Lycée Jules Ferry, Cannes
Année 2019-2020

Classe préparatoire TSI 2e année
Mathématiques - D. Broizat

Chapitre 1
Séries numériques

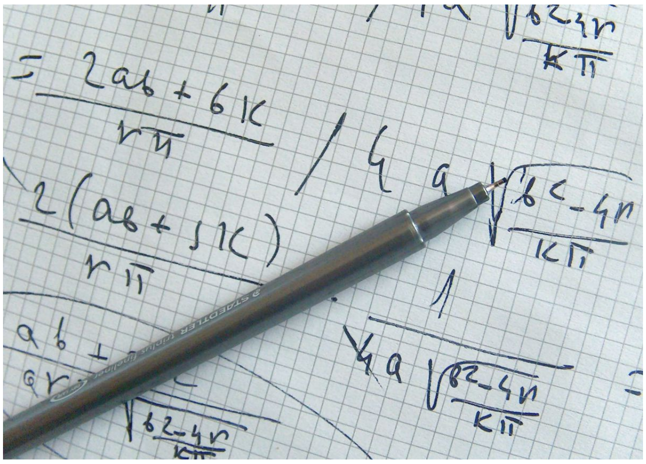


Table des matières

I Définitions et premiers exemples

1) Séries, sommes partielles

Définition 1 (Série).
Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle ou complexe, *on appelle* **série de terme général u_n** *la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Pour chaque entier n, la quantité S_n est appelée **somme partielle de rang n** .

Remarque (Définition à partir d'un certain rang)
Si (u_n) est une suite définie seulement **à partir du rang n_0** $\in \mathbb{N}$, on peut quand même définir la série de terme général u_n : c'est la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par

$$\forall n \geq n_0, \qquad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

De toute façon, le rang à partir duquel la suite (u_n) est définie n'a pas d'importance, puisqu'on peut toujours la prolonger à $\mathbb{N}$ en posant $u_0 = u_1 = \cdots = u_{n_0-1} = 0$ (ça ne change pas les sommes partielles).

Exemple
La suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ (définie pour $n \geq 1$) est appelée **série harmonique** .
Ses premiers termes valent :

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = S_2 + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \quad \ldots$$

Remarque (Relation de récurrence)
Pour toute série, on a $\forall n \geq n_0, \quad S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$, et donc on peut exprimer les termes de la suite (u_n) en fonction de ceux de la suite (S_n) :

$$\begin{cases} u_{n_0} = S_{n_0} \\ \forall n \geq n_0 + 1, \quad u_n = S_n - S_{n-1} \end{cases}$$

En effet :

$$S_{n+1} = \sum_{k=n_0}^{n+1} u_k = \underbrace{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n}_{=S_n} + u_{n+1}.$$

2) Convergence, divergence des séries

Définition 2 (Convergence/divergence d'une série).
On dit que *la série de terme général u_n est* **convergente** *si la suite des sommes partielles (S_n) est convergente* *, c'est-à-dire si* *il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$.* *Le nombre S est alors appelé* **somme de la série** *et on note* $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ *(l'indice k est muet).*
Dans le cas contraire (si la suite (S_n) diverge), on dit que **la série est divergente**.

ATTENTION !
Ne pas confondre :

- la **convergence de la suite (u_n)** (existence de $\lim_{n\to+\infty} u_n$)
- la **convergence de la série de terme général u_n** (existence de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$).

Notation
Souvent, on désignera par $\sum \boldsymbol{u_n}$ ou par $\sum_{n\geq n_0} \boldsymbol{u_n}$ la série de terme général (u_n). La notation sans l'indice de départ n_0 illustre bien le fait que **la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes**.

Remarque
En cas de convergence d'une série, le nombre S représente donc une "somme infinie" : c'est la limite de sommes qui comportent de plus en plus de termes.

Exemple
Les séries $\sum k$, $\sum 1$ et $\sum(-1)^k$ sont divergentes .
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la suite (S_n) est divergente.
- $T_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la suite (T_n) est divergente.

- $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$, donc la suite (V_n) est divergente (les sous-suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) sont constantes et différentes, donc elles convergent vers deux limites différentes).

ATTENTION !
Une série peut diverger **sans que** la suite (S_n) des sommes partielles tende vers $\pm\infty$! (par exemple $\sum(-1)^k$)

Exemple (Une série géométrique)
La série $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ converge, et on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{1000}} + \cdots = 1.$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ donc } \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

<u>Illustration</u> : étant donné un gâteau, si on mange une moitié, puis un quart, puis un huitième, et qu'on fait ça indéfiniment (!), alors on "finira" par manger tout le gâteau.

Définition 3 (Reste d'une série convergente).
Si la série $\sum u_n$ *converge, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots.$$

Cette quantité s'appelle le **reste d'ordre n** .

Remarque

- En cas de convergence d'une série, on a $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$, puisque $R_n = S - S_n$ (en notant $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$).
- En cas de **divergence**, le **reste n'existe pas** !

Exemple
Le reste d'ordre n de la série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^k$ (qui est bien convergente) est :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{N-n}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

3) Trois exemples de référence

Proposition 4 (Séries arithmétiques).
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une* **suite arithmétique** *de raison* $r \in \mathbb{C}^*$ *(* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$ *).*
Alors, la **série** $\sum u_n$ *est* **divergente** .

Preuve : Les sommes partielles se calculent facilement : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_0 + kr) = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{rn^2}{2},$$

donc $\lim_{n \to +\infty} |S_n| = +\infty$, ce qui montre que la suite (S_n) est divergente, puisque non bornée (**attention, r peut être un nombre complexe !**). □

Remarque (Cas des séries constantes)
Dans l'exemple précédent, si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante, et donc évidemment, la série $\sum u_n$ diverge. En effet, les sommes partielles $c + c + \cdots + c = nc$ tendent vers $+\infty$ en module lorsque $n \to +\infty$, sauf si $c = 0$ (la série nulle converge).

Le deuxième exemple de référence est le cas des "séries géométriques", c'est-à-dire les séries de la forme $\sum q^n$ avec $q \in \mathbb{C}$.

