i \in J} \lambda_i e_i, \qquad J \subset I, \quad J \text{ fini.}$$

Donc, par linéarité de f : $\sum_{i \in J} \lambda_i f(e_i) = f(x) = 0_F$. La famille $(f(e_i))_{i \in I}$ étant libre, on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in J$, et donc $x = 0_E$. Ceci montre que $Ker(f) = \{0_E\}$, et donc que f est injective.

$\square$

2) Projecteurs et symétries

Définition 30 (Projecteur sur F parallèlement à G).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sev tels que $F \oplus G = E$.
On appelle **projecteur sur F parallèlement à G** *l'application*
$\boldsymbol{p_F^G : E \to E}$ *qui à tout $x \in E$ associe l'unique $x_1 \in F$ tel que $x - x_1 \in G$* .

ATTENTION !
Cette définition a un sens car F et G sont supplémentaires dans E.

Remarque
On définit de même le projecteur sur G parallèlement à F, noté $\boldsymbol{p_G^F}$. On a $p_F^G + p_G^F = Id_E$,
puisque pour tout $x = x_1 + x_2 \in E$, $(p_F^G + p_G^F)(x) = x_1 + x_2 = x$.
On dit que p_F^G et p_G^F sont les **projecteurs associés à** la décomposition $\boldsymbol{E = F \oplus G}$.

Dessin :

Proposition 31 (Caractérisation des projecteurs).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p : E \to E$.
Alors, p est un projecteur **si et seulement si** *p est linéaire et $p \circ p = p$.*
Dans ce cas, p est le projecteur sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$.

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit p le projecteur sur F parallèlement à G (avec $E = F \oplus G$).

- p est linéaire : si $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\exists!(x_1, y_1) \in F^2,\ \exists!(x_2, y_2) \in G^2, \qquad x = x_1 + x_2, \qquad y = y_1 + y_2.$$

  Par définition de p, on a $p(x) = x_1$ et $p(y) = y_1$.
  On a donc $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)$, avec $\lambda x_1 + y_1 \in F$ et $\lambda x_2 + y_2 \in G$ (par stabilité de F et G). D'où

$$p(\lambda x + y) = \lambda x_1 + y_1 = \lambda p(x) + p(y).$$

- Avec les notations précédentes, on a

$$(p \circ p)(x) = p(p(x)) = p(x_1) = p(\underbrace{x_1}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}) = x_1 = p(x),$$

  donc $p \circ p = p$.

- On a $Ker(p) = \{x \in E,\ p(x) = 0_E\} = \{x_1 + x_2 \in F \oplus G,\ x_1 = 0_E\} = G$.
  De plus, pour tout $x \in E$, $p(x) \in F$, donc $Im(p) \subset F$.
  Réciproquement, si $y \in F$, alors la décomposition de y sur la somme directe est $y = y + 0_E$, donc $p(y) = y$, ce qui montre que $y \in Im(p)$ (il est son propre antécédent).
  On a donc $Im(p) = F$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $p : E \to E$ est un endomorphisme tel que $p \circ p = p$, alors on a

$$E = Im(p) \oplus Ker(p).$$

En effet, étant donné un vecteur $x \in E$, montrons qu'il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in Im(p) \times Ker(p)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Pour cela, on procède par "analyse-synthèse" :

- Si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in Im(p) \times Ker(p)$, alors il existe $t \in E$ tel que $x_1 = p(t)$.
  Par linéarité de p :
  $$p(x) = p(x_1) + p(x_2) = p(p(t)) + 0_E = (p \circ p)(t) = p(t) = x_1.$$
  Donc $x_1 = p(x)$ et $x_2 = x - p(x)$, ce qui montre l'unicité de la décomposition.
- En posant $x_1 = p(x)$ et $x_2 = x - p(x)$, on a $x = x_1 + x_2$, puis $x_1 \in Im(p)$ et $x_2 \in Ker(p)$, puisque
  $$p(x_2) = p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = (p - p \circ p)(x) = 0_E,$$
  d'où l'existence d'une telle décomposition.

