DS6 du 14/02/20 (2h) - Sujet B
Espaces préhilbertiens, probabilités

Le sujet se compose de 2 exercices indépendants.
Calculatrices interdites.

* * *

Exercice 1 (Polynômes de Tchebychev).
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire suivant :

$$< P|Q >= \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le polynôme de Tchebychev de première espèce, c'est-à-dire l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

1. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ et $T_3(x)$ en fonction de x.
2. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge.
   (b) En déduire que pour tout couple de polynômes $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, l'intégrale impropre $< P|Q >$ est convergente.
3. Vérifier que $< .|. >$ est bien un produit scalaire.
4. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
   On pourra utiliser un changement de variable.
5. Construire une famille orthonormale à partir de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Soit $F = Vect(1, X)$. Calculer la distance $d(X^2, F)$.

* * *

Exercice 2 (Séries de Pile/Face).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0;1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté. Pour décrire la succession de n lancers, on introduit la notion de séries de lancers amenant un même côté et on parle de longueur d'une série. Ainsi, la première série est de longueur $m \in [\![1; n-1]\!]$ si les m premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(m+1)^{\text{ième}}$ l'autre côté, et de longueur n si les n lancers ont amené le même côté de la pièce. Si la longueur de la première série est égale à $m < n$, la deuxième série commence au $(m+1)^{\text{ième}}$ lancer et se termine au lancer précédant un changement de côté s'il y a, au moins, un deuxième changement de côté au cours des n lancers, sinon on dit qu'elle est de longueur $n - m$. On peut définir de même les séries suivantes.

Par exemple, si 11 lancers ont donné `PPPFFPPPPFF` (`F` désignant face et `P` pile), la première série est de longueur 3, la deuxième de longueur 2, la troisième de longueur 4 et la quatrième de longueur 2.

Ω_n désigne l'ensemble des successions de pile ou face au bout de n lancers. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ lancer amène pile » et F_i l'événement contraire.
Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I : étude des longueurs de séries
On considère que $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

1. On note L_1 la longueur de la première série.

(a) Déterminer $L_1(\Omega_n)$ (ensemble des valeurs prises par L_1).

(b) On suppose que $m < n$. Exprimer l'événement $[L_1 = m]$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m+1$. En déduire la probabilité de l'événement $[L_1 = m]$.

(c) On suppose maintenant que $m = n$. Exprimer l'événement $[L_1 = n]$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et n. En déduire la probabilité de l'événement $[L_1 = n]$.

(d) Vérifier que $\sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(L_1 = m) = 1$.

2. On note L_2 la longueur de la deuxième série, s'il y en a une, et on pose $L_2 = 0$ s'il n'y a pas de deuxième série.

   (a) Déterminer $L_2(\Omega_n)$.

   (b) On suppose que $m + k < n$. Exprimer l'événement $[L_1 = m] \cap [L_2 = k]$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m + k + 1$. En déduire la probabilité de l'événement $[L_1 = m] \cap [L_2 = k]$.

   (c) On suppose que $m + k = n$. Exprimer l'événement $[L_1 = m] \cap [L_2 = k]$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et n. En déduire la probabilité de l'événement $[L_1 = m] \cap [L_2 = k]$.

   (d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(L_2 = k)$ pour $k \in [\![1; n-1]\!]$.

   (e) Calculer $\mathbb{P}(L_2 = 0)$.

Partie II : étude du nombre de séries lors de n lancers

On considère dans toute cette partie que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire que $p = 1/2$.
On suppose que l'on effectue n lancers indépendants et on note N_k le nombre de séries lors des k premiers lancers (avec $1 \leq k \leq n$).

Par exemple, si on prend $n = 11$ et les lancers successifs donnent `FFPPPPFFPPP` (`F` désignant face et `P` pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega_{11}$: $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$, $N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2$, $N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3$ et $N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4$. On admettra que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, N_k est une variable aléatoire sur Ω_n.

3. Déterminer les lois de N_1, N_2, N_3 et donner leurs espérances.

4. Déterminer $N_n(\Omega_n)$, puis calculer les valeurs de $\mathbb{P}(N_n = 1)$ et $\mathbb{P}(N_n = n)$.

5. **Fonctions génératrices de N_n**

   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0; 1]$, $G_n(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_n = k) s^k$.

   (a) Pour $s \in [0; 1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

   (b) Que représente $G_n'(1)$?

   (c) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

   $$\mathbb{P}\left((N_n = k) \cap P_n\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}\right).$$

   On admet que l'on obtiendrait de même :

   $$\mathbb{P}\left((N_n = k) \cap F_n\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}\right).$$

   (d) En déduire que pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$:

   $$\mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k-1).$$

   (e) Pour $n \geq 2$, montrer que $G_n(s) = \dfrac{1+s}{2} G_{n-1}(s)$.

   Calculer $G_1(s)$ et en déduire que $G_n(s) = \left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1} s$.

   (f) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n lancers.

* * *