Corrigé du DS6 du 14/02/20 (2h) - Sujet A
Equations différentielles, probabilités

Corrigé de l'exercice 1 (Jeu vidéo).
I.

1. *On a* $S(q) = \dfrac{1}{1-q}$.

2. *On rappelle que la série géométrique dérivée et la série géométrique dérivée seconde,* $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$ *et* $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}$*, ont pour rayon de convergence* 1 *et, par le théorème de dérivation terme à terme pour les séries entières (appliqué deux fois), on a :*
$\forall\ x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
$\forall\ x \in]-1,1[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$.
Ainsi : $S_1(q) = \dfrac{1}{(1-q)^2}$ *et* $S_2(q) = \dfrac{2}{(1-q)^3}$ *(en sachant que* $q \in]-1,1[$*).*

3. • *Puisque la série entière* $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$ *a pour rayon de convergence* 1*, on en déduit qu'il en est de même pour la série entière* $\sum_{n\geqslant 2} nx^n$*, et :*
$$\forall\ x \in]-1,1[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} nx^n = x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} - 1\right) = \frac{x}{(1-x)^2} - x.$$
Ainsi : $T(q) = \dfrac{q}{(1-q)^2} - q = \dfrac{q^2(2-q)}{(1-q)^2}$.
• *Pour tout entier naturel supérieur ou égal à* 2, $n^2 = n(n-1) + n$.
Donc, puisque les séries entières $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}$ *et* $\sum_{n\geqslant 2} nx^n$ *ont pour rayon de convergence* 1*, on en déduit que la série entière* $\sum_{n\geqslant 2} n^2x^n$ *a un rayon de convergence au moins égal à* 1*, et :*
$$\forall\ x \in]-1,1[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n^2x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} nx^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} - x.$$
Ainsi : $U(q) = \dfrac{2q^2}{(1-q)^3} + \dfrac{q}{(1-q)^2} - q = \dfrac{q^2(q^2-3q+4)}{(1-q)^3}$.

II.

4. *Le jeu s'arrête lorsque le joueur traverse successivement deux salles vides.*
Donc $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

5. • $(X=2) = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$.
• $(X=3) = M_1 \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}$.
• $(X=4) = (M_1 \cap M_2 \cap \overline{M_3} \cap \overline{M_4}) \cup (\overline{M_1} \cap M_2 \cap \overline{M_3} \cap \overline{M_4})$.
• $(X=5) = (M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M_4} \cap \overline{M_5}) \cup (M_1 \cap \overline{M_2} \cap M_3 \cap \overline{M_4} \cap \overline{M_5}) \cup (\overline{M_1} \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M_4} \cap \overline{M_5})$.

6. *Par indépendance mutuelle des M_i, en s'aidant de la question précédente, on trouve :*
   - $\mathbb{P}(X=2)=(1-p)^2$.
   - $\mathbb{P}(X=3)=p(1-p)^2$.
   - $\mathbb{P}(X=4)=p^2(1-p)^2+p(1-p)^3=p(1-p)^2$ *(sachant que les évènements* $(M_1\cap M_2\cap\overline{M_3}\cap\overline{M_4})$ *et* $(\overline{M_1}\cap M_2\cap\overline{M_3}\cap\overline{M_4})$ *sont incompatibles).*
   - $\mathbb{P}(X=5)=p^3(1-p)^2+p^2(1-p)^3+p^2(1-p)^3=p^2(1-p)^2(2-p)$ *(sachant que les évènements* $(M_1\cap M_2\cap M_3\cap\overline{M_4}\cap\overline{M_5})$, $(M_1\cap\overline{M_2}\cap M_3\cap\overline{M_4}\cap\overline{M_5})$ *et* $(\overline{M_1}\cap M_2\cap M_3\cap\overline{M_4}\cap\overline{M_5})$ *sont incompatibles deux à deux).*
7. *D'après la formule des probabilités totales avec le système complet* $(M_1,\overline{M_1})$, *pour* $n\geqslant 4$ *:*

$$\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}((X=n)\cap M_1)+\mathbb{P}((X=n)\cap\overline{M_1})=\mathbb{P}_{M_1}(X=n).\mathbb{P}(M_1)+\mathbb{P}_{\overline{M_1}}(X=n).\mathbb{P}(\overline{M_1}).$$

