Annexe F : Fonctions à valeurs vectorielles

On considère dans ce chapitre des **"fonctions vectorielles"**, c'est-à-dire des fonctions de la forme

$$f : I \to \mathbb{R}^m, \qquad f(t) = (f_1(t), \cdots, f_m(t)), \quad t \in I,$$

où $m \in \mathbb{N}^*$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ **non vide et non réduit à un point**.
On note $\boldsymbol{f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)}$, où les f_i sont les **fonctions coordonnées** de f (appelées aussi **composantes** de f).
Les composantes $f_1, \cdots, f_m$ sont des fonctions $I \to \mathbb{R}$, donc on peut leur appliquer tous les résultats de l'analyse à une variable réelle.
Le but est ici de définir les notions de limite, continuité, dérivabilité pour les fonctions vectorielles, comme on l'a déjà fait pour les fonctions à valeurs complexes.

I Généralités

1) Rappels sur les opérations algébriques de $\mathbb{R}^m$

Les vecteurs de $\mathbb{R}^m$ seront notés $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_m)$, mais souvent on omettra la flèche.
En plus des deux opérations qui font de $\mathbb{R}^m$ un espace vectoriel (la somme et le produit d'un vecteur par un réel), on dispose d'autres opérations, ayant un sens géométrique lorsque $m = 2$ ou $m = 3$.
Rappelons-les : pour $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_m)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, \cdots, y_m)$, $\overrightarrow{z} = (z_1, \cdots, z_m) \in \mathbb{R}^m$:

- le **produit scalaire euclidien** de $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ est $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^m x_i y_i \in \mathbb{R}$.
- la **norme euclidienne** de $\overrightarrow{x}$ est $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\langle x; x \rangle} \in \mathbb{R}_+$.
- si $m = 2$, le **déterminant** de $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est
$$\det(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 \in \mathbb{R}$$
(c'est le déterminant de la famille $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$).
- si $m = 3$, le **produit vectoriel** de $\overrightarrow{x}$ par $\overrightarrow{y}$ est
$$\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$
- si $m = 3$, le **déterminant** de $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ est
$$\det(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$$
(c'est le déterminant de la famille $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Remarque.
Tout comme le produit scalaire et la norme, la notion de déterminant se généralise à la dimension n (voir le chapitre correspondant).

On renvoie au cours de TSI 1 pour les propriétés calculatoires de toutes ces opérations, mais on rappelle quand même leurs propriétés géométriques en dimension 2 et 3 :

Rappel.
Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé direct canonique $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\iff \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires $\iff \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \iff (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de son repère orthonormé direct canonique $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$:

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\iff \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires $\iff \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \iff (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée.
- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont coplanaires $\iff \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0 \iff (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée.
- $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \rangle$.

2) Opérations algébriques sur les fonctions vectorielles

Notation.
On notera $(\mathbb{R}^m)^I$ ou $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}^m$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Proposition 1 (Structure de l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}^m$).
L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, pour les lois $f + g : t \mapsto f(t) + g(t)$, $\lambda.f : t \mapsto \lambda f(t)$.

ATTENTION.
Si $m \geq 2$, on ne peut pas définir de "produit de fonctions" $f \times g$: en effet, on ne peut pas multiplier deux vecteurs ! En revanche, on peut définir d'autres opérations sur les fonctions vectorielles.

Définition 2 (Produit scalaire euclidien de deux fonctions vectorielles).
Soient deux fonctions vectorielles $f = (f_1, \cdots, f_m), g = (g_1, \cdots, g_m) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$.
On appelle **fonction produit scalaire de f et g** la fonction $\langle f, g \rangle : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in I, \qquad \langle f, g \rangle (t) = \langle f(t), g(t) \rangle = \sum_{i=1}^{m} f_i(t) g_i(t).$$

Exemple.
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sont définies par $f(t) = (t, t^3 - 1)$ et $g(t) = (t^2, e^t)$, alors $\langle f, g \rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $\langle f, g \rangle (t) = t^3 + (t^3 - 1)e^t$.

