Corrigé du DS6 du 14/02/20 (2h) - Sujet B
Espaces préhilbertiens, probabilités

* * *

Corrigé de l'exercice 1 (Polynômes de Tchebychev). *1. — On sait que* $T_0(\cos(\theta)) = \cos(0) = 1$*. Donc pour tout* $x \in [-1;1]$*,* $T_0(x) = 1$ *et ainsi pour tout réel* x*,*

$$T_0(x) = 1.$$

— *On sait que* $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$*. Donc pour tout* $x \in [-1;1]$*,* $T_1(x) = x$ *et ainsi pour tout réel* x*,*

$$T_1(x) = x.$$

— *On sait que* $T_2(\cos(\theta)) = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$*. Donc pour tout* $x \in [-1;1]$*,* $T_2(x) = 2x^2 - 1$ *et ainsi pour tout réel* x*,*

$$T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

— *On sait que*

$$T_3(\cos(\theta)) = \cos(3\theta) = \cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta) = \cos(\theta)(2\cos^2(\theta) - 1) - 2\cos(\theta)(1 - \cos^2(\theta)).$$

Donc pour tout $x \in [-1;1]$*,* $T_3(x) = x(2x^2 - 1) - 2x(1 - x^2) = 4x^3 - 3x$ *et ainsi pour tout réel* x*,*

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$*. La fonction* $f : t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ *est continue sur* $]-1;1[$*, donc l'intégrale est impropre en* -1 *et* 1*. De plus,* f *est paire ou impaire (suivant la parité de l'entier* k*), donc il suffit de montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ *(impropre en* 1*) est convergente. Pour cela déterminons un équivalent simple de* f *au voisinage de* 1^-*, en posant* $t = 1 - h$ *(de sorte que* t *tend vers* 1^- *lorsque* h *tend vers* 0^+*) :*

$$f(t) = f(1-h) = \frac{(1-h)^k}{\sqrt{1-(1-h)^2}} \underset{h \to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2h}}.$$

La fonction $h \mapsto \frac{1}{\sqrt{2h}}$ *est intégrable au voisinage de* 0^+ *(d'après le critère de Riemann avec un exposant* $\alpha < 1$*), donc d'après le critère des équivalents pour les fonctions positives, la fonction* $t \mapsto f(t)$ *est intégrable au voisinage de* 1^-*, ce qui montre la convergence de l'intégrale étudiée.*

(b) Si $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$*, la fonction produit* $t \mapsto P(t)Q(t)$ *est aussi un polynôme, donc une combinaison linéaire de monômes* $t \mapsto t^k$*. Par linéarité de l'intégrale impropre convergente, on en déduit d'après la question précédente que l'intégrale* $\langle P|Q\rangle$ *converge.*

3. La symétrie de l'opération $\langle\ |\ \rangle$ *est évidente, sa bilinéarité résulte de la linéarité de l'intégrale impropre convergente. Pour le caractère défini-positif : on a* $\langle P|P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$*, donc*

- $\langle P|P\rangle \geq 0$*, puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle non réduit à un point, et avec les bornes de l'intégrale "dans le bon sens" ;*
- *si* $\langle P|P\rangle = 0$*, on en déduit que la fonction* **continue et positive** $t \mapsto \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$*, qui est d'intégrale nulle, est alors nulle sur l'intervalle* $]-1;1[$*. Il s'ensuit* $P(t) = 0$ *pour tout* $t \in]-1;1[$*. Dès lors, le polynôme* P *possède une infinité de racines (tous les réels dans* $]-1;1[$*), donc il est identiquement nul : on a bien montré* $\langle P|P\rangle = 0 \Longrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$*.*

Tout ceci montre que l'opération $\langle\ |\ \rangle$ *est bien un produit scalaire sur* $\mathbb{R}[X]$*.*

4. *Soit n et p deux entiers distincts. On souhaite montrer que $\langle T_n, T_p\rangle = 0$. On a $\langle T_n, T_p\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.*
On effectue le changement de variable $t = \cos(\theta)$. On a alors $dt = -\sin(\theta)\ d\theta$ et θ varie entre π et 0.