Rappelons d'abord les résultats connus sur les **suites** géométriques :

Proposition 5 (Convergence des suites géométriques).
Soit $q \in \mathbb{C}$.

(i) $\boxed{\text{Si } |q| > 1}$, *alors* (q^n) *diverge*, *et* $\lim_{n \to +\infty} |q^n| = +\infty$ *(donc la suite est non bornée).*

(ii) $\boxed{\text{Si } |q| < 1}$, *alors* (q^n) *converge*, *et* $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$.

(iii) $\boxed{\text{Si } |q| = 1}$, *alors* $\begin{cases} \text{si } q = 1,\ (q^n) \text{ converge (elle est constante)} ; \\ \text{si } q \neq 1,\ (q^n) \text{ diverge (en restant bornée)}. \end{cases}$

Preuve : Attention ! la suite géométrique étudiée étant a priori complexe, il faut travailler en module.

(i) Pour le cas $|q| > 1$, on écrit $|q| = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, puis

$$|q^n| = |q|^n = (1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k \geq n\varepsilon$$

(tous les termes étant positifs, on peut minorer la somme par le terme d'indice $k = 1$). Cette inégalité montre que $\lim_{n \to +\infty} |q^n| = +\infty$.

(ii) Pour le cas $|q| < 1$ (et q non nul), on a $\left|\frac{1}{q}\right| = \frac{1}{|q|} > 1$, donc par le point précédent, $\lim_{n \to +\infty} \left|\left(\frac{1}{q}\right)^n\right| = +\infty$, ce qui entraîne $\lim_{n \to +\infty} |q^n| = 0$, puisque $|q^n| = \frac{1}{\left|\left(\frac{1}{q}\right)^n\right|}$. Le cas $q = 0$ est quant à lui trivial.

(iii) Si $|q|=1$:

- le cas $q=1$ est trivial.
- si $|q|\neq 1$, alors q s'écrit $q=e^{ix}$ avec $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad q^n=e^{inx}=\cos(nx)+i\sin(nx).$$

On sait alors (voir les exercices de l'annexe 1) que la suite des parties réelles $(\cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Cela implique que la suite complexe (q^n) ne converge pas. Enfin, il est clair que (q^n) est bornée puisque

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |q^n|=|q|^n=1.$$

□

Etablissons maintenant le résultat qui nous intéresse (pour les **séries**) :

Proposition 6 (Convergence des séries géométriques).
Soit $q\in\mathbb{C}$. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q|<1$.

Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n=\frac{1}{1-q}$ *et* $\displaystyle\forall n_0\in\mathbb{N},\ \sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n=\frac{q^{n_0}}{1-q}$.

Preuve : On a $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k=\begin{cases}\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\in\mathbb{C}\setminus\{1\}\\ n+1 & \text{si } q=1\end{cases}$. Cette quantité n'admet donc une limite finie que si $|q|<1$ (d'après la proposition précédente), et dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k=\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{1}{1-q},\qquad \sum_{k=n_0}^{+\infty} q^k=\sum_{k=0}^{+\infty} q^k-\sum_{k=0}^{n_0-1} q^k=\frac{1}{1-q}-\frac{1-q^{n_0}}{1-q}\quad (n_0\geq 1).$$

□

ATTENTION !
Si $q=1$, la **suite** (q^n) converge, alors que la **série** $\sum q^n$ diverge !

Enfin, voici le troisième exemple de référence :

Proposition 7 (Séries de Riemann).
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.
. . . .

Exemple
La série $\sum \frac{1}{n}$ (appelée "série harmonique") diverge.
La série $\sum \frac{1}{n^{1,1}}$ converge. La série $\sum \frac{1}{n^{0,9}}$ diverge.

Idées de la démonstration

- **Majorer et minorer les sommes partielles** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$:

  $\to$ technique de **comparaison série/intégrale**, avec la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.
- **Utiliser la croissance de la suite (S_n)** : il suffira de montrer que (S_n) est **majorée** pour montrer qu'elle est convergente.

Preuve : Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ pour tout entier $n \geq 1$.

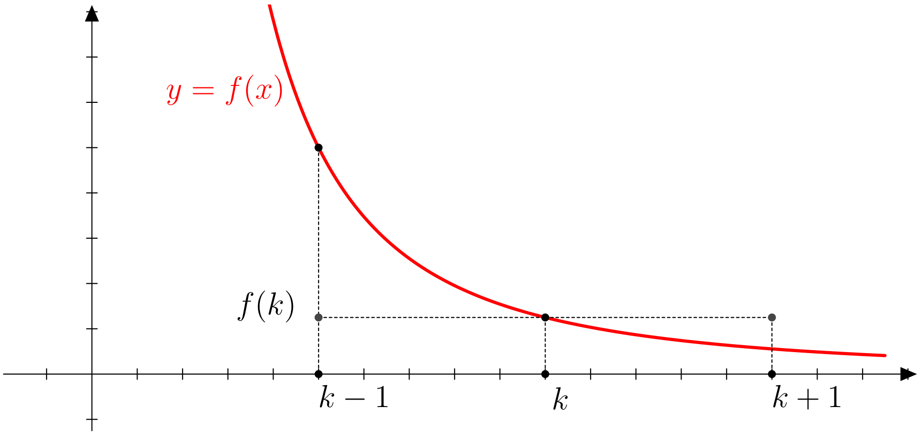
- $\boxed{\text{Cas où } \alpha \leq 0}$:

  C'est trivial car dans ce cas, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^\alpha} \geq 1$, donc on a

  $$S_n \geq 1 + 1 + \cdots + 1 = n,$$

  ce qui montre que $S_n \to +\infty$, et donc que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

- $\boxed{\text{Cas où } \alpha > 0}$: On a $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0$, donc impossible de minorer "simplement" le terme général $\frac{1}{k^\alpha}$.
  <u>**Idée**</u> : on étudie l'aire sous la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ (définie et décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$).