Remarque.
Si $m = 1$, le produit scalaire correspond au produit classique de deux fonctions $I \to \mathbb{R}$.

Définition 3 (Norme euclidienne d'une fonction vectorielle).
Soit une fonction vectorielle $f = (f_1, \cdots, f_m) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$.
On appelle **fonction norme euclidienne de f** la fonction $\|f\| : I \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall t \in I, \qquad \|f\|(t) = \|f(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} f_i(t)^2}.$$

Exemple.
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est définie par $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, alors $\|f\| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\|f\|(t) = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2} = \sqrt{1 + t^2}.$$

Définition 4 (Produit vectoriel de deux fonctions vectorielles).
Soient deux fonctions vectorielles $f = (f_1, f_2, f_3)$, $g = (g_1, g_2, g_3) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^3)$.
On appelle **fonction produit vectoriel de f par g** la fonction $f \wedge g : I \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall t \in I, \qquad (f \wedge g)(t) = f(t) \wedge g(t) = \begin{pmatrix} f_2(t) g_3(t) - f_3(t) g_2(t) \\ f_3(t) g_1(t) - f_1(t) g_3(t) \\ f_1(t) g_2(t) - f_2(t) g_1(t) \end{pmatrix}.$$

Définition 5 (Déterminant d'une famille de fonctions vectorielles).
Soit $f_1, f_2, \cdots, f_m$ une famille de m fonctions vectorielles $I \to \mathbb{R}^m$.

Pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$, on note $f_i = (f_{i,1}, f_{i,2}, \cdots, f_{i,m})$.
On appelle **déterminant des fonctions $f_1, \cdots, f_m$** la fonction réelle $\det(f_1, \cdots, f_m) : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in I, \qquad \det(f_1, \cdots, f_m)(t) = \begin{vmatrix} f_{1,1}(t) & f_{2,1}(t) & \cdots & f_{m,1}(t) \\ f_{1,2}(t) & f_{2,2}(t) & \cdots & f_{m,2}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{1,m}(t) & f_{2,m}(t) & \cdots & f_{m,m}(t) \end{vmatrix}$$

(pour chaque $t \in I$, on prend le déterminant de la famille $(f_1(t), \cdots, f_m(t))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^m$).

Exemple.
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sont définies par $f(t) = (t, t^3 - 1)$ et $g(t) = (t^2, e^t)$, alors $\det(f, g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $\det(f,g)(t) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ t^3 - 1 & e^t \end{vmatrix} = te^t - (t^3 - 1)t^2$.

II Limites et continuité des fonctions vectorielles

Définition 6 (Limite d'une fonction vectorielle en un point).
Soit $f = (f_1, \cdots, f_m) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$. Etant donné un réel t_0, on dit que la fonction vectorielle f **possède une limite en t_0** si pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$, la fonction réelle $f_i : I \to \mathbb{R}$ possède une limite réelle en t_0. Dans ce cas, en notant $\ell_i = \lim\limits_{t \to t_0} f_i(t)$ pour tout i, on dit que le vecteur $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$ est la limite de f en t_0 et on note $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = \ell \in \mathbb{R}^m$.

Formellement, on a donc $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t \to t_0} f_1(t) \\ \lim\limits_{t \to t_0} f_2(t) \\ \vdots \\ \lim\limits_{t \to t_0} f_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

Remarque.
- *On rappelle que lorsqu'on étudie une limite en t_0, le réel t_0 n'est pas forcément dans I (par exemple, $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = 0$ mais $x \mapsto x \ln(x)$ n'est pas définie en 0).*
- *On peut définir de même la notion de limite vectorielle lorsque $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$, ainsi que les notions de limite vectorielle en t_0 "à gauche ou à droite".*

Proposition 7 (Reformulation d'une limite vectorielle avec la norme).
Soit $f = (f_1, \cdots, f_m) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$. Etant donné un réel t_0 et un vecteur $\ell \in \mathbb{R}^m$, on a