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_p\rangle &= \int_\pi^0 \frac{T_n(\cos(\theta))T_p(\cos(\theta))}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}\ (-\sin(\theta)\ d\theta)\\ &= \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(p\theta)\ d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2}(\cos((n+p)\theta)+\cos((n-p)\theta))\ d\theta\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+p}\sin((n+p)\theta)+\frac{1}{n-p}\sin((n-p)\theta)\right]_0^\pi\\ &= 0\end{aligned}$$

La famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.

5. *Il suffit ici de « normer » les T_n.*
Avec le même changement de variable que dans la question précédente on a

$$||T_n||^2 = \int_0^\pi \frac{1}{2}(\cos(2n\theta)+1)\ d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & si\ n \geq 1 \\ \pi & si\ n = 0\end{cases}$$

Donc si on pose $Q_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi}}T_0$ et $Q_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée.

6. *On remarque ici que $F = Vect(T_0, T_1)$.*
De plus $X^2 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}T_0$ et $T_2 \in F^\perp$
Ainsi $p_F(X^2) = \frac{1}{2}T_0$ et $X^2 - p_F(X^2) = \frac{1}{2}T_2$
En conclusion $d(X^2, F) = ||X^2 - p_F(X^2)|| = ||\frac{1}{2}T_2|| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

* * *

Corrigé de l'exercice 2 (Séries Pile/Face).
Corrigé réalisé par Emily Tournesac et François Dusson.
Partie I : étude des longueurs de séries

1. (a) *D'après les explications de l'énoncé $L_1(\Omega_n) = [\![1; n]\!]$.*
   (b) *D'après les explications de l'énoncé $[L_1 = m] = (P_1 \cap \ldots \cap P_m \cap F_{m+1}) \cup (F_1 \cap \ldots \cap F_m \cap P_{m+1})$. On a donc :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_1 = m) &= \mathbb{P}\left((P_1 \cap \ldots \cap P_m \cap F_{m+1}) \cup (F_1 \cap \ldots \cap F_m \cap P_{m+1})\right)\\ &= \mathbb{P}\left(P_1 \cap \ldots \cap P_m \cap F_{m+1}\right) + P\left(F_1 \cap \ldots \cap F_m \cap P_{m+1}\right) \quad \text{\textit{événements incompatibles}}\\ &= p^m \times q + q^m \times p \qquad \text{\textit{les lancers sont indépendants}}\end{aligned}$$

   En conclusion, $\mathbb{P}(L_1 = m) = p^m \times q + q^m \times p$.
   (c) *D'après les explications de l'énoncé $[L_1 = n] = (P_1 \cap \ldots \cap P_n) \cup (F_1 \cap \ldots \cap F_n)$. De même que dans la question précédente, on a donc $\mathbb{P}(L_1 = n) = p^n + q^n$.*
   (d) *On a :*

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(L_1 = m) &= \sum_{m=1}^{n-1}(p^m \times q + q^m \times p) + p^n + q^n\\ &= q \times p\frac{1-p^{n-1}}{1-p} + p \times q\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + p^n + q^n\\ &= p - p^n + q - q^n + p^n + q^n = 1.\end{aligned}$$

2. (a) *D'après les explications de l'énoncé,* $L_2(\Omega_n) = [\![0; n-1]\!]$.

(b) *On a :*

$$\begin{aligned}[L_1 = m] \cap [L_2 = k] = (P_1 \cap \ldots \cap P_m \cap F_{m+1} \cap \ldots \cap F_{m+k} \cap P_{m+k+1}) \\ \cup (F_1 \cap \ldots \cap F_m \cap P_{m+1} \cap \ldots \cap P_{m+k} \cap F_{m+k+1}).\end{aligned}$$

Toujours avec les mêmes arguments d'incompatibilité et d'indépendance, on obtient

$$P([L_1 = m] \cap [L_2 = k]) = p^{m+1}q^k + p^k q^{m+1}.$$

(c) *Dans cette question on a*

$$[L_1 = m] \cap [L_2 = k] = (P_1 \cap \ldots \cap P_m \cap F_{m+1} \cap \ldots \cap F_n) \cup (F_1 \cap \ldots \cap F_m \cap P_{m+1} \cap \ldots \cap P_n).$$

Donc on en déduit que lorsque $m + k = n$, $P([L_1 = m] \cap [L_2 = k]) = p^m q^k + p^k q^m$.