- Finalement, pour tout $x \in E$, le vecteur $p(x)$ est l'unique vecteur de $Im(p)$ tel que $x - p(x) \in Ker(p)$, ce qui montre que p est le projecteur sur $F := Im(p)$ par rapport à $G := Ker(p)$.

$\square$

ATTENTION !

Si un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\boldsymbol{p \circ p = p}$, **alors** c'est un projecteur et on a automatiquement la décomposition $E = Ker(p) \oplus Im(p)$.
Mais **la réciproque est fausse** : on peut avoir $E = Ker(p) \oplus Im(p)$ sans que l'endomorphisme p soit un projecteur.

Remarque

- Pour tout projecteur p, on a la décomposition $\forall x \in E, \quad x = \underbrace{x - p(x)}_{\in Ker(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in Im(p)}$.
- **A retenir** : pour tout projecteur p, on a
$$Im(p) = \{x \in E,\ p(x) = x\} = Ker(p - Id_E).$$
En effet : Si $p(x) = x$, alors $x \in Im(p)$, puisque c'est sa propre image par p.
Si $x \in Im(p)$, alors $\exists t \in E$ tel que $x = p(t)$, d'où $p(x) = (p \circ p)(t) = p(t) = x$.

On a donc également la décomposition $E = Ker(p) \oplus Ker(p - Id_E)$.

Définition 32 (Symétrie par rapport à F et parallèlement à G).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sev tels que $F \oplus G = E$.
On appelle **symétrie par rapport à F et parallèlement à G**
l'application $\boldsymbol{s_F^G : E \to E}$ *qui à tout vecteur $x = x_1 + x_2 \in E = F \oplus G$*
associe $s_F^G(x) = x_1 - x_2$.

Remarque (Relation entre symétries et projecteurs)

- On remarque que $s_F^G = p_F^G - p_G^F = 2p_F^G - Id_E = Id_E - 2p_G^F$.
- On définit de même la symétrie s_G^F par $s_G^F(x_1 + x_2) = -x_1 + x_2,\ \forall (x_1, x_2) \in F \times G$.

Dessin :

On admet la caractérisation suivante, qui se démontre comme celle des projecteurs :

Proposition 33 (Caractérisation des symétries).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $s : E \to E$.
Alors, s est une symétrie **si et seulement si** *s est linéaire et $s \circ s = Id_E$.*
Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $Ker(s - Id_E)$ parallèlement à $Ker(s + Id_E)$.

Remarque

- Toute symétrie s est un automorphisme de E, et on a $s^{-1} = s$, puisque $s \circ s = Id_E$.
- **Si** un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\boldsymbol{s \circ s = Id_E}$, **alors** c'est une symétrie et on a automatiquement la décomposition $E = Ker(s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E)$.

ATTENTION !
Pour une symétrie s, $Ker(s) = \{0_E\}$ et $Im(s) = E$ (car s bijective).

Remarque
Pour toute symétrie s, on a la décomposition $\forall x \in E,\ x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + s(x))}_{\in Ker(s - Id_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - s(x))}_{\in Ker(s + Id_E)}$.

3) Formes linéaires et hyperplans

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition 34 (Forme linéaire sur E).
Une **forme linéaire** *sur E est une application linéaire $\phi : E \to \mathbb{K}$.*

Exemple

- Pour tout vecteur $a = (a_1, \cdots, a_n)$ de $\mathbb{K}^n$, l'application
$$\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \end{array} \right.$$
est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.
- L'application $\psi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ définie par $\psi(P) = P(1)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.

Lemme 35 (Rang d'une forme linéaire).
Une forme linéaire $\phi : E \to \mathbb{K}$ est soit nulle, soit de rang 1.

Preuve : $Im(\phi)$ est un sev de $\mathbb{K}$, et $\dim(\mathbb{K}) = 1$, donc $\dim(Im(\phi)) \in \{0; 1\}$. $\square$

Définition 36 (Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie).
On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Un **hyperplan** *de E est un sous-espace vectoriel H de dimension $n-1$* .

Exemple
Les hyperplans du plan $\mathbb{R}^2$ sont les droites "vectorielles" (celles qui passent par $(0;0)$).
Les hyperplans de l'espace $\mathbb{R}^3$ sont les plans "vectoriels" (ceux qui passent par $(0;0;0)$).