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \ell \iff \lim_{t \to t_0} \|f(t) - \ell\| = 0.$$

Preuve.
En notant $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_m)$, on a

$$\|f(t) - \ell\| = \sqrt{(f_1(t) - \ell_1)^2 + \cdots + (f_m(t) - \ell_m)^2}.$$

Montrons alors l'équivalence voulue.
$\boxed{\Rightarrow}$: si $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = \ell$, alors par définition, chaque composante $f_i(t)$ tend vers ℓ_i quand $t \to t_0$, donc en mettant au carré et en faisant la somme, on a : $\lim\limits_{t \to t_0} \sum\limits_{i=1}^{m} (f_i(t) - \ell_i)^2 = 0$. En prenant alors la racine carrée, on obtient $\lim\limits_{t \to t_0} \|f(t) - \ell\| = 0$.
$\boxed{\Leftarrow}$: si $\lim\limits_{t \to t_0} \|f(t) - \ell\| = 0$, alors on utilise l'inégalité suivante :

$$\forall i \in \{1, \cdots, m\}, \quad 0 \le |f_i(t) - \ell_i| = \sqrt{(f_i(t) - \ell_i)^2} \le \|f(t) - \ell\|,$$

et le théorème des gendarmes montre alors que $f_i(t) - \ell_i$ tend vers 0 quand $t \to t_0$, et ce pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$, donc $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = \ell$.

Définition 8 (Continuité d'une fonction vectorielle en un point).
Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$ et soit $t_0 \in I$. On dit que f est continue en t_0 si ses composantes $f_i : I \to \mathbb{R}$ sont continues en t_0 pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$.

Remarque.
- *On a clairement : f est continue en $t_0 \iff \lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0) \in \mathbb{R}^m$.*
- *On peut également définir la continuité à gauche ($\lim_{t \to t_0^-} f(t) = f(t_0)$) ou à droite pour les fonctions vectorielles ($\lim_{t \to t_0^+} f(t) = f(t_0)$).*

Définition 9 (Continuité d'une fonction vectorielle sur un intervalle I).
Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est continue sur I si elle est continue en chaque point $t_0 \in I$.

Notation.
On notera $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des fonctions continues $I \to \mathbb{R}^m$.

Proposition 10 (Structure algébrique de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^m)$).
Pour tout intervalle I non vide et non réduit à un point, $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^m)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$.

III Dérivation des fonctions vectorielles

1) Dérivabilité en un point

Définition 11 (Dérivabilité d'une fonction vectorielle).
Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$ et soit $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable en t_0 si ses composantes $f_i : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en t_0 pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$. Dans ce cas, on note

$$f'(t_0) = (f_1'(t_0), \cdots, f_m'(t_0)).$$

C'est le **vecteur dérivé de f en t_0**. On le note aussi $\frac{df}{dt}(t_0)$.

Exemple.
La fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\ln t, \frac{1}{t})$ est dérivable en $t_0 = 1$ et $f'(t_0) = (1, -1)$.

Proposition 12 (Reformulation de la dérivabilité).
Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$ et soit $t_0 \in I$. Alors f est dérivable en t_0 si et seulement si $\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe dans $\mathbb{R}^m$. Dans ce cas, on a $f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$.

Preuve.
Pour tout $t \neq t_0$, on a $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \begin{pmatrix} \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0} \\ \vdots \\ \frac{f_m(t) - f_m(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } t_0 &\iff \forall i \in \{1, \cdots, m\}, \quad f_i \text{ est dérivable en } t_0 \\ &\iff \forall i \in \{1, \cdots, m\}, \quad \lim_{t \to t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} \text{ existe dans } \mathbb{R} \\ &\iff \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \text{ existe dans } \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Remarque.
- *Si f est dérivable en t_0, alors f est continue en t_0, mais la réciproque est fausse.*
- *On peut aussi définir les notions de dérivabilité à gauche / à droite pour les fonctions vectorielles.*

2) Opérations sur les dérivées

Les démonstrations des propriétés suivantes sont simples (il suffit à chaque fois de se ramener aux composantes de la fonction vectorielle étudiée, et d'utiliser les formules de dérivation déjà connues pour les fonctions $I \to \mathbb{R}$). Elles sont donc laissées en exercice.