Or, comme il faut traverser successivement deux salles vides pour que le jeu s'arrête, on a $\mathbb{P}_{M_1}(X=n)=q_{n-1}$, *sachant que les* M_i *sont mutuellement indépendants et suivent tous une loi de Bernoulli de paramètre* p.
De plus, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet $(M_2,\overline{M_2})$, *et avec les raisons évoquées précédemment :*

$$\mathbb{P}_{\overline{M_1}}(X=n)=\mathbb{P}_{\overline{M_1}\cap M_2}(X=n).\mathbb{P}(M_2)+\mathbb{P}_{\overline{M_1}\cap\overline{M_2}}(X=n).\mathbb{P}(\overline{M_2})=q_{n-2}.p+0.$$

Donc $\mathbb{P}(X=n)=q_{n-1}.\mathbb{P}(M_1)+pq_{n-2}.\mathbb{P}(\overline{M_1})=pq_{n-1}+p(1-p)q_{n-2}$.
En conclusion : $a=p$ *et* $b=p(1-p)$.

8. a) *Pour* $p=\dfrac{1}{3}$, $a=p=\dfrac{1}{3}$ *et* $b=p(1-p)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$.
   Dans ce cas, on a donc, pour $n\geqslant 4$ *:*

$$q_n=a\times q_{n-1}+b\times q_{n-2}=\frac{1}{3}q_{n-1}+\frac{2}{9}q_{n-2}.$$

   b) *D'après la question précédente, la suite* $(q_n)_{n\geqslant 2}$ *est une suite récurrente linéaire d'ordre* 2.
   Son équation caractéristique est : $x^2=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{9}\Leftrightarrow x^2-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{9}=0$.
   $\Delta=\left(\dfrac{-1}{3}\right)^2-4\times\dfrac{-2}{9}=1$.
   Il y a donc deux solutions réelles : $x_1=\dfrac{\frac{1}{3}-1}{2}=\dfrac{-1}{3}$ *et* $x_2=\dfrac{\frac{1}{3}+1}{2}=\dfrac{2}{3}$.
   Il existe donc des réels α *et* β *tels que, pour tout* $n\geqslant 2$ *:*

$$q_n=\alpha\left(\frac{-1}{3}\right)^n+\beta\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

   Or, d'après la question 6. *:*

$$q_2=\mathbb{P}(X=2)=(1-p)^2=\frac{4}{9}\quad\text{et}\quad q_3=\mathbb{P}(X=3)=p(1-p)^2=\frac{4}{27}.$$

   Donc $\alpha\left(\dfrac{-1}{3}\right)^2+\beta\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$ *et* $\alpha\left(\dfrac{-1}{3}\right)^3+\beta\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{4}{27}$.
   On en déduit, après résolution du système obtenu à partir de ces deux équations : $\alpha=\dfrac{4}{3}$ *et* $\beta=\dfrac{2}{3}$.
   Ainsi : $q_n=\alpha\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n+\beta\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.

9. *D'après ce qu'on a vu dans la question 3., on peut affirmer que les séries* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}n\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *convergent (absolument).*

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 2} nq_n$ *converge (absolument). Donc* X *admet une espérance et, toujours d'après* 3. *:*

$$E(X) = \frac{4}{3}\ T\left(\frac{-1}{3}\right) + \frac{2}{3}\ T\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}.\frac{7}{48} + \frac{2}{3}.\frac{16}{3} = 3,75.$$

Il faut donc traverser en moyenne $3,75$ *salles pour terminer une partie.*

10. *D'après ce qu'on a vu dans la question* 3.*, on peut affirmer que les séries* $\sum_{n\geqslant 2} n^2\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ *et* $\sum_{n\geqslant 2} n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *convergent (absolument).*

    On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 2} n^2 q_n$ *converge (absolument). Donc* X^2 *admet une espérance, ce qui permet aussi d'affirmer que* X *admet une variance.*
    Toujours d'après 3. *:* $E(X^2) = \frac{4}{3}\ U\left(\frac{-1}{3}\right) + \frac{2}{3}\ U\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{159}{8}$.
    Ainsi, avec la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left(\frac{159}{8}\right) - \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{93}{16}.$$

    (remarque : $V(X) = \frac{4}{3}\ U\left(\frac{-1}{3}\right) + \frac{2}{3}\ U\left(\frac{2}{3}\right) - 3,75^2$*).*

* * *

Corrigé de l'exercice 2 (Résolution d'une équation différentielle d'ordre 2).

