Corrigé du DS5 du 18/01/20 (4h) - Sujet B
Probabilités, courbes paramétrées, séries entières

Corrigé de l'exercice 1 (DSE de la fonction tangente).

1. • *La formule est vraie pour $n = 0$ car*

$$(fg)^{(0)} = fg = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)}.$$

• *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la formule soit vraie au rang n, c'est-à-dire que*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Montrons que ceci reste alors vrai au rang $n+1$. En dérivant l'expression de $(fg)^{(n)}$ (on peut car f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$), on obtient alors :

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)\prime} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k)\prime}\right),$$

c'est-à-dire

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}.$$

Le changement d'indice $k \leftarrow k+1$ dans la première somme donne alors :

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-(k-1))} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)},$$

soit en regroupant les termes :

$$(fg)^{(n+1)} = \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} f^{(0)} g^{(n+1)}.$$

Or, d'après la formule de Pascal sur les coefficients binomiaux :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \qquad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

donc

$$(fg)^{(n+1)} = f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

(puisque $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$), et c'est la formule voulue.

• *La formule est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc par le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

2. • *La formule est vraie pour $n = 0$ car*

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt = \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \underbrace{\frac{(b-t)^0}{0!}}_{=1} f^{(1)}(t)dt.$$

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la formule soit vraie au rang n, c'est-à-dire*

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Montrons que ceci reste vrai au rang $n+1$. Soit $(a,b) \in I^2$. Montrons que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt.$$

Par hypothèse de récurrence, on a déjà :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Effectuons maintenant une intégration par parties sur le reste intégral, en primitivant $t \mapsto \frac{(b-t)^n}{n!}$ et en dérivant $t \mapsto f^{(n+1)}(t)$ (on peut car $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$). On obtient

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)n!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)n!} f^{(n+2)}(t)dt,$$

soit

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt,$$

ce qui donne la formule voulue en remplaçant dans l'expression de $f(b)$ précédemment obtenue :

$$f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)}_{= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt.$$

- *La formule est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc par le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

3. *Calcul direct : pour tout $x \in I$:*

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = 1 + [f(x)]^2.$$

4. *Il faut séparer les cas $n = 0$ et $n \geq 1$.*
   — *Si $n = 0$, alors $f^{(n+1)}(x) = f'(x) = 1 + f^2(x)$.*
   — *Si $n \geq 1$, alors*

$$\forall x \in I, \quad f^{(n+1)}(x) = (f')^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(1 + f^2(x)\right) = \frac{d^n}{dx^n}\left(f(x) \times f(x)\right).$$

D'après la formule de Leibniz, on a donc

$$\forall x \in I, \quad f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) f^{(k)}(x).$$

5. *Soit $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$. Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) \geq 0$:*
   — *c'est vrai pour $n = 0$ car $f^{(0)}(x) = \tan(x) \geq 0$;*
   — *soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f^{(k)}(x) \geq 0$ pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$.*
   Montrons alors que $f^{(n+1)}(x) \geq 0$.
      — *Si $n = 0$, alors $f^{(n+1)}(x) = f'(x) = 1 + f^2(x) \geq 0$.*

— *Si* $n = 1$*, alors* $f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) f^{(k)}(x) \geq 0$*, car par hypothèse de récurrence, les* $f^{(k)}(x)$ *et* $f^{n-k}(x)$ *sont positifs pour tout* $k \in \{0, \cdots, n\}$.

On en déduit que les fonctions $f^{(n)}$ *(pour* $n \in \mathbb{N}$*) sont croissantes sur* $[0; \frac{\pi}{2}[$*, puisque leurs dérivées* $f^{(n+1)}$ *sont positives sur cet intervalle.*

6. (a) *En évaluant la formule obtenue en question 4. en* $x = 0$*, on obtient :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(0) f^{(k)}(0),$$

c'est-à-dire

$$(n+1)! a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! a_{n-k} k! a_k = n! \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k.$$

En divisant par $(n+1)!$*, on en déduit* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k$.

