DS6 du 14/02/20 (2h) - Sujet A
Equations différentielles, probabilités

Le sujet se compose de 2 exercices indépendants.
Calculatrices interdites.

* * *

Exercice 1 (Jeu vidéo).

Partie I

Dans cette partie, sont établis des résultats préliminaires qui serviront dans la suite de l'exercice.
q désigne un réel quelconque de l'intervalle $]-1;1[$.

1. Rappeler, sans démonstration, la valeur de la somme infinie convergente $S(q)=\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.
2. Justifier la convergence et la valeur des sommes infinies suivantes :

$$S_1(q)=\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}, \qquad S_2(q)=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}.$$

3. En déduire la convergence et la valeur des sommes infinies suivantes :

$$T(q)=\sum_{n=2}^{+\infty} nq^{n}, \qquad U(q)=\sum_{n=2}^{+\infty} n^2q^{n}.$$

Partie II

On désire mettre au point un jeu vidéo dont le principe est le suivant : un joueur traverse successivement plusieurs salles d'un château. Lorsqu'il entre dans une salle, celle-ci peut-être vide, sinon le joueur y rencontre des monstres qu'il doit affronter et vaincre avant de passer à la salle suivante. La partie s'arrête lorsque le joueur traverse successivement deux salles vides.
On admet que le joueur réussit toujours à vaincre les monstres rencontrés dans une salle.
Le jeu prévoit un nombre éventuellement illimité de salles.

On note M_i l'événement : « le joueur rencontre des monstres dans la salle numéro i ».
Les différents événements M_i sont mutuellement indépendants et suivent tous une loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0;1[$: on note $\mathbb{P}(M_i)=p$.
Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de salles à traverser pour finir la partie.

4. Quelles valeurs la variable aléatoire X peut-elle prendre ?
5. Décrire les événements $(X=2)$, $(X=3)$, $(X=4)$ et $(X=5)$.
6. Déterminer, en fonction de p, les probabilités $\mathbb{P}(X=2)$, $\mathbb{P}(X=3)$, $\mathbb{P}(X=4)$ et $\mathbb{P}(X=5)$.
7. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on note q_n la probabilité de l'événement $(X=n)$. En distinguant les cas M_1 et $\overline{M_1}$, montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que l'on a :

$$\forall n\geqslant 4, \qquad q_n=a\times q_{n-1}+b\times q_{n-2},$$

où a et b sont deux constantes à exprimer en fonction de p.

8. On suppose désormais que $p = \dfrac{1}{3}$.
   a) Vérifier que : $\forall n \geqslant 4$, $q_n = \dfrac{1}{3}q_{n-1} + \dfrac{2}{9}q_{n-2}$.
   b) En déduire que : $\forall n \geqslant 2$, $q_n = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.
9. Déterminer l'espérance $E(X)$. On pourra exprimer $E(X)$ à l'aide de la fonction T définie en **I.3.** Combien de salles faudra-t-il traverser en moyenne pour terminer une partie ?
10. Déterminer la variance $V(X)$. On pourra exprimer $V(X)$ à l'aide de la fonction U définie en **I.3.**

* * *

Exercice 2 (Résolution d'une équation différentielle d'ordre 2).
On considère l'équation différentielle linéaire

$$(E) :\ x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = x^3 + x^4,$$

d'inconnue $x \mapsto y(x)$. Son équation homogène associée est notée

$$(H) :\ x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0.$$

Le but de cet exercice est de déterminer les solutions de (H) et de (E).

Partie I : Fonctions cosinus et sinus hyperbolique

On définit les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*, respectivement notées ch et sh, par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ces deux fonctions sont clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elles vont servir par la suite dans la résolution des équations différentielles (H) et (E).

1. Etudier la parité de ces deux fonctions.
2. Exprimer ch$'$ et sh$'$ en fonction de ch et sh.
3. Etudier les variations de ch sur $\mathbb{R}$, calculer ses limites en $\pm\infty$ et dessiner l'allure de son graphe.
4. Faire de même avec sh.
5. Montrer que ch et sh sont développables en série entière, et que l'on a
$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
pour tout x dans un intervalle ouvert à préciser.

Partie II : Résolution de l'équation homogène (H) à l'aide des séries entières

On cherche ici les solutions de l'équation homogène :

$$(H) :\ x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$$

qui sont développables en série entière.

6. Considérons la fonction $y : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ pour tout $x \in]-R;R[$, où $R > 0$ est le rayon de convergence de cette série entière.
   (a) Montrer que y est solution de (H) sur $]-R;R[$ si et seulement si la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie les relations suivantes :
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_k = \dfrac{a_{k-2}}{(k-1)(k-2)} \text{ pour tout entier } k \geq 3 \end{cases}.$$

(b) Supposons que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie les relations précédentes.

i. Calculer alors a_3, a_4, a_5, a_6 en fonction de a_1 et a_2. Peut-on prévoir la valeur de a_1 et a_2 à partir de ces relations ?

ii. Montrer par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad a_{2p+1} = \frac{a_1}{(2p)!}.$$

iii. Montrer de même que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad a_{2p} = \frac{a_2}{(2p-1)!}.$$

7. Déduire de ce qui précède que les solutions développables en série entière de (H) sont les fonctions de la forme

$$y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x), \qquad (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2,$$

où y_1 et y_2 sont deux fonctions dont on précisera le développement en série entière et son rayon de convergence.

8. Exprimer y_1 et y_2 en fonction des fonctions ch et sh étudiées dans la partie I.
9. Montrer que la famille (y_1, y_2) est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
10. Déterminer explicitement toutes les solutions de (H) sur les intervalles $I_1 =]-\infty; 0[$ et $I_2 =]0; +\infty[$.

Partie III : Résolution de l'équation complète (E)

On termine en résolvant l'équation avec second membre :

$$(E) : \; x^2 y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = x^3 + x^4.$$

11. Déterminer une solution polynomiale de (E).
12. Déterminer toutes les solutions de (E) sur les intervalles $I_1 =]-\infty; 0[$ et $I_2 =]0; +\infty[$.
13. Déterminer toutes les solutions de (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

* * *