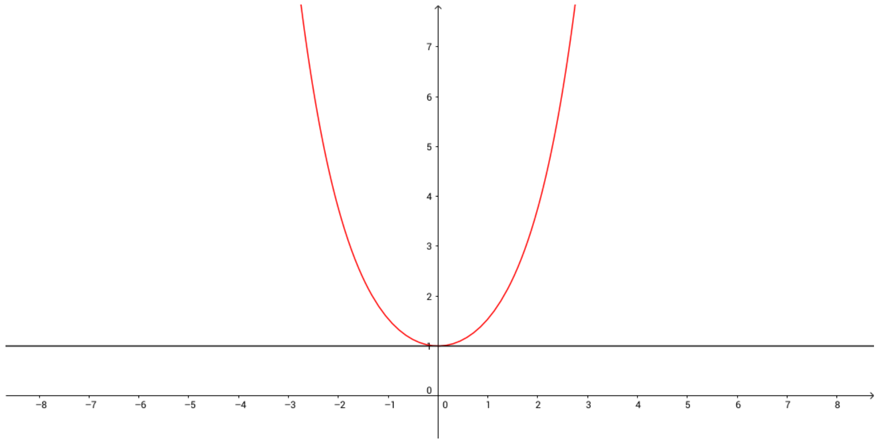
1. *Pour tout réel* x*, on a* $ch(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = ch(x)$*, ainsi que* $sh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = -sh(x)$*, donc* ch *est paire et* sh *est impaire.*

2. *Puisque* $\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x}$*, on obtient par linéarité de la dérivation que* $ch' = sh$ *et* $sh' = ch$.

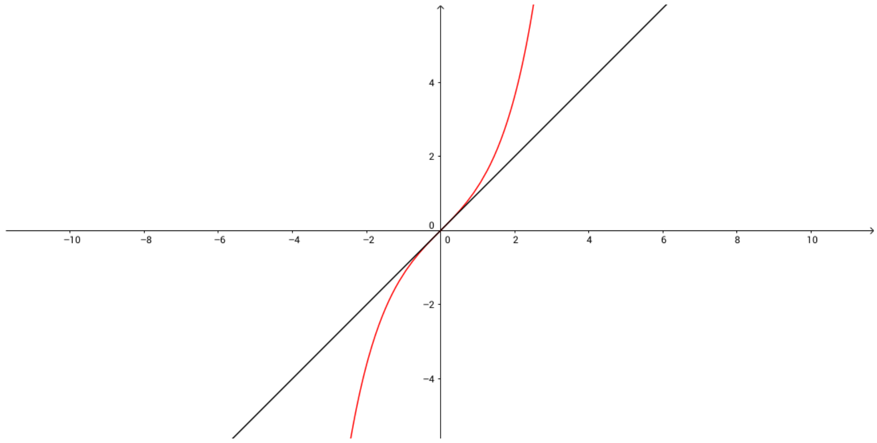
3. *Puisque* ch *est paire, il suffit de l'étudier sur* $[0;+\infty[$*. Sa dérivée est*

$$ch'(x) = sh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}).$$

    Puisque $x > -x$ *pour tout* $x > 0$*, on en déduit par croissance de l'exponentielle que* $ch'(x) > 0$ *pour tout* $x > 0$*, donc que* ch *est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$ *(et même sur* $[0;+\infty[$ *par continuité en* 0*).*
    De plus, $\lim_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty$ *(puisque* $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$*).*
    Par parité, on déduit que ch *est strictement décroissante sur* $]-\infty;0]$ *et* $\lim_{x\to-\infty} ch(x) = +\infty$.
    En outre, $ch(0) = 1$ *et* $ch'(0) = sh(0) = 0$*, donc le graphe de* ch *passe par le point* $(0;1)$*, avec une tangente horizontale (puisque le nombre dérivé est nul en* 0*).*



4. *Puisque $sh'(x) = ch(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient facilement que $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$, donc par imparité, $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$.*
   En outre, $sh(0) = 0$ et $sh'(0) = ch(0) = 1$, donc le graphe de sh passe par le point $(0;0)$, avec une tangente de pente 1 (c'est la droite d'équation $y = x$).