Proposition 37 (Noyau d'une forme linéaire non nulle).
Soit une forme linéaire $\phi : E \to \mathbb{K}$ **non nulle** *avec E de dimension finie.*
Alors $Ker(\phi)$ est un hyperplan de E .

Preuve : D'après le théorème du rang :

$$\dim(Ker(\phi)) = \dim(E) - \dim(Im(\phi)) = \dim(E) - rg(\phi).$$

La forme linéaire ϕ étant non nulle, elle est de rang 1 (voir prop 35).
Donc $\dim(Ker(\phi)) = n-1$.

$\square$

Exemple
L'ensemble $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+2y+3z=0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, et une base de H est $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple
Pour tout vecteur $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ **non nul**, l'ensemble

$$H = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$
(en effet, H est le noyau de la forme linéaire $\phi : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$).

Si $a_1 \neq 0$, une base de H est $\begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -\frac{a_n}{a_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Proposition 38 (Caractérisation comme supplémentaire d'une droite).
Soit E de dimension finie et H un sous-espace vectoriel de E.
H est un hyperplan ssi il existe D sev de dimension 1 tel que $E = H \oplus D$.

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ Si H est un hyperplan de E, alors en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, H possède au moins un supplémentaire, noté D. Nécessairement, $\dim(D) = \dim(E) - \dim(H) = n - (n-1) = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $E = H \oplus D$ avec $\dim(D) = 1$, alors on a $\dim(H) = \dim(E) - \dim(D) = n - 1$, donc H est un hyperplan de E.

□

Remarque
En d'autres termes, les hyperplans sont les **supplémentaires des droites**.
C'est cette définition qu'on adopte si on veut parler d'hyperplan de E lorsque E est de dimension infinie.

IV Changements de base

1) Rappels

Définition 39 (Matrice de passage d'une base à une autre).
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni de deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$.
La **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** *est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les* **colonnes** *sont les coordonnées des $(e'_j)_{1 \leq j \leq n}$ dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. On la note $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.*

Remarque
Schématiquement,

$$P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} * & * & \cdots\cdots & * \\ * & * & \cdots\cdots & * \\ * & * & \cdots\cdots & * \\ * & * & \cdots\cdots & * \\ * & * & \cdots\cdots & * \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \\ e_n \end{array} \end{array}$$

(on exprime "les nouveaux vecteurs en fonction des anciens").
On remarque que $P = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$: en effet $Id_E(e'_j) = e'_j$ pour tout j.

ATTENTION !
Lorsqu'on envisage P comme la matrice de $Id_E : E \to E$:
* la "nouvelle" base $\mathcal{B}' = (e'_j)_{1\leq j\leq n}$ est **à la source (espace de départ)**,
* l'"ancienne" base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est **au but (espace d'arrivée)**.

Proposition 40 ("Matrices de passage=matrices inversibles").
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) *Toute matrice de passage P (d'une base $\mathcal{B}$ de E à une autre base $\mathcal{B}'$ de E) est* **inversible** *: $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P^{-1} = Mat_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.*

(ii) *Réciproquement, toute matrice* **inversible** *$P \in GL_n(\mathbb{K})$ est une matrice de passage entre deux bases de E.*

Preuve :

(i) On a $P = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$, et l'application Id_E est bijective, donc sa matrice représentative P est inversible. De plus, $P^{-1} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_E^{-1}) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_E) = Mat_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

(ii) Si P est une matrice carrée inversible, alors en notant $\mathcal{B}$ une base quelconque de E, il existe un unique endomorphisme $f : E \to E$ tel que $P = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. Puisque P est inversible, f est bijectif, donc la famille image $f(\mathcal{B})$ est aussi une base de E, notée $\mathcal{B}'$ (on rappelle qu'un isomorphisme transforme une base en

une base). Du coup, les colonnes de P représentent les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, ce qui montre que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$\square$

Remarque

- Une même matrice inversible P peut représenter **plusieurs changements de bases différents** : par exemple, une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ peut être vue comme :
  - une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{R}^3$.
  - une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$.
- L'endomorphisme $Id_E : x \mapsto x$ peut donc se représenter par **d'autres matrices que $\boldsymbol{I_n}$** (en prenant des bases de départ et d'arrivée différentes).