(b) *Montrons par récurrence sur* n *que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \quad f^{(n)}(-x) = (-1)^{n+1} f^{(n)}(x).$$

— *c'est vrai pour* $n = 0$*, car* $f^{(0)}(-x) = f(-x) = -f(x) = (-1)^1 f^{(0)}(x)$ *(puisque la fonction tangente est impaire) ;*

— *soit* $n \in \mathbb{N}$*. Supposons que* $\forall x \in I,\ f^{(n)}(-x) = (-1)^{n+1} f^{(n)}(x)$*. En dérivant cette égalité, on obtient :*

$$\forall x \in I, \quad -f^{(n+1)}(-x) = (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(x),$$

c'est-à-dire $f^{(n+1)}(-x) = (-1)^n f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+2} f^{(n+1)}(x)$.

On en déduit que si n *est pair, alors* $f^{(n)}$ *est une fonction impaire, et que si* n *est impair, alors* $f^{(n)}$ *est une fonction paire.*

(c) *D'après la question, la fonction* $f^{(2n)}$ *est impaire pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, donc* $f^{(2n)}(0) = -f^{(2n)}(0)$*, c'est-à-dire* $f^{(2n)}(0) = 0$*. On en déduit que* $a_{2n} = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

7. (a) *En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre* n *entre les points* 0 *et* x*, on obtient*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Sur l'intervalle $[0; x]$*, la fonction* $f^{(n+1)}$ *est positive (d'après la question 5.), et* $t \mapsto (x-t)^n$ *aussi, donc par positivité de l'intégrale, on en déduit que* $\frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \geq 0$*, ce qui amène l'inégalité*

$$f(x) \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

(b) *La série* $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ *est à termes positifs et ses sommes partielles* $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *sont majorées (par* $f(x)$*). Donc cette série est convergente (car la suite des sommes partielles est croissante et majorée).*

8. (a) *D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre* $2n+1$ *entre les points* 0 *et* x*, on a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k + \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^x (x-t)^{2n+1} f^{(2n+2)}(t) dt,$$

vu que les a_k *sont nuls si* k *est pair (cf. question 6.(c)), on a* $\sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} x^{2k+1}$.

Donc :

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k = \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^x (x-t)^{2n+1} f^{(2n+2)}(t) dt.$$

En effectuant alors le changement de variable $t = ux$ *(*x *est fixé, la nouvelle variable est* u*) dans cette intégrale, on obtient*

$$R_n(x) = \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 (x-ux)^{2n+1} f^{(2n+2)}(ux) x du = \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n+1} f^{(2n+2)}(ux) du.$$

(b) *Pour* $r \in]x; \frac{\pi}{2}[$, *on a*

$$R_n(x) = \left(\frac{x}{r}\right)^{2n+2} \frac{r^{2n+2}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n+1} f^{(2n+2)}(ux)du.$$

Pour $u \in [0;1]$, *on a* $ux \leq ur$, *donc par croissance de la fonction* $f^{(2n+2)}$ *(montrée en question 5.), on a* $f^{(2n+2)}(ux) \leq f^{(2n+2)}(ur)$. *D'où*

$$\forall u \in [0;1], \quad (1-u)^{2n+1} f^{(2n+2)}(ux) \leq (1-u)^{2n+1} f^{(2n+2)}(ur).$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit

$$\int_0^1 (1-u)^{2n+1} f^{(2n+2)}(ux)du \leq \int_0^1 (1-u)^{2n+1} f^{(2n+2)}(ur).$$

Finalement, on a la majoration :

$$R_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{2n+2} \frac{r^{2n+2}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n+1} f^{(2n+2)}(ur) = \left(\frac{x}{r}\right)^{2n+2} R_n(r).$$

Enfin, $f(r) = R_n(r) + \sum_{k=0}^n a_{2k+1} r^{2k+1} \geq R_n(r)$, *car les* a_{2k+1} *sont positifs (cf. question 5.) et* $r \geq 0$.
On a donc

$$R_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{2n+2} R_n(r) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{2n+2} f(r).$$

