La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge

Nous donnons ici une démonstration simple du fait que la série "harmonique" $\sum \frac{1}{n}$ diverge, sans utiliser la comparaison série-intégrale (utilisée dans la preuve de la prop. 7 du CH01).

Proposition 1.
La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge.*

Preuve.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a alors

$$\forall n \geq 1, \qquad S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

donc la suite (S_n) ne peut pas converger, sinon on aurait $S_n \to S \in \mathbb{R}$, donc $S_{2n} - S_n \to S - S = 0$, ce qui est impossible d'après la minoration précédente.

Remarque.
Malheureusement, cette technique ne fonctionne pas pour traiter le cas général des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.