Exemple

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (elle est bien inversible, car de rang 3).

- P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ avec $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ n'importe quelle base de $\mathbb{R}^3$ (par exemple la base canonique) et $\mathcal{B}_2 = (e_1 + 2e_2 + e_3, e_2 - e_3, 3e_3)$.
- Mais P est aussi la matrice de passage de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}_4$ avec $\mathcal{B}_3 = (P_1, P_2, P_3)$ une base quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}_4 = (P_1 + 2P_2 + P_3, P_2 - P_3, 3P_3)$.

Notation
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim. $n \geq 1$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour $x \in E$, on notera $[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ le vecteur colonne de $\mathbb{K}^n$ formé des **coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 41 (Formule de changement de coordonnées).
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Notons $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$[x]_{\mathcal{B}} = P[x]_{\mathcal{B}'}.$$

ATTENTION !
Avec P, on obtient donc "les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles" :

$$X = PX' \quad \text{, avec } X = [x]_{\mathcal{B}} \text{ et } X' = [x]_{\mathcal{B}'}$$

(alors que P représente "les nouveaux vecteurs en fonction des anciens").

Preuve : En utilisant l'expression matricielle de l'image d'un vecteur (voir sup), on a

$$[x]_{\mathcal{B}} = [Id_E(x)]_{\mathcal{B}} = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E) \times [x]_{\mathcal{B}'} = P[x]_{\mathcal{B}'}.$$

□

Proposition 42 (Formule de changement de bases pour $\boldsymbol{f \in \mathcal{L}(E, F)}$).
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ muni de deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$.
Soit F un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni de deux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$.
Soit $\boldsymbol{f \in \mathcal{L}(E, F)}$. On note

$$\boldsymbol{A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}, \qquad \boldsymbol{A' = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})},$$

$$\boldsymbol{P = Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E) \in GL_p(\mathbb{K})}, \qquad \boldsymbol{Q = Mat_{\mathcal{B}_F}(\mathcal{B}'_F) \in GL_n(\mathbb{K})}$$

Alors on a $A' = Q^{-1}AP$.

Preuve : Toujours d'après la formule de composition, on a

$$\begin{aligned} A' = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f) &= Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(Id_F \circ f \circ Id_E) \\ &= Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}(Id_F) \times \underbrace{Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)}_{=A} \times Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(Id_E). \end{aligned}$$

Or, par définition des matrices de passage P et Q, on a

$$P = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(Id_E), \qquad Q = Mat_{\mathcal{B}'_F,\mathcal{B}_F}(Id_F),$$

et donc

$$Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}(Id_F) = Q^{-1},$$

d'où
$$A' = Q^{-1}AP.$$

□

Corollaire 43 (Cas du changement de base simultané pour $\boldsymbol{f \in \mathcal{L}(E)}$).
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni de deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$.
Soit $\boldsymbol{f \in \mathcal{L}(E)}$. On note
$$\boldsymbol{A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),} \qquad \boldsymbol{A' = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_E}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),}$$
et $\boldsymbol{P = Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E) \in GL_n(\mathbb{K})}$ *. On a alors* $A' = P^{-1}AP.$

Preuve : On obtient directement le corollaire en posant $P = Q$ dans la preuve précédente. □

2) Matrices semblables

Dorénavant, nous allons considérer **des endomorphismes** $f \in \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$, et écrire leur matrices (carrées) dans des couples de bases du type $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)$ (**même base à la source et au but**). On adopte la notation
$$Mat_{\mathcal{B}_E}(f) := Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(f).$$

Définition 44 (Matrices semblables).
*Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que **$B$ est semblable à A** si il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.*

Proposition 45 (Propriétés de la relation de similitude sur $\boldsymbol{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$).
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toutes matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- *(i) A est semblable à A ("réflexivité"),*
- *(ii) si B est semblable à A, alors A est semblable à B ("symétrie"),*
- *(iii) si B est semblable à A et si C est semblable à B, alors C est semblable à A ("transitivité").*

On dira alors "A et B sont semblables" plutôt que "B est semblable à A".