La décroissance de la fonction f amène l'inégalité des aires :

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx.$$

Pour le montrer rigoureusement : $\forall x \in [k-1; k]$, $f(x) \geq f(k)$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^{k} f(x)dx \geq \int_{k-1}^{k} f(k)dx = f(k) \times 1 = f(k).$$

De même, $\forall x \in [k; k+1]$, $f(x) \leq f(k)$, donc

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k).$$

On somme ensuite l'encadrement pour k allant de 2 à n :

$$\forall n \geq 2, \qquad \int_2^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^{n} f(x)dx,$$

(en utilisant la relation de Chasles), c'est-à-dire

$$\forall n \geq 2, \qquad 1 + \int_2^{n+1} f(x)dx \leq S_n \leq 1 + \int_1^{n} f(x)dx.$$

Avantage : on sait calculer ces intégrales, alors qu'on ne sait pas calculer S_n.

$$\int f(x)dx = \int x^{-\alpha}dx = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Des distinctions de cas apparaissent alors :

- $\boxed{\text{Si } \alpha = 1}$, alors
$$\forall n \geq 2, \qquad 1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq S_n \leq 1 + \ln(n).$$
La minoration montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, donc la série $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k^\alpha}$ diverge dans ce cas.

- $\boxed{\text{Si } \alpha \neq 1}$, alors
$$\forall n \geq 2, \qquad 1 + \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq S_n \leq 1 + \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$
On peut alors conclure en fonction du signe de l'exposant $1-\alpha$:
  * $\boxed{\text{Si } 0 < \alpha < 1}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, ce qui montre que la série $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k^\alpha}$ diverge dans ce cas.
  * $\boxed{\text{Si } \alpha > 1}$, alors on a $0 < n^{1-\alpha} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc
$$S_n \leq 1 + \frac{1 - n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

ce qui montre que la suite (S_n) est majorée. Or, cette suite est également croissante, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geq 0$, donc elle converge. Ceci prouve que dans ce cas, la série $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k^\alpha}$ converge.

$\square$

Remarque
Dans l'exemple des séries de Riemann, on a donc prouvé l'existence de la somme infinie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour les réels $\alpha > 1$, mais **on ne connaît pas *a priori* sa valeur**.
On pourra montrer (par de multiples méthodes, notamment en utilisant les séries de Fourier), qu'on a, pour $\alpha = 2$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

Ceci illustre bien le fait qu'une suite de nombres rationnels peut converger vers un irrationnel : en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \in \mathbb{Q},$$

mais

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6} \notin \mathbb{Q}.$$

II Généralités sur la convergence des séries

1) Condition nécessaire de convergence

Comme nous l'avons vu dans les exemples fondamentaux précédents, le principal problème des séries est qu'en général, **on ne sait pas expliciter les sommes partielles** S_n (voir les séries de Riemann), hormis les cas des séries arithmétiques et géométriques. Donc, il est nécessaire de développer une théorie pour l'étude de la convergence des séries.

Proposition 8 (Condition nécessaire de convergence d'une série).
Si *la série* $\sum u_n$ *converge,* **alors** $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
. . . .

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$, donc si $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} S$, on a $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$ lorsque $n \to +\infty$. □

ATTENTION !
La réciproque est fausse ! On peut avoir $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\sum u_n$ qui diverge.
Par exemple, la "série harmonique" $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, alors que $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition 9 (Divergence grossière).
On dit que la **série** $\sum u_n$ *est* **grossièrement divergente**
si son terme général u_n *ne tend pas vers* 0 *lorsque* $n \to +\infty$.

Remarque
D'après la proposition précédente, une série grossièrement divergente est divergente.

Exemple

- La série $\sum_{n \geq 0} 2^n$ est grossièrement divergente, car $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty \neq 0$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{n+2}{10n+8}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ aussi, car $\lim_{n \to +\infty} \frac{n+2}{10n+8} = \frac{1}{10}$ et $(-1)^n$ n'a pas de limite
- La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, mais pas grossièrement divergente.

Méthode
Pour étudier la convergence d'une série, on peut donc faire le **test** rapide suivant : **le terme général u_n tend-il vers 0 lorsque $n \to +\infty$?**
Si non, la série est trivialement divergente (d'où l'appellation "divergence grossière").

Mais dans la plupart des cas, on aura $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui ne dit rien sur la convergence de la série ...

2) Opérations algébriques

Comme pour les suites, on dispose d'opérations algébriques sur les séries :

Proposition 10 (Opérations algébriques).
Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles ou complexes et* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) **Si** *les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent,* **alors** *la série* $\sum (u_n + v_n)$ *converge* *, et on a, pour tout entier* n_0 *:*

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} v_k.$$

(ii) **Si** $\sum u_n$ *converge,* **alors** *la série* $\sum (\lambda u_n)$ *converge* *, et on a, pour tout entier* n_0 *:*

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k.$$

(iii) **Si** $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *diverge,* **alors** $\sum (u_n + v_n)$ *diverge* .

Preuve : On raisonne avec les suites $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_k$.
Si $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T$ alors on sait bien que $S_n+T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S+T$ et $\lambda S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda S$ lorsque $n \to +\infty$.
Enfin, si $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et si (T_n) diverge, alors la suite somme $(S_n + T_n)$ diverge, sinon on aurait $S_n + T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} W \in \mathbb{C}$, et donc $T_n = (S_n + T_n) - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} W - S$, ce qui est faux, puisque (T_n) diverge.

$\square$

Remarque
On a donc le fait suivant : toute combinaison linéaire (réelle ou complexe) de séries convergentes donne une série convergente, et on a dans ce cas la formule

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

ATTENTION !
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **toutes les deux divergentes**, alors on peut avoir $\sum(u_n + v_n)$ **convergente ou divergente**.

Exemple
Si $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$, on a $\sum u_n$ et $\sum v_n$ (grossièrement) divergentes , et $\sum(u_n + u_n) = \sum 2(-1)^n$ diverge, et $\sum(u_n + v_n) = \sum 0$ converge.

ATTENTION !
Il n'y a **pas de règle simple avec le produit**. En effet, il n'y a *a priori* aucun lien entre la convergence de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ et celle de $\sum u_n v_n$. Et bien sûr, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k v_k) \neq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right),$$

même en cas de convergence des trois séries !