5. *On sait que la fonction exponentielle est développable en série entière, et que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. De même, en remplaçant x par $-x$, on obtient que $x \mapsto e^{-x}$ est développable en série entière, et $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$.*
   On en déduit par combinaison linéaire de séries convergentes que ch et sh sont développables en série entière et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ch(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1+(-1)^k}{2}\right) \frac{x^k}{k!},$$
$$sh(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1-(-1)^k}{2}\right) \frac{x^k}{k!}.$$

   Dans le développement en série entière de ch, les coefficients $\frac{1+(-1)^k}{2}$ sont nuls si k est impair et valent 1 si k est pair, il ne reste donc que les termes d'indices $k = 2n$ avec $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

   De même, dans le développement de sh, seuls les coefficients d'indice k impair sont non nuls (et valent 1), donc il ne reste que les termes d'indices $k = 2n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad sh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

6. (a) *Par le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence, on a pour tout $x \in]-R;R[$:*

$$y'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}, \qquad y''(x)=\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k x^{k-2},$$

donc (en développant)

$$x^2y''(x)-2xy'(x)+(2-x^2)y(x)=\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_kx^k-\sum_{k=1}^{+\infty}2ka_kx^k+\sum_{k=0}^{+\infty}2a_kx^k-\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^{k+2}.$$

On effectue un changement d'indice dans la dernière de ces quatre sommes :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_kx^{k+2}=\sum_{k=2}^{+\infty}a_{k-2}x^k.$$

D'où :

$$x^2y''(x)-2xy'(x)+(2-x^2)y(x)=\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_kx^k-\sum_{k=1}^{+\infty}2ka_kx^k+\sum_{k=0}^{+\infty}2a_kx^k-\sum_{k=2}^{+\infty}a_{k-2}x^k$$

On regroupe alors les quatre sommes à partir de $k=2$, et on laisse de côté les termes d'indices $k\geq 1$:

$$\begin{aligned} x^2y''(x)-2xy'(x)+(2-x^2)y(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty}(k(k-1)a_k-2ka_k+2a_k-a_{k-2})x^k+\underbrace{(-2a_1+2a_1)}_{=0}x+2a_0 \\ &= 2a_0+\sum_{k=2}^{+\infty}\left((k^2-3k+2)a_k-a_{k-2}\right)x^k. \end{aligned}$$

Par unicité d'un dev. en série entière, la fonction $x\mapsto x^2y''(x)-2xy'(x)+(2-x^2)y(x)$ est nulle sur $]-R;R[$ si et seulement si les coefficients du développement sont tous nuls. On a donc l'équivalence :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (H) \text{ sur }]-R;R[&\iff \left(a_0=0 \quad \text{et} \quad \forall k\geq 2,\ (k^2-3k+2)a_k-a_{k-2}=0\right) \\ &\iff (a_0=0 \quad \text{et} \quad \forall k\geq 2,\ (k-1)(k-2)a_k=a_{k-2}). \end{aligned}$$

Pour $k=2$, la relation $(k-1)(k-2)a_k=a_{k-2}$ donne $0*a_2=a_0$, ce qui est redondant avec $a_0=0$. Pour $k\geq 3$, on a $(k-1)(k-2)\neq 0$, donc la relation se réécrit $a_k=\dfrac{a_{k-2}}{(k-1)(k-2)}$. On a donc bien l'équivalence annoncée :

$$y \text{ est solution de } (H) \text{ sur }]-R;R[\iff \left(a_0=0 \quad \text{et} \quad \forall k\geq 3,\ a_k=\frac{a_{k-2}}{(k-1)(k-2)}\right).$$

(b) i. *Utilisée successivement avec $k=3,4,5,6$, la relation précédente entraîne*

$$a_3=\frac{a_1}{2}, \qquad a_4=\frac{a_2}{6}, \qquad a_5=\frac{a_3}{12}=\frac{a_1}{24}, \qquad a_6=\frac{a_4}{20}=\frac{a_2}{120}.$$

On ne peut pas prévoir les valeurs de a_1 et a_2 à partir de la relation $a_k=\frac{a_{k-2}}{(k-1)(k-2)}$, car elle n'est valable que pour $k\geq 3$ (et pas pour des valeurs inférieures).