Preuve : Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) En posant $P = I_n$, on a $A = P^{-1}AP$, donc A est semblable à A.

(ii) Supposons que $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$. En posant $Q = P^{-1}$, on a alors $Q \in GL_n(\mathbb{K})$, et
$$A = PBP^{-1} = Q^{-1}BQ,$$
donc A est semblable à B.

(iii) Supposons que $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$ avec $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$.
En posant $R = PQ$, on a alors $R \in GL_n(\mathbb{K})$, et
$$C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}A(PQ) = R^{-1}AR,$$
d'où C est semblable à A.

□

Proposition 46 (Caractérisation des matrices semblables).
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

A et B sont semblables $\iff$ A et B représentent un même endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dans des bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)$ et $(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_E)$,

Preuve : Cela résulte directement du corollaire 43. □

ATTENTION !
Il est nécessaire dans chaque couple de bases d'avoir **la même base à la source et au but** !

Remarque

- Deux matrices semblables ont même rang (puisqu'elles représentent le même endomorphisme), mais la réciproque est fausse.
  Par exemple, les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont de rang 2, mais ne sont pas semblables :
  en effet, pour tout $P \in GL_2(\mathbb{K})$, $P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2 \neq A$) .
  ....
- En général, il est difficile de savoir si deux matrices sont semblables.

Proposition 47 ($P^{-1}AP$ puissance k).
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) *Pour toute $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$.*

(ii) *Si A est semblable à B, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est semblable à B^k.*

Preuve :

(i) On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la formule

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \qquad (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP.$$

- Elle est vraie pour $k = 0$ car $(P^{-1}AP)^0 = I_n = P^{-1}I_nP = P^{-1}A^0P$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$, alors :

$$(P^{-1}AP)^{k+1} = (P^{-1}AP)\times(P^{-1}AP)^k = (P^{-1}AP)\times P^{-1}A^kP = P^{-1}A(PP^{-1})A^kP,$$

et donc, puisque $PP^{-1} = I_n$:

$$(P^{-1}AP)^{k+1} = P^{-1}AA^kP = P^{-1}A^{k+1}P.$$

(ii) Si A est semblable à B, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$, donc par le point (i) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad B^k = P^{-1}A^kP,$$

ce qui montre que A^k est semblable à B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\square$

V Compléments sur les matrices

n et p désignent des entiers naturels non nuls. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le coefficient à la i^e ligne et j^e colonne de A sera noté $a_{i,j}$ ou $A[i,j]$.

1) Base des matrices élémentaires

Définition 48 (Matrice élémentaire $\boldsymbol{E_{i,j}}$).
Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, *on note $\boldsymbol{E_{i,j}}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*
....

définie par : $E_{i,j}[k,l] = \begin{cases} 1 & \text{si } (k,l) = (i,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
....

C'est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le $(i,j)^e$ qui vaut 1.

Proposition 49 (Base des matrices élémentaires).
Les $n \times p$ matrices $(E_{1,1}, E_{1,2}, \cdots, E_{1,p}, E_{2,1}, \cdots, E_{n,1}, \cdots E_{n,p})$,
....
appelées **matrices élémentaires de $\boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K})$**, *forment une base*
....
de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a donc $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$.
....

Preuve : C'est trivial d'après l'identité $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}$, vraie pour toute matrice $A = (a_{i,j})$. Cette identité assure que la famille de matrices $(E_{i,j})_{(i,j) \in [1,n] \times [1,p]}$ est libre et génératrice.

□

2) Transposition, matrices symétriques, antisymétriques

Définition 50 (Transposée d'une matrice).
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on appelle **transposée** *de A la matrice $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A :*

$$b_{i,j} = a_{j,i}, \qquad \forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!].$$

On note $B = A^T$ *ou* $B = {}^tA$.

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, alors $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Si $B = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -5 \\ 1 & \mathbf{0} & e \\ \sqrt{3} & -1 & \mathbf{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $B^T = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & \mathbf{0} & -1 \\ -5 & e & \mathbf{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

(transposer une matrice carrée revient à faire une symétrie par rapport à sa diagonale).