Exemple
Si $u_n = v_n = \frac{1}{n}$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent (série de Riemann avec $\alpha = 1$).
Pourtant, $\sum u_n v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ converge.

3) Téléscopage et liaison suite-série

Le "téléscopage" est un **procédé de simplification de proche en proche** de certaines sommes.

Lemme 11 (Téléscopage).
Soient deux entiers naturels $n_0 \leq n$, et (u_k) une suite réelle ou complexe. On a alors

$$\sum_{k=n_0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_{n_0} \quad .$$

....

Preuve : La formule est évidente si $n = n_0$. Supposons donc $n \geq n_0 + 1$. On sépare la somme en deux et on effectue un changement d'indice dans la première :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n_0}^{n} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=n_0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0+1}^{n+1} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k \\
&= \left(u_{n+1} + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \right) - \left(u_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \right) = u_{n+1} - u_{n_0}.
\end{aligned}$$

□

Remarque
Cette technique sert parfois à **calculer certaines sommes** en réécrivant le terme général sous la forme $v_k = u_{k+1} - u_k$.

Exemple (Très classique)
On considère la série $\sum \frac{1}{k(k+1)}$. Montrons qu'elle converge et calculons sa somme.
On peut décomposer le terme général en "éléments simples" : il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} = \frac{(a+b)X + a}{X(X+1)}.$$

Un calcul simple montre que $a = 1$ et $b = -1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(par téléscopage).

Cette identité prouve que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1$, c'est-à-dire que la série $\sum\frac{1}{n(n+1)}$ converge et sa somme vaut $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

Corollaire 12 (Liaison suite-série).
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle ou complexe. Alors, on a l'équivalence :
la suite (u_n) converge $\Longleftrightarrow$ la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge .

ATTENTION !
L'énoncé précédent **ne dit pas** que
"la suite (u_n) converge ssi la série $\sum u_n$ converge" ! (complètement faux).
Il s'agit ici de la **série téléscopique** $\sum(u_{n+1}-u_n)$ et pas de $\sum u_n$.

Preuve : Notons $T_n=\sum_{k=n_0}^{n}(u_{k+1}-u_k)$ la somme partielle de rang n (pour $n\geq n_0$) de la série $\sum(u_{p+1}-u_p)$. On va montrer que la suite (T_n) converge ssi la suite (u_n) converge. Par le lemme précédent, on a

$$T_n=u_{n+1}-u_{n_0},$$

donc (puisque u_{n_0} est une constante indépendante de n), la suite (T_n) possède une limite ssi la suite (u_{n+1}) en possède une, ce qui revient à dire que (u_n) converge.

$\square$

III Séries réelles à termes positifs

1) Lien avec la monotonie

Pour étudier la convergence des séries **à termes positifs** (i.e. $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang), on dispose de critères spécifiques, basés sur l'idée suivante :

Proposition 13 (Croissance des sommes partielles).
Si *la suite réelle* (u_n) *est* **positive** *à partir d'un certain rang* $n_0 \in \mathbb{N}$, **alors** *la suite des sommes partielles* (S_n) *est* **croissante** *à partir du rang* n_0 .

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1}$, et cette quantité est positive pour $n \geq n_0 - 1$. D'où $S_{n+1} \geq S_n$ pour tout $n \geq n_0$. □

Corollaire 14 (Caractérisation des séries positives convergentes).
Si *la suite réelle* (u_n) *est* **positive** *à partir d'un certain rang* $n_0 \in \mathbb{N}$, **alors** *:*

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \text{la suite } (S_n) \text{ est } \textbf{majorée}$$

("une série à termes positifs converge ssi ses sommes partielles sont majorées").

Preuve : Par la proposition précédente, la suite (S_n) est croissante à partir du rang n_0. Donc, il y a deux possibilités :

- Soit (S_n) est majorée et dans ce cas, (S_n) converge vers un réel S, c'est-à-dire que la série converge.
- Soit (S_n) n'est pas majorée, et on a alors $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui entraîne la divergence de la série $\sum u_n$.

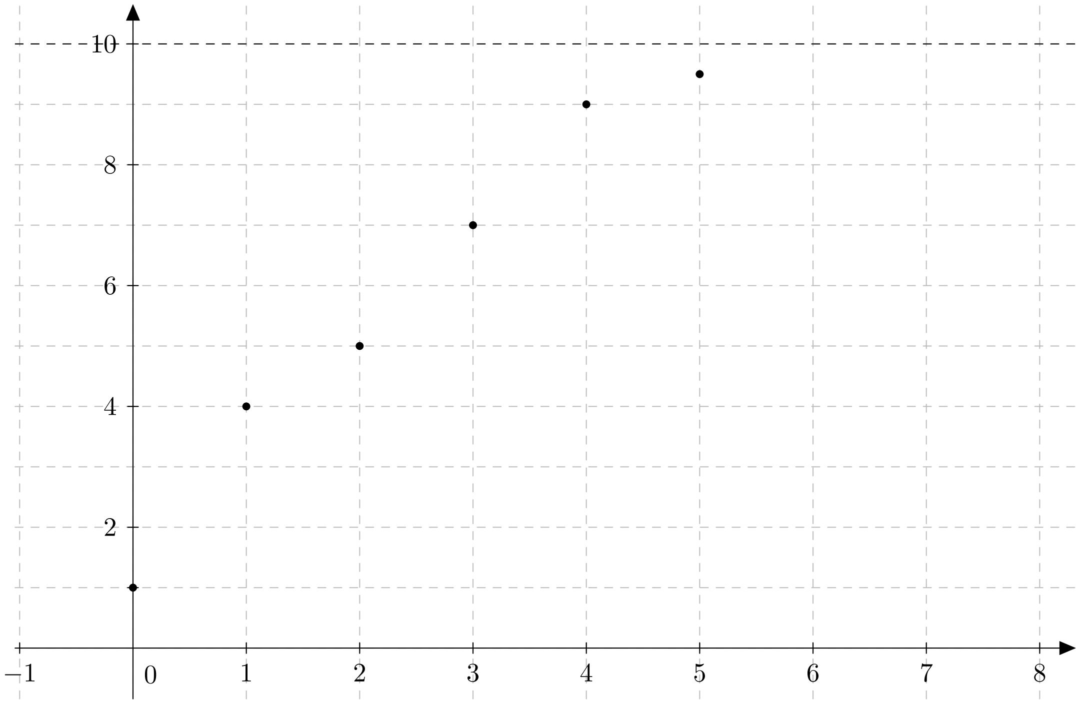
□

Remarque
Le corollaire se reformule de la façon suivante : pour une suite (u_n) **positive**, on a

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \text{il existe } M > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, u_0 + \cdots + u_n \leq M,$$

(dans cette inégalité, la constante $\boldsymbol{M}$ **ne dépend pas de** $\boldsymbol{n}$ bien entendu ...).