ii. *Montrons par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}$, $a_{2p+1}=\dfrac{a_1}{(2p)!}$.*

- *La relation est vraie pour $p=0$, car $a_{2*0+1}=a_1=\frac{a_1}{(2*0)!}$.*
- *Fixons $p\in\mathbb{N}$, et supposons que $a_{2p+1}=\frac{a_1}{(2p)!}$. On a alors, d'après la relation obtenue en 6.(a) :*

$$a_{2(p+1)+1}=a_{2p+3}=\frac{a_{2p+1}}{(2p+2)(2p+1)}=\frac{a_1}{(2p)!(2p+2)(2p+1)}=\frac{a_1}{(2p+2)!}=\frac{a_1}{(2(p+1))!},$$

ce qui montre que la propriété est héréditaire.

La propriété annoncée est vraie pour $p = 0$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

iii. *Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p} = \dfrac{a_2}{(2p-1)!}$.*

- *La relation est vraie pour $p = 1$, car $a_{2*1} = a_2 = \frac{a_2}{(2*1-1)!}$.*
- *Fixons $p \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $a_{2p} = \frac{a_2}{(2p-1)!}$. On a alors, d'après la relation obtenue en 6.(a) :*

$$a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = \frac{a_{2p}}{(2p+1)(2p)} = \frac{a_2}{(2p-1)!(2p+1)(2p)} = \frac{a_2}{(2p+1)!} = \frac{a_2}{(2(p+1)-1)!},$$

ce qui montre que la propriété est héréditaire.

La propriété annoncée est vraie pour $p = 1$ et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

7. *Les questions 6.(a) et 6.(b) montrent que les solutions de (H) développables en série entières sont les fonctions de la forme*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_0 = 0, \quad \forall p \geq 1,\ a_{2p} = \frac{a_2}{(2p-1)!} \quad \text{et} \quad \forall p \geq 0,\ a_{2p+1} = \frac{a_1}{(2p)!}.$$

En séparant les termes d'indices pairs et impairs dans la somme, on obtient que ces solutions se réécrivent

$$y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}x^{2p+1} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a_2}{(2p-1)!}x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_1}{(2p)!}x^{2p+1},$$

c'est-à-dire

$$y(x) = a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p)!} + a_2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p-1)!}.$$

Les deux séries entières qui apparaissent ont un rayon de convergence infini (c'est facile à voir avec le test de d'Alembert, qui montre la convergence absolue pour tout réel x), elles définissent donc bien deux fonctions développables en séries entières, que l'on notera

$$y_1(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p)!}, \qquad y_2(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p-1)!}.$$

8. *Pour tout réel x, on a $y_1(x) = x\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = x\, ch(x)$, et par changement d'indice, on obtient*

$$y_2(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+2}}{(2p+1)!} = x\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} = x\, sh(x).$$

9. *Supposons que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On a alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 x ch(x) + \lambda_2 x sh(x) = 0.$$

Ici, évaluer en $x = 0$ ne sert à rien, cela donne $0 = 0$... En dérivant plutôt, cela implique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1(ch(x) + x sh(x)) + \lambda_2(sh(x) + x ch(x)) = 0.$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient $\lambda_1 = 0$, donc en reportant dans l'égalité initiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_2 x sh(x) = 0.$$

En évaluant en $x = 1$ (par exemple), on obtient $\lambda_2 sh(1) = 0$, ce qui amène $\lambda_2 = 0$ (puisque sh ne s'annule qu'en 0, voir la partie I).
On a montré $\big(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0\big)$, la famille (y_1, y_2) est donc libre.

10. (H) *est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre* 2*, et elle peut se mettre sous forme résolue sur les intervalles* $I_1 =]-\infty;0[$ *et* $I_2 =]0;+\infty[$ *(car le coefficient devant* y'' *ne s'annule pas). L'ensemble des solutions de* (H) *sur* I_1 *est donc un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* 2*, et idem pour les solutions sur* I_2*.*
Vu que l'on dispose déjà d'une famille libre de deux solutions (qui sont valables sur tout $\mathbb{R}$*), elles forment une base de solutions. On a donc*
$$\mathcal{S}_I(H) = Vect\left(x \mapsto x\, ch(x),\ x \mapsto x\, sh(x)\right) = \{x \mapsto a_1 x\, ch(x) + a_2 x\, sh(x),\ (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2\},$$
pour $I = I_1$ *ou* $I = I_2$*.*