Proposition 13 (Somme et produit externe).
Soient deux fonctions vectorielles $f, g : I \to \mathbb{R}^m$ dérivables au point $t_0 \in I$. Alors

(i) la somme $f + g$ est dérivable en t_0, et $(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$.

(ii) pour tout réel λ, la fonction λf est dérivable en t_0, et $(\lambda f)'(t_0) = \lambda f'(t_0)$.

Proposition 14 (Produit d'une fct. numérique par une fct. vectorielle).
Soit une fonction **numérique** *$h : I \to \mathbb{R}$, et une fonction* **vectorielle** *$f : I \to \mathbb{R}^m$.*
On suppose que ces deux fonctions sont dérivables en $t_0 \in I$.
Alors, la fonction **vectorielle** *$hf : I \to \mathbb{R}^m$ est dérivable en t_0, et*

$$(hf)'(t_0) = \underbrace{h'(t_0)}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{f(t_0)}_{\in\mathbb{R}^m} + \underbrace{h(t_0)}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{f'(t_0)}_{\in\mathbb{R}^m}.$$

Proposition 15 (Dérivée d'une composée).
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.
Soit $\varphi : I \to J$ et soit $f : J \to \mathbb{R}^m$. On suppose que φ est **dérivable en $\boldsymbol{t_0 \in I}$**, *et que f est* **dérivable en $\boldsymbol{\varphi(t_0) \in J}$**. *Alors, la composée $f \circ \varphi : I \to \mathbb{R}^m$ est dérivable en t_0 et*

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \underbrace{\varphi'(t_0)}_{\in\mathbb{R}} \times \underbrace{f'(\varphi(t_0))}_{\in\mathbb{R}^m}.$$

Proposition 16 (Dérivée d'un produit scalaire, d'un produit vectoriel).
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions vectorielles dérivables en $t_0 \in I$.

(i) La fonction produit scalaire $\langle f, g\rangle : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en t_0 et

$$\langle f, g\rangle'(t_0) = \langle f'(t_0), g(t_0)\rangle + \langle f(t_0), g'(t_0)\rangle.$$

(ii) **Si $\boldsymbol{m = 3}$**, *alors la fonction produit vectoriel $f \wedge g : I \to \mathbb{R}^3$ est dérivable en t_0 et*

$$(f \wedge g)'(t_0) = f'(t_0) \wedge g(t_0) + f(t_0) \wedge g'(t_0).$$

Proposition 17 (Dérivée d'un déterminant en dimensions 2 et 3).
Soit $t_0 \in I$.

(i) Soient deux fonctions vectorielles $f : I \to \mathbb{R}^2$ et $g : I \to \mathbb{R}^2$ dérivables en t_0. Alors, la fonction $\det(f, g) : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en t_0 et

$$\det(f, g)'(t_0) = \det(f'(t_0), g(t_0)) + \det(f(t_0), g'(t_0)).$$

(ii) Soient trois fonctions vectorielles $f : I \to \mathbb{R}^3$, $g : I \to \mathbb{R}^3$ et $h : I \to \mathbb{R}^3$ dérivables en t_0. Alors, la fonction $\det(f, g, h) : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en t_0 et

$$\det(f, g, h)'(t_0) = \det(f'(t_0), g(t_0), h(t_0)) + \det(f(t_0), g'(t_0), h(t_0)) + \det(f(t_0), g(t_0), h'(t_0)).$$

3) Dérivabilité sur un intervalle

Définition 18 (Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée).
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}^m$ est **dérivable sur $\boldsymbol{I}$** si f est dérivable en tout point $t_0 \in I$. Dans ce cas, la fonction $t \mapsto f'(t)$ s'appelle la fonction dérivée de f. On la note $f' : I \to \mathbb{R}^m$.