Dessin des sommes partielles croissantes et majorées :



Remarque (Cas des termes négatifs)
Le cas des **séries négatives** ($\sum u_n$ avec $u_n \leq 0$ à partir d'un certain rang) est analogue : la suite (S_n) est **décroissante** dans ce cas, et la convergence de la série équivaut à (S_n) **minorée**. Tous les énoncés spécifiques aux séries positives s'adapteront donc sans problème aux séries négatives. Les cas embêtants sont donc :

- les séries de terme général u_n de signe non constant ;
- les séries de terme général u_n complexe.

ATTENTION !
L'équivalence du corollaire 14 est **fausse si on ne suppose pas u_n positive**.
Par exemple, en posant $u_n = (-1)^n$:
on a $\sum u_n$ divergente, et pourtant, les sommes partielles S_n sont quand même majorées, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n \leq 1.$$

2) Critères de comparaison/des équivalents

Proposition 15 (Critère de comparaison pour les séries à termes positifs).
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui vérifient
$\boldsymbol{0 \leq u_n \leq v_n}$ *à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$* .

(i) **Si** $\sum v_n$ *converge,* **alors** $\sum u_n$ *converge, et on a*

$$0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) **Si** $\sum u_n$ *diverge,* **alors** $\sum v_n$ *diverge* .

Preuve : On raisonne avec les sommes partielles $S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et $T_n := \sum_{k=n_0}^{n} v_k$.
Les suites $(S_n)_{n \geq n_0}$ et $(T_n)_{n \geq n_0}$ sont croissantes (puisque u_n et v_n sont positifs pour $n \geq n_0$), et on a, en sommant les inégalités $u_k \leq v_k$:

$$\forall n \geq n_0, \qquad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} v_k,$$

c'est-à-dire $S_n \leq T_n$.
Dès lors :

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors, par définition, $(T_n)_{n \geq n_0}$ converge (en croissant) vers un réel T (qui est donc sa borne supérieure), et on a

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n \leq T_n \leq T.$$

Du coup, la suite (S_n) est majorée (par T) et vu qu'elle aussi est croissante, elle converge vers un réel S, c'est-à-dire que $\sum u_n$ converge.
Enfin, en faisant tendre $n \to +\infty$ dans l'inégalité :

$$\forall n \geq n_0, \qquad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} v_k,$$

(on peut car on a montré que les deux limites existent), on obtient l'inégalité voulue :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

(ii) C'est directement la contraposée du point précédent : si jamais $\sum v_n$ divergeait, alors par le point (i), on aurait $\sum u_n$ qui converge, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Donc $\sum v_n$ diverge.

$\square$

ATTENTION !
L'hypothèse de **positivité** est essentielle !

Exemple
Etude de la convergence de la série $\sum \frac{e^{-n}}{n^2}$.

On a $0 \leq \frac{e^{-n}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$.
Vu que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que $\sum \frac{e^{-n}}{n^2}$ converge.

Corollaire 16 (Critère des équivalents).
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles **positives** *(ou négatives) à partir d'un certain rang telles que* $\boldsymbol{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n}$.
Alors, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **de même nature** *, c'est-à-dire que*

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge.}$$

Rappel

- $\boldsymbol{u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)}$ signifie $u_n = \varepsilon_n v_n$, avec $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (i.e. $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ si (v_n) ne s'annule pas).
- $\boldsymbol{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n}$ signifie $u_n = a_n v_n$ avec $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (i.e. $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ si (v_n) ne s'annule pas).

Preuve : Puisque les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, il existe une suite (a_n) définie à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \geq N, \qquad u_n = a_n v_n, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

Par définition de la limite, on a alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_1 \geq N, \quad n \geq n_1 \implies |a_n - 1| \leq \varepsilon \implies 1 - \varepsilon \leq a_n \leq 1 + \varepsilon.$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on a donc $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{3}{2}$ à partir d'un certain rang n_1.
Vu que les suites u_n et v_n sont positives à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on a donc (en multipliant l'inégalité par v_n) :

$$n \geq \max(n_0, n_1) \implies 0 \leq \frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n.$$

D'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs (appliqué deux fois), on peut en conclure que

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge ,}$$

puisque les constantes $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ ne changent pas la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum v_n$.

En effet :

- Si $\sum u_n$ converge, alors l'inégalité $0 \leq \frac{1}{2}v_n \leq u_n$ montre que $\sum \frac{1}{2}v_n$ converge, et donc $\sum v_n$ converge.
- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum \frac{3}{2}v_n$ converge aussi, et l'inégalité $0 \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$ montre que $\sum u_n$ converge.

$\square$

Remarque
En pratique, **il suffit seulement de vérifier qu'une des deux suites** équivalentes (la plus simple !) **est de signe constant strict**, cela donnera automatiquement le même signe pour l'autre. Il est donc parfois intéressant de chercher d'abord un équivalent simple de u_n pour connaître le signe de u_n pour n suffisamment grand.

ATTENTION !
Le critère des équivalents est **faux si on n'a pas une hypothèse de signe constant** (ou si une des deux suites est complexe).