(c) *D'après la question 7.(a), on a* $f(x) \geq \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k = \sum_{k=0}^n a_{2k+1} x^{2k+1}$ *(car les* a_{2k} *sont nuls). Donc* $R_n(x) \geq 0$. *En combinant ceci avec la majoration de la question précédente, on obtient*

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{2n+2} f(r),$$

donc $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, *d'après le théorème des gendarmes (puisque* $0 < \frac{x}{r} < 1$*).*

9. *On a pour tout* $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ *:*

$$\tan(x) = f(x) = \sum_{k=0}^n a_{2k+1} x^{2k+1} + R_n(x).$$

La question précédente montre qu'en faisant tendre $n \to +\infty$, *on obtient*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n a_{2k+1} x^{2k+1} = \tan(x).$$

Cela reste vrai en $x = 0$ *(tout est nul), et par imparité des fonctions concernées, on obtient aussi* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n a_{2k+1}(-x)^{2k+1} = -\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n a_{2k+1} x^{2k+1} = -\tan(x) = \tan(-x)$, *donc on a finalement*

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n a_{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}.$$

Ceci prouve que la fonction tangente est développable en série entière sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

* * *

Corrigé de l'exercice 2 (Courbes de Bézier).
Corrigé inspiré de celui de M. Denoncin

1. *D'après la formule du binôme, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{B}_{k,n}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1.$$

2. *On a par un calcul immédiat*

$$\mathcal{B}_{0,2}(X) = (1-X)^2 = X^2 - 2X + 1$$

$$\mathcal{B}_{1,2}(X) = 2X(1-X) = -2X^2 + 2X$$

$$\mathcal{B}_{2,2}(X) = X^2$$

et

$$\mathcal{B}_{0,3}(X) = (1-X)^3 = -X^3 + 3X^2 - 3X + 1$$

$$\mathcal{B}_{1,3}(X) = 3X(1-X)^2 = 3X^3 - 6X^2 + 3X$$

$$\mathcal{B}_{2,3}(X) = 3X^2(1-X) = -3X^3 + 3X^2$$

$$\mathcal{B}_{3,3}(X) = X^3$$

3. *Les calculs précédents montrent que la matrice de la famille* $(\mathcal{B}_{0,2}, \mathcal{B}_{1,2}, \mathcal{B}_{2,2})$ *dans la base* $\left(1, X, X^2\right)$ *est*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut donc 2 *car elle est triangulaire inférieure et ce déterminant est donc non nul. Donc cette matrice est une matrice de passage et on obtient bien :*

$$\boxed{\text{la famille } (\mathcal{B}_{0,2}, \mathcal{B}_{1,2}, \mathcal{B}_{2,2}) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

4. *La question précédente invite à employer le même raisonnement. En effet pour* $0 \leq k \leq n$ *le degré du plus petit monome non nul de* $\mathcal{B}_{k,n}(X)$ *est* k *et son coefficient est* $\binom{n}{k}$*. Ainsi si l'on considère la matrice de la famille* $(\mathcal{B}_{k,n})_{0 \leq k \leq n}$ *dans la base* $(1, \cdots, X^n)$*, elle sera toujours triangulaire inférieure avec tous ses coefficients non nuls sur la diagonale et donc de déterminant non nul (ce déterminant vaut en fait* $\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$*). Donc le même raisonnement que dans la question précédente montre que*

$$\boxed{\text{la famille } (\mathcal{B}_{k,n})_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

5. (a) *On utilise la définition d'une courbe de Bézier et le résultat de la question* 1 *des préliminaires. On a pour tout* $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) &= \mathcal{B}_{0,3}(t)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \mathcal{B}_{1,3}(t)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \mathcal{B}_{2,3}(t)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \mathcal{B}_{3,3}(t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}6t^3 - 12t^2 + 6t\\6t^3 - 12t^2 + 6t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3t^3 + 3t^2\\-9t^3 + 9t^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t^3\\-t^3\end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix}6t - 9t^2 + 4t^3\\6t - 3t^2 - 4t^3\end{pmatrix}} \end{aligned}$$

   (b) *On peut donc faire la remarque que la courbe* Γ_1 *n'est autre que la portion de la courbe* Γ_2 *lorsque le paramètre parcourt uniquement l'intervalle* $[0,1]$.