Remarque.
La fonction dérivée f' est donc, comme f, une fonction **vectorielle**, *et on a*

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = (f_1'(t), \cdots, f_m'(t)).$$

En utilisant les résultats de la partie précédente en chaque point $t_0 \in I$, on obtient directement des énoncés globaux (vrais sur tout l'intervalle I) :

Proposition 19 (Opérations sur les fonctions dérivables).
Soit trois fonctions vectorielles $f, g, h : I \to \mathbb{R}^m$ dérivables. Alors,

(i) *La fonction $f + g$ est dérivable, et* $\boldsymbol{(f+g)' = f' + g'}$.

(ii) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable et* $\boldsymbol{(\lambda f)' = \lambda f'}$.

(iii) *Si $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction numérique dérivable, alors la fonction vectorielle $hf : I \to \mathbb{R}^m$ est dérivable, et* $\boldsymbol{(hf)' = h'f + hf'}$.

(iv) *La fonction produit scalaire $\langle f, g\rangle : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, et*
$$\boldsymbol{\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle}.$$

(v) *Si $m = 3$, la fonction produit vectoriel $f \wedge g : I \to \mathbb{R}^3$ est dérivable, et*
$$\boldsymbol{(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'}.$$

(vi) *Si $m = 2$, la fonction déterminant $\det(f, g) : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, et*
$$\boldsymbol{\det(f, g)' = \det(f', g) + \det(f, g')}.$$

(vii) *Si $m = 3$, la fonction déterminant $\det(f, g, h) : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, et*
$$\boldsymbol{\det(f, g, h)' = \det(f', g, h) + \det(f, g', h) + \det(f, g, h')}.$$

Corollaire 20 (Structure de l'ensemble des fonctions dérivables).
L'ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^m)$ des fonctions dérivables $I \to \mathbb{R}^m$ est un sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$.

Proposition 21 (Dérivée d'une composée).
Soit I et J deux intervalles $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point, et soit $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R}^m)$ telles que $\varphi(I) \subset J$. Alors, $f \circ \varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^m)$, et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$.

IV Fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^k$

1) Classe $\mathcal{C}^1$

Définition 22 (Fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^1$).
On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est **de classe $\mathcal{C}^1$** si f est dérivable et si la fonction dérivée f' est continue sur I. On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.

Proposition 23 (Lien avec les composantes).
Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$. On a $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^m)$ si et seulement si $f_i \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$.

2) Dérivées successives, classe $\mathcal{C}^k$

Définition 24 (Fonction deux fois dérivable en un point).
Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}^m$ et un point $t_0 \in I$. On dit que f est **deux fois dérivable en** t_0 si f est dérivable sur un voisinage de t_0 et si la fonction dérivée f' est dérivable en t_0.
On note alors $f''(t_0) = (f')'(t_0) \in \mathbb{R}^m$ ou $f^{(2)}(t_0)$ ou encore $\frac{d^2 f}{dt^2}(t_0)$.

Remarque.
$f''(t_0)$ est le "vecteur dérivée seconde" de f au point t_0.
Vu que $f''(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \left(\dfrac{f'(t) - f'(t_0)}{t - t_0} \right)$, il est nécessaire que $f'(t)$ existe sur un voisinage de t_0 pour que le taux de variation ait un sens.

On peut généraliser :

Définition 25 (Fonction k fois dérivable en un point).
Soit $k \geq 2$ un entier, une fonction $f : I \to \mathbb{R}^m$ et un point $t_0 \in I$. On dit que f est **$\boldsymbol{k}$ fois dérivable en $\boldsymbol{t_0}$**, si f est dérivable sur un voisinage de t_0 et f' est $(k-1)$ fois dérivable en t_0.

Remarque.
C'est une définition récursive. Le cas initial est $k = 1$: "1 fois dérivable" signifie "dérivable".