Exemple
Etude de la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

On a $\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, et $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ (à partir du rang $n=1$), donc d'après le critère des équivalents, $\sum \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ est de même nature que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente (série de Riemann avec $\alpha = 1/2$). Donc $\sum_{n\geq 1} \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ est divergente.

Exemple
On peut étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ par plusieurs méthodes :

1) en utilisant le critère de comparaison, puisque $0 \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad \forall n \geq 1.$

2) en utilisant le critère des équivalents, puisque $\frac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$

3) par téléscopage (déjà fait !).

3) Critère de d'Alembert

Proposition 17 (Critère de d'Alembert).
Soit (u_n) *une suite* **strictement positive** *à partir d'un certain rang* $n_0 \in \mathbb{N}$.
On suppose que $\displaystyle \frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

(i) **Si** $0 \leq \ell < 1$, **alors** *la série* $\sum u_n$ *converge* .

(ii) **Si** $\ell > 1$, **alors** *la série* $\sum u_n$ *diverge grossièrement* .

Idées de la démonstration

- **Comparer** la suite (u_n) **à une suite géométrique** (q^n) (en encadrant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$).
- Utiliser le critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

Preuve : Dans chaque cas, puisque $\ell \neq 1$, il y a "de la place" entre 1 et ℓ (même petite), et donc à partir d'un certain rang, les "quotients de d'Alembert" $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vont se retrouver strictement d'un côté ou de l'autre de 1.

(i) $\boxed{\text{Si } 0 \leq \ell < 1}$, alors on peut écrire $\ell = 1 - \alpha$ avec $1 \geq \alpha > 0$ (la distance qui sépare ℓ de 1). Puisque par hypothèse on a $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \alpha$, on a alors, à partir d'un certain rang $n_1 \geq n_0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

En multipliant par u_n (qui est strictement positif) :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_1, \qquad u_{n+1} \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) u_n.$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$\forall n \geq n_1, \qquad u_n \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{n-n_1} u_{n_1},$$

et la suite $v_n := \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{n-n_1} u_{n_1}$ est bien géométrique de raison $q := 1 - \frac{\alpha}{2} \in]0,1[$, d'où la conclusion par le critère de comparaison pour les séries à termes positifs : puisque $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) $\boxed{\text{Si } \ell > 1 \text{ et } \ell \in \mathbb{R}}$, alors on peut écrire $\ell = 1 + \alpha$, avec $\alpha > 0$, et similairement, on aura

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_2, \qquad u_n \geq \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{n-n_2} u_{n_2},$$

et la suite $w_n := \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{n-n_2} u_{n_2}$ est bien géométrique de raison $q := 1 + \frac{\alpha}{2} \in]1, +\infty[$.

Le cas où $\boxed{\ell = +\infty}$ de traite de même, car on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2$ à partir d'un certain rang n_3, donc $u_n \geq 2^{n-n_3} u_{n_3}$ par récurrence.

$\square$

Exemple

Etude de la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$

On utilise le critère de d'Alembert : en posant $u_n := \frac{1}{n!}$, on a

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et $0 < 1$, donc $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ converge.

ATTENTION !

Dans le cas où "$\ell = 1$" (i.e. $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1}$ **lorsque** $\boldsymbol{n \to +\infty}$), alors **on ne peut pas conclure quant à la nature de la série** $\sum \boldsymbol{u_n}$.

Exemple

Les séries de Riemann $\left(\sum u_n \text{ avec } u_n = \frac{1}{n^\alpha}\right)$:

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ (indépendamment de α), et pourtant, on sait bien que la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dépend de la valeur de α.

ATTENTION !

L'hypothèse $\boldsymbol{u_n > 0}$ **est nécessaire** (la positivité doit être **stricte**).

Si on a seulement $u_n \geq 0$ (par exemple dans le cas où un terme sur deux est nul), alors on ne peut pas utiliser le critère de d'Alembert, puisque **les quotients** $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$ **ne sont pas toujours définis**.

4) Deux exemples intéressants

Exemple
Etude de la convergence de la série $\sum u_n$, où $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

On travaille sur les sommes partielles : posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_{2n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2n} + u_{2n+1} = 0 + \frac{1}{1} + 0 + \frac{1}{3} + \cdots + 0 + \frac{1}{2n+1},$$

donc

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}.$$

Or, $\frac{1}{2k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$ et la série $\sum \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{k}$ diverge, donc par le critère des équivalents, on en déduit que la série positive $\sum \frac{1}{2k+1}$ diverge. On en conclut que la suite (S_n) diverge, sinon sa sous-suite (S_{2n+1}) serait convergente. Donc la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple
Etude de la convergence de $\sum_{n\geq 0} n^4 e^{-n^2}$.

Posons $u_n = n^4 e^{-n^2}$. Pour n suffisamment grand, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$.
En effet, $n^2 u_n = n^6 e^{-n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, donc en posant $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \implies n^2 u_n \leq 1$.
On conclut en appliquant le critère de comparaison pour les séries positives : la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum u_n$ converge.

IV Séries à termes réels ou complexes

1) Convergence absolue

Définition 18 (Série absolument convergente).
Si (u_n) est une suite réelle ou complexe, on dit que la **série** $\sum u_n$ *est* **absolument convergente** *(ou "converge absolument") si la série (positive)* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Remarque

- Dans la définition précédente, $|\ |$ désigne la valeur absolue ou le module, selon les cas.
- Cette notion n'a d'intérêt que si (u_n) n'est pas de signe constant !

Théorème 19 (La convergence absolue entraîne la convergence).
Si $\sum u_n$ *converge absolument,* **alors** $\sum u_n$ *converge . En d'autres termes,*

$$\sum |u_n| \text{ converge } \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

Preuve : Admis (voir le TD 1). □

Exemple
Etude de la convergence de la série $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$.

On a $|u_n| = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$.
Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit par le critère de comparaison pour les séries positives que $\sum |u_n|$ converge, c'est-à-dire que $\sum u_n$ est absolument convergente.
On conclut par le théorème précédent que la série $\sum u_n$ est convergente.

ATTENTION !
La réciproque est fausse : il existe des séries convergentes mais pas absolument convergentes (voir plus loin).