(d) *D'après la formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événements* $([L_1 = m])_{m \in L_1(\Omega_n)}$*, on a pour tout* $k \in [\![1; n-1]\!]$ *:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_2 = k) &= \sum_{m=1}^{n} P([L_1 = m] \cap [L_2 = k]) \\ &= \sum_{m=1}^{n-k-1} P([L_1 = m] \cap [L_2 = k]) + P([L_1 = n-k] \cap [L_2 = k]) \\ &\qquad + \sum_{m=n-k+1}^{n} P([L_1 = m] \cap [L_2 = k]) \\ &= \sum_{m=1}^{n-k-1} (p^{m+1}q^k + p^k q^{m+1}) + p^{n-k}q^k + p^k q^{n-k} + \sum_{m=n-k+1}^{n} 0 \\ &= q^k \times p^2 \frac{1 - p^{n-k-1}}{1-p} + p^k \times q^2 \frac{1 - q^{n-k-1}}{1-q} + p^{n-k}q^k + p^k q^{n-k} \\ &= q^{k-1}p^2 - q^{k-1}p^{n-k+1} + p^{k-1}q^2 - p^{k-1}q^{n-k+1} + p^{n-k}q^k + p^k q^{n-k} \\ &= q^{k-1}p^2 + p^{k-1}q^2 + p^{n-k}q^{k-1}(q-p) + p^{k-1}q^{n-k}(p-q).\end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$,

$$\mathbb{P}(L_2 = k) = q^{k-1}p^2 + p^{k-1}q^2 + p^{n-k}q^{k-1}(q-p) + p^{k-1}q^{n-k}(p-q).$$

(e) *L'événement* $[L_2 = 0]$ *signifie qu'il n'y a pas eu de deuxième série, donc que la première série était de longueur* n *:* $[L_2 = 0] = [L_1 = n]$.
On a donc $\mathbb{P}(L_2 = 0) = p^n + q^n$.

Partie II : étude du nombre de séries lors de n lancers

3. *On a :*
$N_1(\Omega_1) = \{1\}$. $\mathbb{P}(N_1 = 1) = 1$.
$N_2(\Omega_2) = \{1, 2\}$. $\mathbb{P}(N_2 = 1) = \mathbb{P}((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) = p^2 + q^2 = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(N_2 = 2) = \mathbb{P}((P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)) = pq + qp = 2pq = \frac{1}{2}$.
On vérifie que $p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2 = 1$.
$N_3(\Omega_3) = \{1, 2, 3\}$. $\mathbb{P}(N_3 = 1) = \mathbb{P}((P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)) = p^3 + q^3 = \frac{1}{4}$.
$\mathbb{P}(N_3 = 2) = \mathbb{P}((P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)) = 2p^2q + 2q^2p = \frac{1}{2}$.
$\mathbb{P}(N_3 = 3) = \mathbb{P}((P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)) = p^2q + q^2p = \frac{1}{4}$.
On vérifie que $p^3 + q^3 + 2p^2q + 2q^2p + p^2q + q^2p = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1$.
$E(N_1) = 1$, $E(N_2) = \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $E(N_3) = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} = 2$.

4. $N_n(\Omega_n) = \{1, \cdots, n\}$. $\mathbb{P}(N_n = 1) = p^n + q^n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
$\mathbb{P}(N_n = n) = p^{E(\frac{n}{2})}q^{n-E(\frac{n}{2})} + q^{E(\frac{n}{2})}p^{n-E(\frac{n}{2})} = \frac{1}{2^{n-1}}$. *(E désigne juste là la partie entière d'un réel).*