Définition 26 (Fonction k fois dérivable sur un intervalle, dérivée k^{eme}).
Soit $k \geq 2$ un entier, une fonction $f : I \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est **k fois dérivable**, si f est dérivable et f' est $(k-1)$ fois dérivable. Dans ce cas, on pose alors $f^{(k)} = (f')^{(k-1)}$. On appelle **dérivée k^{eme} de f** cette fonction $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}^m$.

Remarque.
Là aussi, c'est une définition récursive, le cas initial est $k = 1$: $f^{(1)} = f'$.
Ainsi, on a $f^{(2)} = (f')' = f''$, $f^{(3)} = (f')^{(2)} = (f'')'$, et pour tout $k \geq 1$, $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$.

Convention.
On notera $f^{(0)} = f$.

Définition 27 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$).
Soit une fonction vectorielle $f : I \to \mathbb{R}^m$.

(*i*) On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^0$** si elle est continue.

(*ii*) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^k$** si f est k-fois dérivable sur I et si la dérivée k-ème $f^{(k)}$ est continue.

(*iii*) On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Notation.
Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on notera $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarque.
f de classe $\mathcal{C}^k$ signifie que $f', f'', \cdots f^{(k)}$ existent et sont continues sur I.

Proposition 28 (Lien avec les composantes).
Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On a $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^m)$ si et seulement si $f_i \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$.

Remarque.
On a la chaîne **d'inclusions strictes** *suivante :*

$$\{0\} \subset \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^m) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^m),$$

3) Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Les propositions suivantes sont également faciles à montrer, en utilisant les composantes. On les laisse en exercice.

Proposition 29 (Opérations linéaires).
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^k$. Alors

(i) La somme $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $(f + g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est de classe $\mathcal{C}^k$, et $(\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$.

Corollaire 30 (Structure algébrique des ensembles $\mathcal{C}^k$).

(i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^m)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^m)$.

(ii) L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^m)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^m)$.

Proposition 31 (Composition des fonctions $\mathcal{C}^k$).
Soit I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point, et deux applications $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{R}^m$ telles que $\varphi(I) \subset J$. Si $\varphi \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ et si $f \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{R}^m)$, alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^m)$.

V Développement limité d'une fonction vectorielle

Définition 32 (Développement limité vectoriel).
Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}^m$. On dit que f **admet un développement limité à l'ordre n** (en abrégé DL_n) au voisinage de t_0 s'il existe des vecteurs $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^m$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^m$ tels que

$$f(t) = a_0 + (t-t_0)a_1 + \cdots + (t-t_0)^n a_n + (t-t_0)^n \varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0_{\mathbb{R}^m},$$

ce qui s'écrit aussi

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} (t-t_0)^k a_k + \underset{t \to t_0}{o}((t-t_0)^n).$$

ATTENTION.
Les coefficients d'un tel développement limité sont **des vecteurs de $\mathbb{R}^m$**.

Remarque (Unicité du DL_n).
On peut facilement montrer que si f admet un DL_n au voisinage de t_0, alors celui-ci est unique.

Proposition 33 (Lien avec les composantes).
La fonction $f : I \to \mathbb{R}^m$ admet un DL_n en t_0 si et seulement si ses composantes $f_1, \cdots, f_m : I \to \mathbb{R}$ admettent un DL_n en t_0. Dans ce cas, pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$ et pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$, **la i^e coordonnée du vecteur $a_k \in \mathbb{R}^m$** *est* **le coefficient du terme $(t-t_0)^k$ dans le DL_n en t_0 de la composante f_i**.

Preuve.
Cela repose sur le fait que si $t \mapsto R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) \\ \vdots \\ R_m(t) \end{pmatrix}$ est une fonction vectorielle, on a $R(t) = \underset{t \to t_0}{o}((t-t_0)^n)$ si et seulement si toutes ses composantes R_i vérifient $R_i(t) = \underset{t \to t_0}{o}((t-t_0)^n)$.