Ceci motive la définition suivante :

Définition 20 (Semi-convergence).
On dit qu'une **série** $\sum u_n$ *(réelle ou complexe) est* **semi-convergente** *si elle est* **convergente mais pas absolument convergente** *, c'est-à-dire si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum |u_n|$ *diverge* .

Méthode
Pour étudier la convergence d'une série à termes de signe non constant ou complexes, on peut **d'abord étudier la convergence absolue**.

- Avantage : cela revient à travailler avec une **série positive** $\sum |u_n|$, sur laquelle on peut tester tous les critères de la partie précédente.
- Inconvénient : si la série ne converge pas absolument, alors ça ne montre rien quant à sa convergence.

Proposition 21 (Inégalité triangulaire infinie).
Si $\sum u_n$ converge absolument, alors *on a l'inégalité suivante :*

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

Preuve : Pour tout entier naturel n, on a l'inégalité $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$ (d'après l'inégalité triangulaire sur les sommes finies, vue en TSI 1).

Puisque $\sum u_n$ converge absolument, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |u_k|$ existe.

La convergence absolue entraîne la convergence, donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ existe également.

Par continuité du module, on déduit : $\lim_{n\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \left|\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right|$.

On conclut en faisant tendre $n \to +\infty$ dans l'inégalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |u_k|, \text{ c'est-à-dire } \left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|. \qquad \square$$

2) Exemples de séries semi-convergentes

Un cas de référence est celui des **séries alternées**, c'est-à-dire dont le terme général u_n vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \times u_{n+1} \leq 0$$

(chaque terme de la suite a un signe contraire au terme précédent).
De telles séries sont de la forme :

$$\pm \sum (-1)^n a_n, \qquad \text{avec } a_n \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Méthode
Si une série alternée $\sum(-1)^n a_n$ **n'est pas absolument convergente**, alors on peut essayer de montrer la convergence de la suite des sommes partielles (S_n) **en montrant que les sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.**

Rappel

- Deux suites réelles sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tend vers 0.
- **Si** deux suites sont adjacentes, **alors** elles convergent vers la même limite.

Exemple (Une série semi-convergente)
Étude de la convergence de la «série harmonique alternée» $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$.

Cette série n'est pas absolument convergente car $\left|\dfrac{(-1)^k}{k}\right| = \dfrac{1}{k}$ et la série $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge.

En posant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \leq 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \geq 0,$$

donc la suite (S_{2n}) est décroissante et la suite (S_{2n+1}) est croissante.
De plus, $S_{2n+1} - S_{2n} = -\dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
Elles convergent donc vers un même réel S, ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, et donc que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

Illustration de la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$:

On représente graphiquement les sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ en fonction de n :

Exemple (Plus difficile...)
Etude de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Posons $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ pour $n \geq 2$.
Puisque $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to 0$, on a $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, mais c'est inutile ici puisque $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas de signe constant (on ne peut donc pas appliquer le critère des équivalents).
Effectuons plutôt un développement asymptotique du terme général :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons alors $x_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $y_n = u_n - x_n = -\dfrac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Etudions la convergence de ces deux séries :

- La série $\sum x_n$ n'est pas absolument convergente, mais convergente. En effet, en posant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ on peut montrer (comme dans l'exemple précédent) que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

- Puisque $y_n \sim -\dfrac{1}{2n}$, on obtient que y_n est de signe constant (strictement négatif) à partir d'un certain rang, donc on peut utiliser le critère des équivalents : la série $\sum -\dfrac{1}{2n}$ diverge, donc la série $\sum y_n$ diverge.

On en déduit par somme que la série $\sum u_n = \sum(x_n + y_n)$ diverge. Là aussi, on a donc affaire à une série semi-convergente.

V Développement décimal d'un nombre réel

1) Nombres décimaux

Définition 22 (Nombre décimal).
On appelle *nombre décimal* *tout nombre rationnel de la forme* $\dfrac{a}{10^m}$, *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $m \in \mathbb{N}$.

Notation
On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Exemple
On a $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$, car $10 \times \frac{1}{2} = 5 \in \mathbb{Z}$. On a $\frac{-1}{125} = \frac{-1}{5^3} \in \mathbb{D}$, car $1000 \times \frac{-1}{125} = -8 \in \mathbb{Z}$.

Remarque
On a évidemment $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, et ces inclusions sont strictes : par exemple $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.
Sinon on aurait $10^m = 3a$ avec $a, m \in \mathbb{N}$, et donc 3 diviserait $2^m 5^m$, ce qui est impossible (d'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier).

Proposition 23 (Opérations sur les nombres décimaux).
(i) La somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal.
(ii) L'opposé d'un nombre décimal est un nombre décimal.
(iii) Le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

Preuve : Soient $x = \frac{a}{10^m}$ et $y = \frac{b}{10^n}$ deux nombres décimaux (avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $m, n \in \mathbb{N}$). On a

(i) $x + y = \frac{10^n a + 10^m b}{10^{m+n}}$, donc $x + y \in \mathbb{D}$, puisque $10^n a + 10^m b \in \mathbb{Z}$ et $m + n \in \mathbb{N}$.

(ii) $-x = \frac{-a}{10^m}$, donc $-x \in \mathbb{D}$, puisque $-a \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$.

(iii) $x \times y = \frac{ab}{10^{m+n}}$, donc $x \times y \in \mathbb{D}$, puisque $ab \in \mathbb{Z}$ et $m + n \in \mathbb{N}$.

□

ATTENTION !
L'inverse d'un nombre décimal n'est pas forcément un nombre décimal (penser à $\frac{1}{3}$).

2) Développement décimal / approximations décimales

Le théorème suivant est admis :

Théorème 24 (Développement décimal propre d'un réel positif).
Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel **positif***.*
Il existe une unique suite d'entiers naturels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

(i) $\forall n \geq 1,\ a_n \in \{0; 1; \cdots; 9\}$;

(ii) la suite (a_n) n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang ;

(iii) $x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ *(avec convergence de la série)*.

