DS5 du 18/01/20 (4h) - Sujet B
Probabilités, courbes paramétrées, séries entières

Le sujet se compose de 3 exercices indépendants.
Calculatrices interdites.

* * *

Exercice 1 (DSE de la fonction tangente).

Partie I : Préliminaires

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer par récurrence sur n la *formule de Leibniz* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

2. Démontrer par récurrence sur n la *formule de Taylor avec reste intégral* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (a,b) \in I^2, \qquad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Partie II : DSE de la fonction tangente

Soit $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \tan(x)$.
On rappelle que la fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

3. Montrer que pour tout $x \in I$, $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$.
4. En utilisant la formule de Leibniz, en déduire une expression de $f^{(n+1)}$ en fonction des dérivées $f^{(k)}$ pour $k \in [\![0; n]\!]$.
5. Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \geq 0$.
   Que peut-on en déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, sur les variations des fonctions $f^{(n)}$?
6. Pour tout entier naturel k, on pose $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $f^{(n)}(-x) = (-1)^{n+1} f^{(n)}(x)$.
   Que peut-on en déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, sur la parité des dérivées $f^{(n)}$?
   (c) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient a_{2n}.
7. Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.
   (a) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) \geq \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

   (b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} a_k x^k$.

8. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}x^{2k+1}.$$
   (a) Montrer que
$$R_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}\int_0^1 (1-u)^{2n+1} f^{(2n+2)}(ux)du.$$
   Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

   (b) Soit r un réel $x < r < \frac{\pi}{2}$. En remarquant que $x = \frac{x}{r} \times r$, montrer que
$$R_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{2n+2} R_n(r) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{2n+2} f(r).$$
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

9. Montrer enfin que la fonction tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, et donner son développement en série entière.

* * *

Exercice 2 (Courbes de Bézier).

Définitions et notations

Dans ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 fixé et $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on note $\mathcal{B}_{k,n}(X)$ le polynôme
$$\mathcal{B}_{k,n}(x) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$
Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Si $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont $(n+1)$ points de $\mathbb{R}^2$, on appelle *courbe de Bézier associée aux points de contrôle* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ la courbe paramétrée définie sur $[0,1]$ par :
$$\forall t \in [0,1], \quad \overrightarrow{OM(t)} = \sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t)\overrightarrow{OA_k}.$$
Enfin, on note $[\![0;n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 0 et n.

Partie I : Préliminaires

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \mathcal{B}_{k,n}(X)$.
2. Développer les polynômes $\mathcal{B}_{k,2}(X)$ pour $0 \leq k \leq 2$, et les polynômes $\mathcal{B}_{k,3}(X)$ pour $0 \leq k \leq 3$.
3. Démontrer que $(\mathcal{B}_{k,2}(X))_{0\leq k\leq 2}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Démontrer que $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II : Une première courbe de Bézier dans le plan

On considère la courbe de Bézier Γ_1 associée aux points de contrôle A_0, A_1, A_2 et A_3 de coordonnées respectives $(0,0)$, $(2,2)$, $(1,3)$ et $(1,-1)$. On considère également la courbe Γ_2 dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x_2(t) &= 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ y_2(t) &= 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

5. (a) Donner une représentation paramétrique de Γ_1.
   (b) Quelle remarque peut-on faire concernant les courbes Γ_1 et Γ_2 ?
6. Étude de Γ_2.
   (a) Construire les tableaux de variations des fonctions x_2 et y_2.
   (b) Déterminer les points réguliers de Γ_2 dont la tangente à Γ_2 est horizontale ou verticale.
   (c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ_2 au point de paramètre $t = 0$.
   (d) Déterminer le point singulier de Γ_2. Préciser sa nature ainsi que la tangente à Γ_2 en ce point.
7. Tracer dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la courbe Γ_1, les points A_0, A_1, A_2 et A_3 ainsi que les tangentes à Γ_1 obtenues aux questions précédentes.
   On utilisera la feuille de papier millimétrée fournie. Le tracé de Γ_2 n'est pas demandé. Il est conseillé de prendre une unité de 6 cm.

Partie III : Un détour par le cas général

Dans cette partie, n est désormais quelconque.
On considère $(n+1)$ points de $\mathbb{R}^2$, $A_0, A_1, \ldots, A_n$, et on note Γ la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

8. Que peut-on dire des points de Γ de paramètre $t = 0$ et $t = 1$?
9. On suppose dans cette question que les points A_0 et A_1 sont distincts. Démontrer que la tangente à Γ en A_0 et la droite (A_0A_1) sont confondues.
   On admettra que si les points A_n et A_{n-1} sont distincts, alors la tangente à Γ en A_n et la droite $(A_{n-1}A_n)$ sont confondues.
10. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. On considère la courbe Λ dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & P(t) \\ y(t) & = & Q(t) \end{array}\right.$, $t \in [0,1]$.
    Est-il possible de trouver $(n+1)$ points $A_0, A_1, \ldots, A_n$ tels que Λ soit la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, A_1, \ldots, A_n$?