6. (a) *Les fonctions x_2 et y_2 étant des polynômes, elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pourront au cours de l'étude être dérivées autant de fois que nécessaire. On a*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_2'(t) = 6 - 18t + 12t^2$$
$$y_2'(t) = 6 - 6t - 12t^2$$

L'étude des deux trinômes du second degré montre que

$$x_2'(t) = 12\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-1)$$
$$y_2'(t) = -12\left(t - \frac{1}{2}\right)(t+1)$$

Donc leur signe est connu et on obtient les tableaux de variations suivants

t	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x_2'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x_2(t)$	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	1	$\nearrow$

et

t	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$y_2'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$y_2(t)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$

(b) *D'après les tableaux de variations obtenus à la question précédente, la courbe Γ_2 admet en le point de paramètre $t = 1$ une tangente verticale et admet en le point de paramètre $t = -1$ une tangente horizontale, et ce sont les seuls tels points.*

(c) *La tangente à Γ_2 en $t = 0$ est la droite dirigée par $\Gamma_2'(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et passant par $\Gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: il s'agit donc de la première bissectrice.*

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de la tangente à } \Gamma_2 \text{ en } t = 0 \text{ est } y = x.}$$

(d) *D'après les tableaux de variation obtenus à la question 2.a, le point singulier est le point de paramètre $t = \frac{1}{2}$. On a*

$$x_2''\left(\frac{1}{2}\right) = -6, \quad y_2''\left(\frac{1}{2}\right) = -18, \quad x_2'''\left(\frac{1}{2}\right) = 24, \quad y_2'''\left(\frac{1}{2}\right) = -24$$

Les vecteurs $\Gamma_2''\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma_2'''\left(\frac{1}{2}\right)$ ne sont pas colinéaires, ainsi d'après le cours $\boxed{\textit{il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce}}$*, et la tangente est la droite passant par $\Gamma_2\left(\frac{1}{2}\right)$ et dirigée par $\Gamma_2''\left(\frac{1}{2}\right)$. Son équation est donnée par*

$$\begin{vmatrix} -6 & \frac{5}{4} - x \\ -18 & \frac{7}{4} - y \end{vmatrix} = 0$$

soit $\boxed{y - 3x = -2.}$

7. *La courbe a été représentée sur la figure 1.*

8. *On a d'après la définition de la courbe de Bézier que*

$$\Gamma(0) = A_0, \quad \Gamma(1) = A_n.$$

9. *La fonction Γ étant polynomiale elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle de définition. Or*

$$\begin{aligned}\Gamma'(0) &= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{B}_{k,n}'(0)\overrightarrow{OA_k} \\ &= -n\overrightarrow{OA_0} + n\overrightarrow{OA_1} \\ &= n\overrightarrow{A_1A_0}.\end{aligned}$$

Ce vecteur étant non nul, c'est le vecteur directeur de la tangente en A_0 et la tangente à Γ en A_0 étant la droite passant par A_0 et dirigée par $n\overrightarrow{A_1A_0}$, on a bien