Exemple.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \ln(1+t^2) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Alors, f admet un DL_4 en 0 :

$$f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} + t^4 \begin{pmatrix} \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{t \to 0}{o}(t^4),$$

car

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \underset{t \to 0}{o}(t^4),$$

$$\ln(1+t^2) = t^2 - \frac{t^4}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^4),$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \underset{t \to 0}{o}(t^4).$$

Théorème 34 (Formule de Taylor-Young).
Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}^m)$, et $t_0 \in I$. Alors f possède un DL_n au voisinage de t_0, donné par

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} f''(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0) + (t-t_0)^n \varepsilon(t),$$

avec $\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0_{\mathbb{R}^m}$.

Preuve.
Facile en découplant les composantes, qui sont des fonctions $I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, et en leur appliquant la formule de Taylor-Young vue en TSI 1.

Remarque.
Ce théorème donne une **condition suffisante pour l'existence d'un DL_n** *en t_0.*

ATTENTION.
La condition n'est pas nécessaire !

Corollaire 35 (Cas où f est de classe $\mathcal{C}^\infty$).
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}^m$ **de classe $\mathcal{C}^\infty$** *possède des* **DL à tout ordre, en tout point $t_0 \in I$**, *donnés par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + \underset{t \to t_0}{o}((t-t_0)^n).$$

VI Exercices d'application

Exercice 1 (Calcul de dérivée).
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $g : t \mapsto \left(\ln(\sqrt{t^2+1}), \arctan(\sqrt{t^2+1})\right)$.
Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2 (Etude d'un raccord).
On considère la fonction : $\left\{\begin{array}{cccl} \overrightarrow{f}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} \left(\frac{1-\cos t}{e^t-1}, \frac{\sin t}{e^t-1}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ (0,1) & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array}\right.$.
Démontrer que $\overrightarrow{f} \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\right)$.

Exercice 3 (Dérivée de la norme de f).
Soit I un intervalle réel non trivial, et soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$ telle que $\forall t \in I,\ f(t) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.
On considère l'application $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in I,\ \varphi(t) = \|f(t)\|$.

1. Montrer **sans calcul** que $\varphi \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.
   On explicitera φ en fonction des composantes de f et on raisonnera par composition.
2. Montrer que $\forall t \in I,\ \ \varphi'(t) = \dfrac{\langle f'(t), f(t)\rangle}{\|f(t)\|}$.
3. Calculer $\varphi''(t)$ pour $t \in I$.

Exercice 4 (Calculs de DL vectoriels en 0).
Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition de la fonction vectorielle étudiée, puis en déterminer un DL_n au voisinage de 0 :

$$f : D_1 \to \mathbb{R}^3, \quad f(t) = \left(e^t - 1, \frac{1}{t+1}, \ln(1-t^2)\right), \qquad n = 5,$$

$$g : D_2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(t) = \left(\frac{1}{(1-t)^2}, \frac{\arctan(t)}{t}\right), \qquad n = 6,$$

$$u : D_3 \to \mathbb{R}^2, \quad u(t) = \left(\frac{\sin t}{1+\cos t}, \frac{\sin^2(t)}{t}\right), \qquad n = 3,$$

$$v : D_4 \to \mathbb{R}^3, \quad v(t) = \left(e^{1-\cos(t)}, \cos(\sin t), \sqrt{1+t^2}\right), \qquad n = 4.$$

Exercice 5 (Calcul de DL vectoriel en $t_0 \neq 0$).
On considère la fonction $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(t) = \left(\frac{t^2}{t-1}, \frac{t^3+4}{t-1} \right).$$

1. Déterminer un DL_3 de f au voisinage de $t_0 = 2$.
2. En déduire sans calcul supplémentaire la valeur de $f'''(2)$.

Exercice 6 (Rolle et accroissements finis encore).

1. Montrer en étudiant $f : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ que le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis ne sont pas vrais en général pour des fonctions vectorielles.
2. Et pour des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$?