Proposition 51 (Linéarité de la transposition).

(*i*) *La transposition* $T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array} \right.$ *est une appli. linéaire :*

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad (\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T$$

(*ii*) *De plus, on a* $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad (A^T)^T = A.$

Preuve : Notons $A = (a_{i,j})_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le p}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le p}$.

(i) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Le coefficient d'ordre (i,j) de la matrice $\lambda A + B$ est :

$$(\lambda A + B)[i,j] = \lambda a_{i,j} + b_{i,j},$$

donc $(\lambda A + B)^T[i,j] = \lambda a_{j,i} + b_{j,i} = \lambda A^T[i,j] + B^T[i,j] = (\lambda A^T + B^T)[i,j]$.
Ceci étant vrai pour tout couple (i,j), on en déduit que $(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T$.

(ii) Clair car $(A^T)^T[i,j] = A^T[j,i] = a_{i,j} = A[i,j]$, donc $(A^T)^T = A$.

$\square$

La proposition suivante est difficile à montrer, nous l'admettrons :

Proposition 52 (Invariance du rang par transposition).
Pour toute $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $rg(A^T) = rg(A)$.

Proposition 53 (Transposée d'un produit, d'un inverse).

(*i*) *Pour toutes $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a* $(AB)^T = B^T A^T$.

(*ii*) *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors* *$A$ est inversible ssi A^T est inversible, et dans ce cas, on a $(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1}$.*

Preuve :

(i) Fixons $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$. Le coefficient (i, j) du produit $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ vaut :
$$(AB)[i, j] = \sum_{k=1}^{p} A[i, k]B[k, j],$$
donc
$$(AB)^T[i, j] = [AB](j, i) = \sum_{k=1}^{p} A[j, k]B[k, i] = \sum_{k=1}^{p} A^T[k, j]B^T[i, k].$$

Ceci se réécrit
$$(AB)^T[i, j] = \sum_{k=1}^{p} B^T[i, k]A^T[k, j] = (B^T A^T)[i, j].$$
Ceci étant vrai pour tout (i, j), on en déduit $(AB)^T = B^T A^T$.

(ii) • Si A est inversible, alors $AA^{-1} = I_n$, donc en transposant et en utilisant (i) :

$$(A^{-1})^T A^T = I_n,$$

En partant de $A^{-1}A = I_n$, on montre de même que

$$A^T (A^{-1})^T = I_n.$$

On conclut que A^T est inversible et que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

• Si A^T est inversible, alors d'après le point précédent, $(A^T)^T = A$ est inversible.

En définitive, on a bien l'équivalence $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff A^T \in GL_n(\mathbb{K})$.

□

Définition 54 (Matrices symétriques, antisymétriques).
Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **symétrique** *si $A^T = A$, **antisymétrique** si $A^T = -A$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques).*

Remarque

- Une matrice carrée symétrique est une matrice dont les coefficients sont symétriques par rapport à sa diagonale) :
$$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \iff \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ a_{j,i} = a_{i,j}.$$
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique, alors ses coefficients diagonaux sont nuls (mais la réciproque est fausse bien entendu). En effet, on a
$$A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \iff \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ a_{j,i} = -a_{i,j},$$
ce qui entraîne :
$$A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \implies \forall i \in \{1,\dots,n\},\ a_{i,i} = -a_{i,i} \implies \forall i \in \{1,\dots,n\},\ a_{i,i} = 0.$$

Exemple

On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 4 \\ 7 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

3) Trace d'une matrice

Définition 55 (Trace d'une matrice carrée).
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace de** A *le nombre*

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \in \mathbb{K}.$$

Remarque
La trace d'une matrice carrée est donc la somme de ses éléments diagonaux.

Proposition 56 (Linéarité de la trace).
L'application $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto Tr(A)$ est une forme linéaire.