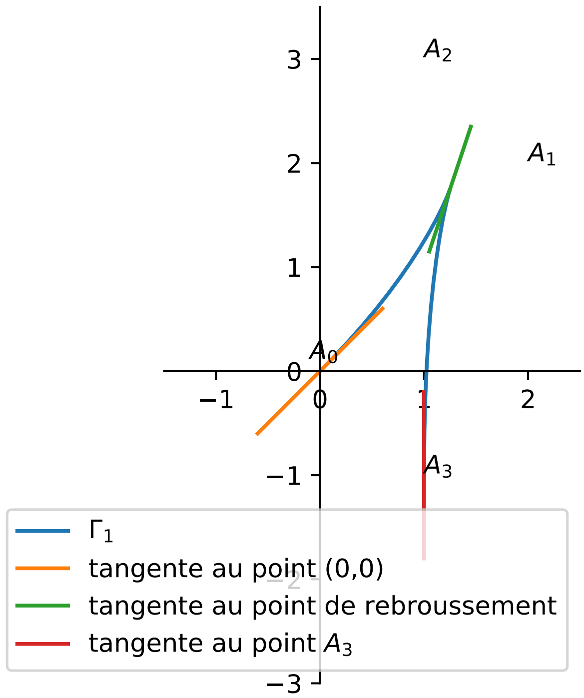

Figure 1 – La courbe Γ_1

$$\boxed{\textit{la tangente à } \Gamma \textit{ en } A_0 \textit{ est la droite } (A_0A_1).}$$

10. *D'après la question 4, il existe* $(p_0, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tel que* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_i \mathcal{B}_{k,n}(X)$ *et de même il existe* $(q_0, \cdots, q_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tel que* $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} q_i \mathcal{B}_{k,n}(X)$*. En posant* $A_i = \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}$*, on a bien que la courbe* Λ *est la courbe de Bézier associée aux points de contrôle* $A_0, \cdots, A_n$*.*
    Il est donc possible de trouver $A_0, \cdots, A_n$ *tel que la courbe* Λ *soit la courbe de Bézier associée à ces points.*
11. (a) *On sait d'après la partie III que le point* C_1 *est à l'intersection des tangentes à* Γ_1 *en* A_0 *et en* A_3*. Or ces droites ont pour équation* $x = y$ *et* $x = 1$ *(d'après les questions* 6.(*b*) *et* 6.(*c*)*).*

    $$\boxed{\textit{Ainsi le point } C_1 \textit{ a pour coordonnées } (1, 1).}$$

    (b) *Par définition d'une courbe de Bézier on a pour tout* $t \in [0, 1]$ *:*

$$\begin{aligned}
\Gamma_3(t) &= \mathcal{B}_{0,2}(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{1,2}(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_{2,2}(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2t(1-t) \\ 2t(1-t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\begin{pmatrix} 2t - t^2 \\ 2t - 3t^2 \end{pmatrix}}.
\end{aligned}$$

12. *La fonction* Γ_3 *admet des coordonnées en* t *qui sont des polynômes de degré* 2 *dont l'étude est immédiate. On obtient les tableaux de variations suivants :*

t	0	$\frac{1}{3}$	1
x_3	0	$\nearrow$	1
y_3	$0 \nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow -1$

avec une tangente horizontale en $t = \frac{1}{3}$ *et une tangente verticale en* $t = 1$.

13. *Le graphique complété est présentée en figure 2.*

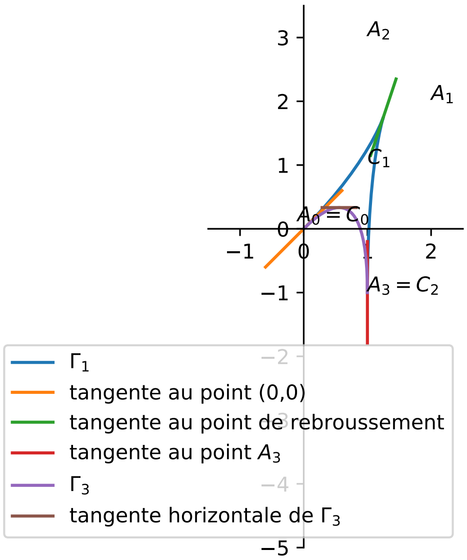

FIGURE 2 – Les courbes Γ_1 et Γ_3

* * *

Corrigé de l'exercice 3 (Apparition de deux *Pile* ou deux *Face* consécutifs).