Partie IV : Une deuxième courbe de Bézier

Dans cette partie, les points A_0 et A_3 sont ceux définis dans la partie II.
On souhaite refermer la courbe Γ_1 de la partie II par une courbe de Bézier Γ_3 associée aux trois points de contrôle $C_0 = A_0$, C_1 et $C_2 = A_3$ et telle que les tangentes à Γ_1 et Γ_3 au point A_0 soient confondues ainsi que les deux tangentes à Γ_1 et Γ_3 au point A_3.

11. (a) En utilisant la partie III, déterminer les coordonnées du point C_1.
    (b) Vérifier qu'un paramétrage de Γ_3 est $\left\{\begin{array}{lcl} x_3(t) & = & 2t - t^2 \\ y_3(t) & = & 2t - 3t^2 \end{array}\right.$, $t \in [0,1]$.
12. Faire l'étude de la courbe Γ_3.
13. Compléter le graphe de la partie II en y rajoutant Γ_3, le point C_1 ainsi que toute autre information vous paraissant pertinente.

* * *

Exercice 3 (Apparition de deux *Pile* ou deux *Face* consécutifs).
Dans cet exercice, tous les événements considérés sont définis sur un même univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Pour tout événement M et pour tout événement N tel que $\mathbb{P}(N) \neq 0$, on rappelle que la probabilité conditionnelle de M sachant N est :

$$\mathbb{P}_N(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap N)}{\mathbb{P}(N)}.$$

Pour chaque événement M, on notera $\overline{M}$ son événement contraire.

1. *Une formule utile*
   On considère trois événements A, B, C tels que $\mathbb{P}(B \cap C) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{B} \cap C) \neq 0$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $\mathbb{P}(C) \neq 0$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B} \cap C)$.
   (c) En déduire alors la formule suivante :
   $$\mathbb{P}_C(A) = \mathbb{P}_{B\cap C}(A) \times \mathbb{P}_C(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}\cap C}(A) \times \mathbb{P}_C(\overline{B}).$$

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance indéfiniment une pièce amenant *Pile* avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$), et *Face* avec la probabilité q, où $q = 1 - p$. On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience (on ne cherchera pas à le construire !), et tel que les résultats des différents lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k non nul, on note F_k l'événement : "on obtient *Face* au k^e lancer".
L'événement $\overline{F_k}$ est donc : "on obtient *Pile* au k^e lancer".

On considère l'événement E : "Deux *Face* consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de deux *Pile* consécutifs".
Par exemple :

- si les résultats des six premiers lancers sont "$FPFPFF$", alors E est réalisé ;
- si les résultats des six premiers lancers sont "$PFFPPF$", alors E est réalisé ;
- si les résultats des six premiers lancers sont "$FPFPPF$", alors $\overline{E}$ est réalisé.

2. (a) Donner sans calcul la valeur de $\mathbb{P}_{F_1\cap F_2}(E)$.
   (b) Justifier sans calcul la relation : $\mathbb{P}_{F_1\cap \overline{F_2}}(E) = \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E)$.
   (c) En utilisant le résultat de la question 1.(c), montrer que
   $$\mathbb{P}_{F_1}(E) = q + p\,\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E).$$
3. (a) Que vaut $\mathbb{P}_{\overline{F_1}\cap\overline{F_2}}(E)$?
   (b) On admet que $\mathbb{P}_{\overline{F_1}\cap F_2}(E) = \mathbb{P}_{F_1}(E)$ (cela se montre comme en 2.(b)).
   En utilisant le résultat de la question 1.(c), montrer que
   $$\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E) = q\,\mathbb{P}_{F_1}(E).$$
4. (a) Déduire des questions 2. et 3. les expressions de $\mathbb{P}_{F_1}(E)$ et $\mathbb{P}_{\overline{F_1}}(E)$ en fonction de p et q.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(E)$ en fonction de p et q.
5. On note G l'événement : "Deux *Pile* consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de deux *Face* consécutifs".
   (a) Expliquer comment trouver $\mathbb{P}(G)$ sans calcul.
   (b) Vérifier que $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) = 1$.
   (c) Comment interpréter ce résultat ?
6. On considère maintenant les événements :
   E_n : "on obtient FF aux lancers $n+1$ et $n+2$ sans qu'il n'y ait eu FF ou PP auparavant".
   On remarque que les $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles.
   (a) Quel est l'événement $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$?
   (b) Exprimer E_0, E_1, E_2 et E_3 en fonction des événements $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\overline{F_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) Expliquer pourquoi on a
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad E_{2k} = F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap \cdots \cap F_{2k-1} \cap \overline{F_{2k}} \cap F_{2k+1} \cap F_{2k+2}.$$
   (d) En déduire $\mathbb{P}(E_{2k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (e) Calculer de même $\mathbb{P}(E_{2k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (f) Retrouver ainsi la valeur de $\mathbb{P}(E)$.

* * *