Preuve : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$Tr(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A + B)[i,i] = \lambda \sum_{i=1}^{n} A[i,i] + \sum_{i=1}^{n} B[i,i] = \lambda Tr(A) + Tr(B).$$

□

Proposition 57 (Trace d'un produit).
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, on a $Tr(AB) = Tr(BA)$.

Preuve : Pour tout $1 \leq i \leq n$, le coefficient (i,i) de AB vaut

$$(AB)[i,i] = \sum_{k=1}^{n} A[i,k]B[k,i],$$

donc

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)[i,i] = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A[i,k]B[k,i] \right).$$

Vu que $A[i,k]$ et $B[k,i]$ sont des nombres réels ou complexes, on peut inverser l'ordre du produit :

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} B[k,i]A[i,k] \right).$$

Ensuite, on peut inverser l'ordre de sommation, puisque les indices i et k sont indépendants :

$$Tr(AB) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} B[k,i]A[i,k] \right).$$

On reconnaît alors les coefficients du produit BA :

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \qquad \sum_{i=1}^{n} B[k,i]A[i,k] = (BA)[k,k],$$

donc finalement :

$$Tr(AB) = \sum_{k=1}^{n} (BA)[k,k] = Tr(BA).$$

□

ATTENTION !
On n'a **pas** $Tr(AB) = Tr(A) \times Tr(B)$!

4) Trace d'un endomorphisme

Proposition 58 (Deux matrices semblables ont même trace).
Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **Si** *$A$ et B sont semblables,* **alors** $Tr(A) = Tr(B)$.

Preuve : Par hypothèse, on a $B = P^{-1}AP$, avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$.
On utilise alors la propriété $Tr(CD) = Tr(DC)$, valable pour toutes matrices $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$Tr(B) = Tr(P^{-1}AP) = Tr(P^{-1}(AP)) = Tr((AP)P^{-1}) = Tr(A(PP^{-1})) = Tr(A).$$

□

ATTENTION !
La proposition n'admet pas de réciproque : deux matrices ayant la même trace ne sont pas nécessairement semblables (par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont même trace mais ne sont pas semblables).

Définition 59 (Trace d'un endomorphisme).
E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle **trace d'un endomorphisme** *$f \in \mathcal{L}(E)$ la trace de sa matrice dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E :*

$$tr(f) := tr\left(Mat_{\mathcal{B}}(f)\right) \in \mathbb{K}.$$

Remarque
Cette définition a un sens car toutes les matrices représentatives de f avec **même base à la source et au but** sont semblables entre elles, et donc ont même trace.

ATTENTION !
Il est **absolument nécessaire d'avoir la même base à la source et au but**, sinon la trace change.

Exemple
On a $tr(Id_E) = n$, puisque pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a $Mat_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_n$.

Exemple (Trace d'un projecteur)
Si p est un projecteur de E, alors $tr(p) = rg(p)$.
En effet, en considérant une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $Im(p) \oplus Ker(p) = E$ (cette égalité a lieu car p est un projecteur), on a

$$Mat_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

où $r = dim(Im(p)) = rg(p)$.
En effet, on a $Im(p) = Ker(p - Id_E)$, donc on a $p(x) = x$ pour tout $x \in Im(p)$, ce qui donne les r premières colonnes de $Mat_{\mathcal{B}}(p)$.
Cette matrice a une trace égale à $r = 1 + 1 + \cdots + 1$ (r fois), donc $tr(p) = r$.

Exemple (Trace d'une symétrie)
Si s est une symétrie de E, alors $tr(s) = \dim(Ker(s - Id_E)) - \dim(Ker(s + Id_E))$.
En effet, en considérant une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $Ker(s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E) = E$ (cette égalité a lieu car s est une symétrie), on a

$$Mat_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

où $r = dim(Ker(s - Id_E))$.
En effet, on a $s(x) = x$ pour tout $x \in Ker(s - Id_E)$, ce qui donne les r premières colonnes de $Mat_{\mathcal{B}}(s)$ et $s(x) = -x$ pour tout $x \in Ker(s + Id_E)$, ce qui donne les $n - r$ dernières colonnes.
Cette matrice a une trace égale à $(1 + \cdots + 1) + (-1 - 1 - \cdots - 1) = r - (n - r)$.