1. (a) *Puisque* $B \cap C \subset B$, *on a* $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(B \cap C) > 0$, *donc* $\mathbb{P}(B) > 0$. *En utilisant l'inclusion* $B \cap C \subset C$, *on montre pareillement que* $\mathbb{P}(C) > 0$. *On a donc bien* $\mathbb{P}(B)$ *et* $\mathbb{P}(C)$ *non nuls.*

   (b) *On a* $A \cap C = (A \cap C) \cap \Omega = (A \cap C) \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap C \cap B) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$. *Cette réunion est disjointe (car* B *et* $\overline{B}$ *sont incompatibles), donc*

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B} \cap C).$$

   (c) *En utilisant l'égalité précédente :*

$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap \overline{B} \cap C)}{\mathbb{P}(C)}.$$

   Or, $\mathbb{P}_{B \cap C}(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap (B \cap C))}{\mathbb{P}(B \cap C)} = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)}$, *ainsi que* $\mathbb{P}_{\overline{B} \cap C}(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \overline{B} \cap C)}{\mathbb{P}(\overline{B} \cap C)}$. *Donc*

$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{\mathbb{P}_{B \cap C}(A) \times \mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} + \frac{\mathbb{P}_{\overline{B} \cap C}(A) \times \mathbb{P}(\overline{B} \cap C)}{\mathbb{P}(C)},$$

   c'est-à-dire

$$\mathbb{P}_C(A) = \mathbb{P}_{B \cap C}(A) \times \mathbb{P}_C(B) + \mathbb{P}_{\overline{B} \cap C}(A) \times \mathbb{P}_C(\overline{B}).$$

2. (a) $\mathbb{P}_{F_1 \cap F_2}(E) = 1$ *car si on a obtenu "FF" lors des deux premiers lancers, on est sûr que l'événement* E *est réalisé.*

   (b) *Si l'on a obtenu "FP" aux deux premiers lancers, alors la probabilité que* E *soit réalisé (i.e.* $\mathbb{P}_{F_1 \cap \overline{F_2}}(E)$*) est la même que si on a obtenu "P" au premier lancer (i.e.* $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E)$*). En effet, tant qu'une séquence "FF" ou "PP" n'est pas apparue, seul le résultat du dernier lancer en date influe sur la réalisation de l'événement* E.

(c) Utilisons 1.(c) avec $A = E$, $B = F_2$ et $C = F_1$. On a

$$\mathbb{P}_{F_1}(E) = \underbrace{\mathbb{P}_{F_2\cap F_1}(E)}_{=1} \times \mathbb{P}_{F_1}(F_2) + \underbrace{\mathbb{P}_{\overline{F_2}\cap F_1}(E)}_{=\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E)} \times \mathbb{P}_{F_1}(\overline{F_2}).$$

Or, $\mathbb{P}_{F_1}(F_2) = \mathbb{P}(F_2) = q$ (puisque F_1 et F_2 sont indépendants), et de même, $\mathbb{P}_{F_1}(\overline{F_2}) = \mathbb{P}(\overline{F_2}) = p$ (puisque F_1 et $\overline{F_2}$ sont indépendants). Donc

$$\mathbb{P}_{F_1}(E) = 1 \times q + \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) \times p = q + p\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E).$$

3. (a) $\mathbb{P}_{\overline{F_1}\cap\overline{F_2}}(E) = 0$ car si on a obtenu "PP" lors des deux premiers lancers, on est sûr que l'événement E n'est pas réalisé.

(b) Utilisons 1.(c) avec $A = E$, $B = \overline{F_2}$ et $C = \overline{F_1}$. On a

$$\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = \underbrace{\mathbb{P}_{\overline{F_2}\cap\overline{F_1}}(E)}_{=0} \times \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(\overline{F_2}) + \underbrace{\mathbb{P}_{F_2\cap\overline{F_1}}(E)}_{=\mathbb{P}_{F_1}(E)} \times \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(F_2).$$

Or, $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(F_2) = \mathbb{P}(F_2) = q$ (puisque $\overline{F_1}$ et F_2 sont indépendants). Donc

$$\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = \mathbb{P}_{F_1}(E) \times q.$$

4. (a) Il suffit de résoudre le système linéaire $\begin{cases} \mathbb{P}_{F_1}(E) = q + p\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) \\ \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = q\mathbb{P}_{F_1}(E) \end{cases}$.