5. (a) *Le théorème de transfert dit que si X est une variable aléatoire de valeurs distinctes x_k, k variant de 1 à p et f une fonction définie sur l'image de X alors $E(f(X)) = \sum_{k=1}^{p} f(x_k)\mathbb{P}(X = x_k)$. Prenons $X = N_n$, $x_k = k$, k variant de 1 à n et $f : x \mapsto s^x$. Il vient : $E(s^{N_n}) = E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^{n} s^k \mathbb{P}(N_n = k)$*
Conclusion : Pour $s \in [0,1]$ $\quad G_n(s) = E(s_n^N)$.
   (b) *$G_n'(s) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_n = k)ks^{k-1}$ donc $G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(N_n = k) = E(N_n)$.*
Conclusion : $G_n'(1)$ est l'espérance de N_n.
   (c) *$(N_n = k) \cap P_n = ((N_n = k \cap P_n \cap P_{n-1}) \cup ((N_n = k \cap P_n \cap F_{n-1})$, réunion de deux évènements incompatibles (P_{n-1} et F_{n-1} formant un système complet).*
Donc $\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) = \mathbb{P}((N_n = k \cap P_n \cap P_{n-1}) + \mathbb{P}((N_n = k \cap P_n \cap F_{n-1})$.
On a $(N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1} = (N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n$ parce que :
- Si $w \in (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1}$ alors les deux derniers lancers dans w étant identiques, ils font partie de la même série. Donc avant le lancer n, il y a le même nombre de séries qu'après le lancer n donc $N_{n-1}(w) = k$, donc $w \in (N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n$.
- Réciproquement, si $w \in (N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n$ alors les deux derniers lancers étant identiques, le nombre de séries ne changent pas entre le lancer $n-1$ et le lancer n, donc $X_n(w) = k$, donc $w \in (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1}$.
On a $(N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1} = (N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n$ parce que :
- Si $w \in (N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1}$ alors les deux derniers lancers dans w étant différents, ils se créent une nouvelle série par le lancer n. Donc $N_{n-1}(w) = k-1$, donc $w \in (N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n$.
- Réciproquement, si $w \in (N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n$ alors les deux derniers lancers étant différents, le nombre de séries augmente de 1 entre le lancer $n-1$ et le lancer n, donc $X_n(w) = k$,
donc $w \in (N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1}$.
On en tire que :
$\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1}) = \mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n) = \mathbb{P}((N_{n-1} = k \cap P_{n-1})\mathbb{P}(P_n)$
car les lancers sont indépendants.
De même :
$\mathbb{P}((N_n = k)\cap P_n \cap F_{n-1}) = \mathbb{P}((N_{n-1} = k-1)\cap F_{n-1} \cap P_n) = \mathbb{P}((N_{n-1} = k-1)\cap F_{n-1})\mathbb{P}(P_n)$
D'où $\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})$.
   (d) *On va utiliser la formule des probabilités totales en utilisant d'abord (F_n, P_n) comme système complet d'évènements puis (F_{n-1}, P_{n-1}). En utilisant les résultats acquis de la question, il vient :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_n = k) &= \mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) + \mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n) \\
&= \left(\tfrac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \tfrac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})\right) \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \tfrac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1})\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left(\mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) + \mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})\right).
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k-1)$.
   (e) *Soit $n \geq 2$. $G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_n = k)s^k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_{n-1} = k)s^k + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_{n-1} = k-1)s^k\right)$.*
Comme $\mathbb{P}(N_{n-1} = n) = 0$, on a $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_{n-1} = k)s^k = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(N_{n-1} = k)s^k = G_{n-1}(s)$.
Comme $\mathbb{P}(N_{n-1} = 0) = 0$, on $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_{n-1} = k-1)s^k = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(N_{n-1} = k-1)s^k =$
$= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(N_{n-1} = j)s^{j+1} = sG_{n-1}(s)$.
Donc $G_n(s) = \frac{1}{2}G_{n-1}(s) + \frac{1}{2}sG_{n-1}(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s)$.
$G_1(s) = \mathbb{P}(N_1 = 1)s = s$.
$(G_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad G_n(s) = s\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}$

(f) *Soit* $n \geq 2$. *Cette question demande de calculer* $E(N_n)$ *c'est-à-dire de calculer* $G_n'(1)$ *(d'après 5.(b)).*

D'après la question précédente, $G_n'(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} + s(n-1)\frac{1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2}$.

$G_n'(1) = 1 + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$.

Remarque : Pour $n = 2$*, on retrouve bien* $E(N_2) = \frac{3}{2}$ *et* $E(N_3) = 2$ *(résultats de la question 3.)*

* * *