On dit que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ *est le* **développement décimal propre du réel x***.*
On note $x = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ *et on dit que les $(a_n)_{n\geq 1}$ sont les* **"chiffres après la virgule"** *de x.*

Remarque
Il est facile de voir qu'une telle série converge puisque $\forall k \geq 1,\ 0 \leq \frac{a_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^k}$, et la série géométrique $\sum \frac{9}{10^k}$ converge (sa raison est $1/10 \in]0; 1[$).

Exemple

- $\dfrac{1}{3} = 0,33333\cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k}$ (c'est-à-dire $a_0 = 0$ et $\forall n \geq 1,\ a_n = 3$). En effet :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k} = 3 \times \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 3 \times \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

- $\pi = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ avec $(a_0; a_1; a_2; a_3; a_4; \cdots) = (3; 1; 4; 1; 5; \cdots)$.

ATTENTION !

Un réel positif x possède des développements décimaux différents de son développement décimal propre ! Ce genre de développement "impropre" stationne à 9 à partir d'un certain rang.

Exemple

- $2,99999\cdots = 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 2 + \frac{9}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 3 = 3,0000\cdots$.
- $132,45269999\cdots = 132,4526 + \underbrace{\displaystyle\sum_{k=5}^{+\infty} \frac{9}{10^k}}_{=9\times\frac{\frac{1}{10^5}}{1-\frac{1}{10}}} = 132,4526 + 10^{-4} = 132,4527.$

Proposition 25 (Approximations décimales d'un réel positif).
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Notons $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ le développement décimal propre de x.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme partielle de rang n de ce développement :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n.$$
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
- *(i)* $0 \leq x - S_n < 10^{-n}$;
- *(ii)* $S_n = \dfrac{E(10^n x)}{10^n}$, *où $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ désigne la fonction "partie entière"* .

On dit que S_n est **l'approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près**.

Remarque

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $T_n = S_n + 10^{-n}$ est appelé **approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près**. On peut montrer que les suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes, et elles convergent toutes deux vers le réel positif x.

Exemple (Approximations décimales de π)
Si $x = \pi$, alors la suite de ses approximations décimales par défaut est

$$S_0 = 3, \quad S_1 = 3,1, \quad S_2 = 3,14, \quad S_3 = 3,141, \quad S_4 = 3,1415, \cdots$$

....

La suite de ses approximations décimales par excès est

$$T_0 = 4, \quad T_1 = 3,2, \quad T_2 = 3,15, \quad T_3 = 3,142, \quad T_4 = 3,1416, \cdots$$

....

Illustration :

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R_n = x - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ le reste d'ordre n du développement décimal propre de x. Puisque $\forall k \geq 1,\ 0 \leq a_k \leq 9$ et puisque la suite (a_k) ne stationne pas 9, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq R_n < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \times \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} = 10^{-n},$$

ce qui montre le point (i). On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n \leq x < S_n + 10^{-n},$$

c'est-à-dire (en multipliant par 10^n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 10^n S_n \leq 10^n x < 10^n S_n + 1.$$

Or, $10^n S_n = 10^n a_0 + 10^{n-1} a_1 + \cdots + 10 a_{n-1} + a_n \in \mathbb{N}$, donc, par définition de la partie entière, l'inégalité précédente montre que

$$10^n S_n = E(10^n x),$$

ce qui donne le résultat.

□

On peut étendre la notion de développement décimal propre aux réels négatifs.

Définition 26 (Développement décimal propre d'un réel négatif).
Soit x un réel **négatif**. *On appelle* **développement décimal propre du réel x** *l'écriture*

$$x = -b_0, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots ,$$

où $b_0, b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$ *est le développement décimal propre de* $|x| = -x$.

ATTENTION !
Si $x > 0$, alors $a_0 = E(x)$, mais si $x < 0$, alors $b_0 = E(-x) \neq -E(x)$.

Exemple
Si $x = -4,11111\cdots$, alors $b_0 = 4 = E(-x)$ mais $-E(x) = -(-5) = 5$.

3) Caractérisation des nombres décimaux/rationnels

Parmi les nombres réels, les nombres décimaux et rationnels sont ceux dont le développement décimal propre possède des propriétés particulières.

Proposition 27 (Caractérisation des nombres décimaux).
Soit un réel $x > 0$.
x est décimal si et seulement si son développement décimal propre est *fini* ,
ce qui signifie que *la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ des chiffres de x après la virgule est nulle à partir d'un certain rang* .

Proposition 28 (Caractérisation des nombres rationnels).
Soit un réel $x > 0$.
x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est *périodique à partir d'un certain rang* , *c'est-à-dire de la forme*

$$x = a_0, a_1 \cdots a_p \underbrace{a_{p+1} \cdots a_{p+T}}_{periode} \underbrace{a_{p+1} \cdots a_{p+T}} \cdots \underbrace{a_{p+1} \cdots a_{p+T}} \cdots$$

Preuve : On admettra ces deux résultats. □

Exemple
Déterminer le développement décimal propre de $x = \dfrac{22}{7}$.

Faire des divisions euclidiennes successives.

$$\begin{array}{lllllll|l}
22 & & & & & & & 7 \\
\hline
1 & & & & & & & 3,142857 \\
 & 3 & & & & & & \\
 & & 2 & & & & & \\
 & & & 6 & & & & \\
 & & & & 4 & & & \\
 & & & & & 5 & & \\
 & & & & & & 1 &
\end{array}$$

On obtient la période du développement du nombre rationnel lorsqu'on retombe sur le même reste.

Exemple
Vérifier que $3,\underbrace{142857}\ \underbrace{142857}\cdots\underbrace{142857}\cdots = \dfrac{22}{7}$.

Notons $x = 3,\underbrace{142857}\ \underbrace{142857}\cdots\underbrace{142857}\cdots$. On a

$$x - 3 = 0,\underbrace{142857}\ \underbrace{142857}\cdots$$

donc

$$10^6(x-3) = 142857,\underbrace{142857}\ \underbrace{142857}\cdots = 142857 + (x-3).$$

On en déduit

$$x = 3 + \frac{142857}{10^6 - 1} = 3 + \frac{142857}{999999} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}.$$