Il est équivalent (par substitution) à $\begin{cases} \mathbb{P}_{F_1}(E) = q + pq\mathbb{P}_{F_1}(E) \\ \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = q\mathbb{P}_{F_1}(E) \end{cases}$, donc

$$\mathbb{P}_{F_1}(E) = \frac{q}{1-pq}, \qquad \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = \frac{q^2}{1-pq}.$$

(b) En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(F_1, \overline{F_1})$, on obtient

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_{F_1}(E) \times \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) \times \mathbb{P}(\overline{F_1}) = \frac{q}{1-pq} \times q + \frac{q^2}{1-pq} \times p = \frac{(1+p)q^2}{1-pq}.$$

5. (a) Pour calculer $\mathbb{P}(G)$, il suffit d'inverser les rôles de p et q (ce qui correspond à inverser Pile et Face). On obtient donc $\mathbb{P}(G) = \dfrac{(1+q)p^2}{1-pq}$.

(b) On a $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) = \dfrac{1}{1-pq}\left((1+p)q^2 + (1+q)p^2\right) = \dfrac{1}{1-pq}\left(p^2 + q^2 + pq\underbrace{(q+p)}_{=1}\right)$,

donc $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) = \dfrac{1}{1-pq}\left(\underbrace{(p+q)}_{=1}^2 - pq\right) = \dfrac{1-pq}{1-pq} = 1$.

(c) Vu que E et G sont incompatibles, on a $\mathbb{P}(E \cup G) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) = 1$. Cela signifie donc que l'événement $E \cup G$ est presque sûr. Concrètement, "on est presque sûr d'obtenir au moins une séquence "PP" ou "FF" dans l'infinité de lancers".

6. (a) On a $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n = E$, car E est réalisé si et seulement si il existe une première apparition (aux rangs $n+1$ et $n+2$) de la séquence "FF" avant "PP".

(b) $E_0 = F_1 \cap F_2$ (on obtient "FF" aux deux premiers lancers).
$E_1 = \overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3$ (on obtient "FF" aux lancers 2 et 3, et donc nécessairement "P" au premier lancer).
$E_2 = F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4$ (on obtient "FF" pour la première fois aux lancers 3 et 4, donc nécessairement "P" au rang 2, et "F" au rang 1, puisque "PP" ne doit pas apparaître).
De même, on a $E_3 = \overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap F_4 \cap F_5$.

(c) *Pour $n = 2k$ (c'est-à-dire n pair), l'événement E_n est réalisé si et seulement si on obtient une suite alternée de "P" et "F" lors des n premiers lancers, qui se termine par "P", et qui commence donc par "F". On a ainsi "$FPFP \cdots FPFF$", c'est-à-dire*

$$E_{2k} = F_1 \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap F_{2k-1} \cap \overline{F_{2k}} \cap F_{2k+1} \cap F_{2k+2}.$$

(d) *Les événements $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants, donc*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(E_k) = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(\overline{F_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(F_{2k-1}) \times \mathbb{P}(\overline{F_{2k}}) \times \mathbb{P}(F_{2k+1}) \times \mathbb{P}(F_{2k+2}),$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(E_k) = qp \cdots qp \times q^2 = p^k q^{k+2}.$$

(e) *Similairement, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$E_{2k+1} = \overline{F_1} \cap F_2 \cap \cdots \cap \overline{F_{2k-1}} \cap F_{2k} \cap \overline{F_{2k+1}} \cap F_{2k+2} \cap F_{2k+3},$$

donc, par indépendance mutuelle,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(E_{2k+1}) = pq \cdots pqp \times q^2 = p^{k+1} q^{k+2}.$$

(f) *Vu que les $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, on a*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 0} E_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_{2k}) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (p^k q^{k+2} + p^{k+1} q^{k+2}) \\
&= (1+p)q^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (pq)^k = \frac{(1+p)q^2}{1-pq},
\end{aligned}$$

et c'est bien conforme au résultat de la question 4.(b).

* * *