11. *En cherchant une solution de* (E) *polynomiale de degré* 2*, notée* $P(x) = ax^2+bx+c$*, on obtient*
$$P \text{ est solution de } (E) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ -ax^4 - bx^3 - cx^2 + 2c = x^4 + x^3 \iff (a,b,c) = (-1,-1,0),$$
donc $P(x) = -x^2 - x$ *est une solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}$*.*

12. *On connaît déjà les solutions de* (H) *sur n'importe quel intervalle* I *ne contenant pas* 0 *(d'après la question 12.). En y ajoutant la solution particulière de* (E) *obtenue à la question précédente, on obtient les solutions de* (E) *sur* I*.*
Les solutions de (E) *sur les intervalles* $I_1 =]-\infty;0[$ *et* $I_2 =]0;+\infty[$ *sont donc les fonctions de la forme*
$$y(x) = \alpha x e^x + \beta x e^{-x} - x - x^2, \qquad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

13. *Les solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}$*, si elles existent, sont nécessairement de la forme :*
$$y(x) = \begin{cases} \alpha x e^x + \beta x e^{-x} - x - x^2 & si\ x > 0 \\ y(0) & si\ x = 0 \\ \gamma x e^x + \delta x e^{-x} - x - x^2 & si\ x < 0 \end{cases},$$
où $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$*.*
Parmi ces fonctions, voyons celles qui sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$*.*
En effectuant un développement limité, on a
$$\begin{aligned} \alpha x e^x + \beta x e^{-x} - x - x^2 &= \alpha x\left(1 + x + o(x)\right) + \beta x\left(1 - x + o(x)\right) - x - x^2 \\ &= (\alpha+\beta-1)x + (\alpha-\beta-1)x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$
Par troncature, on obtient un DL_1 *:*
$$\alpha x e^x + \beta x e^{-x} - x - x^2 = (\alpha+\beta-1)x + o(x).$$
L'existence de ce DL_1 *en* 0^+ *montre que* y *est dérivable à droite en* 0*, avec (par lecture des coefficients d'ordre* 0 *et* 1*) :* $y(0) = 0$*,* $y'_d(0) = \alpha+\beta-1$*.*
De même, en 0^-*, on a*
$$\gamma x e^x + \delta x e^{-x} - x - x^2 = (\gamma+\delta-1)x + o(x),$$
donc y *est dérivable à droite avec* $y'_g(0) = 0$*.*
On en déduit que y *est dérivable en* 0 *si et seulement si* $\alpha+\beta-1 = \gamma+\delta-1$*, c'est-à-dire*
$$\alpha+\beta = \gamma+\delta.$$
Supposons donc cette égalité et voyons si y *est deux fois dérivable en* 0*, c'est-à-dire si la dérivée* y' *est elle-même dérivable en* 0*. On a*
$$y'(x) = \begin{cases} \alpha(1+x)e^x + \beta(1-x)e^{-x} - 1 - 2x & si\ x > 0 \\ \alpha+\beta-1 & si\ x = 0 \\ \gamma(1+x)e^x + \delta(1-x)e^{-x} - 1 - 2x & si\ x < 0 \end{cases}.$$
En effectuant un DL_1*, on obtient*
$$y'(x) = \begin{cases} (\alpha+\beta-1) + 2(\alpha-\beta-1)x + o(x) & si\ x > 0 \\ \alpha+\beta-1 & si\ x = 0 \\ (\gamma+\delta-1) + 2(\gamma-\delta-1)x + o(x) & si\ x < 0 \end{cases},$$

donc y' est dérivable à gauche et à droite en 0, avec $y''_d(0) = 2(\alpha - \beta - 1)$ et $y''_g(0) = 2(\gamma - \delta - 1)$.
Finalement, on a

$$y \text{ est deux fois dérivable en } 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta = \gamma + \delta \\ 2(\alpha - \beta - 1) = 2(\gamma - \delta - 1) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \delta \end{cases}.$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme $y(x) = \alpha x e^x + \beta x e^{-x} - x - x^2$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Remarque : dans cet exemple, les solutions sur $\mathbb{R}$, après raccordement, sont identiques aux solutions sur $]0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$ (il n'y en a ni moins ni plus).

* * *